

TIEMPO DE RETORNO PARA ECUACIONES TIPO LIÉNARD. Time of return Liénard type equations.

RESUMEN

En este artículo se presentan condiciones necesarias para que ecuaciones del tipo Liénard tengan tiempo de retorno τ monótono, más aún se encuentra una relación entre τ y el tiempo de retorno de la parte lineal de ecuaciones tipo Liénard. Los resultados están basados en la técnica introducida en [1] para ecuaciones del tipo Duffing. Finalmente, con ayuda del software Mathematica se presentan algunos ejemplos numéricos de soluciones de ecuaciones tipo Liénard que son contrastadas con los resultados obtenidos.

PALABRAS CLAVES: Sistemas autónomos bidimensionales, mapas de Poincaré, Tiempo de retorno.

ABSTRACT

This paper presents conditions for Liénard type equations have time to return τ monotonous, even more is a relationship between τ and the return time of the linear part of Liénard type equations. The results are based on the technique introduced on [1] to equations of Duffing type. Finally, using the software Mathematica we present some numerical examples of solutions of Liénard type equations are contrasted with the results.

KEYWORDS: Poincaré maps, Times of return, Two-dimensional autonomous systems.

ERNESTO BONILLA

Ing. Mecánico,
Candidato a M. Sc en Enseñanza de la Matemática
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
ebonilla@utp.edu.co

PEDRO PABLO CÁRDENAS ALZATE

Lic. Matemáticas y Computación.
M.Sc en Enseñanza de la Matemática
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

ALEXANDER GUTIÉRREZ GUTIÉRREZ

Matemático, M. Sc.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira.
alexguti@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El problema de encontrar condiciones para que ecuaciones del tipo

$$\ddot{x} + h(x, \dot{x}) = 0, \quad (1)$$

tengan soluciones periódicas, ha sido ampliamente estudiado [2,3,5], entre otros. Sin embargo, el tiempo de retorno, es decir, el tiempo que tarda una solución de (1) en hacer una oscilación completa, no ha sido muy explorado, [1,3].

Esto motivó a estudiar el tiempo de retorno para problemas tipo Liénard:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda(1 + g(x))\dot{x} + (1 + f(x))x = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0 \end{cases}, \quad (2)$$

donde $0 < \lambda < 1$, y $f, g \in C^2[-\pi, \pi]$, y extenderla técnica elemental presentada en [1]. Concretamente, se obtuvo el siguiente resultado:

Teorema 1. Si las funciones f y g de (2) satisfacen:

$$(H) f(0) = g(0) = 0 \text{ y } f(x) + 1 > 0,$$

Entonces, el tiempo de retorno $\tau(x_0, \lambda)$ es una función monótona respecto de x_0 en un intervalo $]0, \delta[$, $\delta > 0$, siempre que en el intervalo en $] - \delta, \delta[$, f no cambie de signo y g sea monótona. Más aun,

- Si $f(x) \leq 0$ y $g' \neq 0$ en $] - \delta, \delta[$ entonces $\tau(x_0, \lambda)$ es creciente respecto de x_0 en $]0, \delta[$.
- Si $f(x) \geq 0$ y $g' \neq 0$ en $] - \delta, \delta[$ entonces $\tau(x_0, \lambda)$ es decreciente respecto de x_0 en $]0, \delta[$.

2. CONTENIDO

En esta sección se presentan algunos resultados preliminares necesarios para demostrar el resultado principal (Teorema 1).

Entonces bajo la hipótesis (H) se tiene que el problema lineal asociado a (2) es

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + x = 0 \\ x(0) = x_0, \dot{x}(0) = 0' \end{cases} \quad (3)$$

y la solución de (3) es

$$x(t) = x_0 e^{-\lambda t} \left(\cos(\omega t) + \frac{\lambda}{\omega} \sin(\omega t) \right), \quad (4)$$

donde $\omega = \sqrt{1 - \lambda^2}$. Ahora se tiene que la derivada de (4) es

$$\dot{x}(t) = -x_0 e^{-\lambda t} \left(\frac{\lambda^2 + \omega^2}{\omega} \right) \sin(\omega t). \quad (5)$$

Así el tiempo de retorno de (3) es el tercer cero de (5), lo que implica que el tiempo de retorno asociado a (3) es

$$\frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (6)$$

El siguiente teorema relaciona el tiempo de retorno de (2) con (6), es decir, con el tiempo de retorno del problema (3).

Teorema 2. Bajo la hipótesis (H), el tiempo de retorno $\tau(x_0, \lambda)$ satisface:

$$\lim_{x_0 \rightarrow 0^+} \tau(x_0, \lambda) = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\lambda^2}}. \quad (7)$$

Demostración. Véase [2].

El Teorema 2 es una extensión del resultado demostrado en [1] para problemas de valor inicial (2) con $g(x) \equiv 0$.

De (3) también podemos deducir que (0,0) es un foco para el problema (2).

Teorema 3. Bajo la hipótesis (H), el problema (2) tiene un foco aislado en (0,0).

3. DEMOSTRACIÓN DEL RESULTADO PRINCIPAL

Se hará la demostración de del Teorema 1, en el caso

- Si $f(x) \leq 0$ y $g' \neq 0$ en $] -\delta, \delta[$ entonces $\tau(x_0, \lambda)$ es creciente respecto de x_0 en $]0, \delta[$.

El razonamiento es análogo en el otro caso. Reescribir (2) como un sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -2\lambda(1 + g(x))y - (1 + f(x))x \end{cases} \quad (8)$$

Que en coordenadas polares

$$\begin{cases} \dot{r} = -r \sin \varphi (2\lambda(1 + g(r \cos \varphi)) \sin \varphi + f(r \cos \varphi) \cos \varphi) \\ \dot{\varphi} = -(\lambda(1 + g(r \cos \varphi)) \sin 2\varphi + f(r \cos \varphi)(\cos \varphi)^2 + 1) \end{cases}, \quad (9)$$

Primero se muestra que $\dot{\varphi}$ es una función creciente respecto de r . Entonces derivando la segunda ecuación de (9) respecto a r se tiene:

$$\frac{d\dot{\varphi}}{dr} = -\frac{x^2}{r^3} (2\lambda g'(x) y + x f'(x)). \quad (10)$$

Por un lado, se ve que si $f < 0$ entonces

$$-x^2 \frac{x f'(x)}{r^3} > 0,$$

en efecto, de la hipótesis (H) y $f < 0$ se tiene que existe un intervalo $] -\delta, \delta[$, con $\delta > 0$ muy pequeño tal que la $f(x)$ es una función cóncava hacia abajo como y cumple que:

- En el intervalo $] -\delta, 0]$, $x < 0$ y $f'(x) > 0$ por ser creciente.
- En el intervalo $]0, \delta[$, $x > 0$ y $f'(x) < 0$ por ser decreciente.

Por consiguiente, siempre se cumple que $-x^2 \frac{x f'(x)}{r^3} > 0$, cuando $x \in] -\delta, \delta[$. Por otro lado, se ve que $-x^2 \frac{2\lambda g'(x) y}{r^3} > 0$ siempre que g satisfaga la hipótesis (H) y $g'(x) > 0$, o $g'(x) < 0$, en efecto:

- Si $g'(x) > 0$. Entonces si $y \in] -\delta, 0[$ se tiene $-x^2 \frac{2\lambda g'(x) y}{r^3} > 0$.
- Si $g'(x) < 0$. Entonces si $y \in]0, \delta[$ se tiene $-x^2 \frac{2\lambda g'(x) y}{r^3} > 0$.

En consecuencia, si $r > 0$ y $(x, y) \in] -\delta, \delta[\times] -\delta, 0[$, con $g'(x) > 0$ o $(x, y) \in] -\delta, \delta[\times]0, \delta[$, con $g'(x) < 0$ tenemos que el término de la derecha de la ecuación (10) es positivo y por consiguiente, $\dot{\varphi}$ es una función creciente respecto de r .

Finalmente, para mostrar que el tiempo de retorno es creciente, denotemos $z = (x_0, 0) \in \mathbb{R}^2$ y $\Phi(\cdot, z)$ la solución de (8) tal que $\Phi(0, z) = z$. Obsérvese que el Teorema 3 garantiza la existencia del operador de Poincaré en $[0, \omega]$ definido como

$$P_\omega(z) := \Phi(\omega, z). \tag{11}$$

Ahora considérese $P_{\omega_1}(z_1)$ y $P_{\omega_2}(z_2)$ donde $x_2 > x_1 > 0$ tal que $x_2 \in]0, \delta[$. Entonces, $r_1(0) < r_2(0)$ y $\dot{\varphi}$ es una función creciente respecto de r implica que $d\varphi_1 < d\varphi_2$, para un tiempo infinitesimal pequeño.

Entonces se tiene que

$$\varphi_1(s) < \varphi_2(s), \quad s \in [0, \min\{\omega_1, \omega_2\}].$$

En efecto, se argumenta por contradicción y supóngase que existe $s \in [0, s_1[$ tal que $\varphi_1(s) = \varphi_2(s)$ y para todo $s \in [s_1, \min\{\omega_1, \omega_2\}]$ se tiene $\varphi_2(s) < \varphi_1(s)$, en cualquier caso se tiene que $r_2(s_1) < r_1(s_1)$ lo que implica que las curvas $\Phi(s, z_2)$, $\Phi(s, z_1)$, se intersecan en algún punto $s \in [0, s_1[$, lo que contradice que (8) sea un sistema bidimensional autónomo.

Entonces $\varphi_1(s) < \varphi_2(s)$ lo que implica $P_{\omega_1}(z_1)$ regresa más pronto al rayo de partida que $P_{\omega_2}(z_2)$, por tanto, $\omega_1 < \omega_2$, como se quería mostrar.

4. EJEMPLOS

Para un primer ejemplo supóngase que en (2) se toma $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ y $g(x) = x + x^3$. Entonces, existe un intervalo $] -\delta, \delta[$, $\delta > 0$ tal que $g'(x) > 0$ y $f(x) \leq 0$. Entonces el Teorema 1 garantiza que el tiempo de retorno es creciente como se ilustra en la Figura 1.

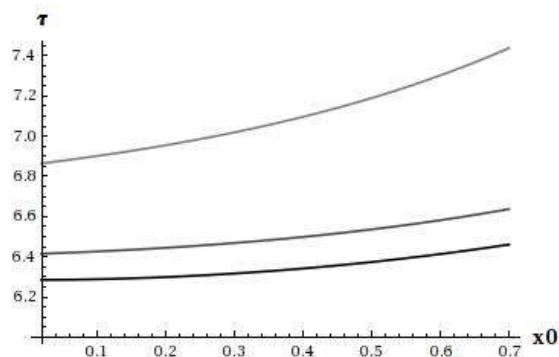


Figura 1. Tiempo de retorno $\tau(x_0, \cdot)$ cuando en (2) tomamos $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ y $g(x) = x + x^3$.

Obsérvese que la condición $g'(x) \neq 0$ del Teorema 1 es necesaria, pues si en (2) se toma $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ y $g(x) = -4x^2$, se tiene $g'(x) = -8x$ y por tanto $g'(x)$ cambia de signo para cualquier intervalo $] -\delta, \delta[$, $\delta > 0$, ver Figura 2.

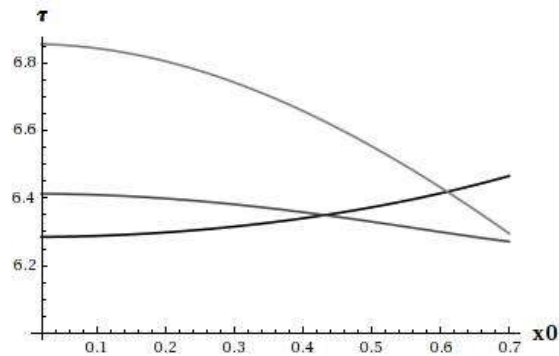


Figura 2. Tiempo de retorno $\tau(x_0, \cdot)$ cuando en (2) tomamos $f(x) = \frac{\sin x}{x} - 1$ y $g(x) = -4x^2$.

Finalmente considérese un ejemplo donde la función f tiene dos singularidades. Así al reemplazar en (2) $g(x) = -x$ y $f(x) = \frac{1}{x+\pi} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{2}{\pi}$ se tiene que existe un intervalo $] -\delta, \delta[$, $\delta > 0$ tal que $g'(x) > 0$ y $f(x) \geq 0$. Entonces el Teorema 1 garantiza que τ es decreciente respecto a la condición inicial x_0 como se ilustra en la Figura 3.

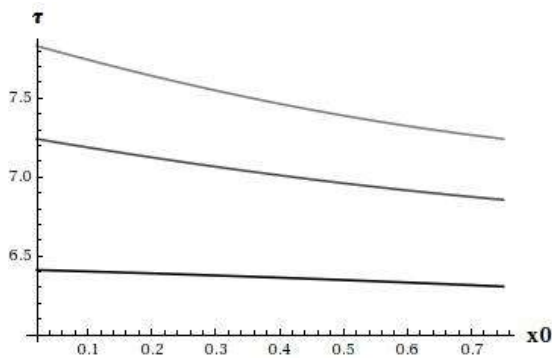


Figura 3. Tiempo de retorno $\tau(x_0, \cdot)$ cuando en (2) tomamos $f(x) = \frac{1}{x+\pi} - \frac{1}{x-\pi} - \frac{2}{\pi}y$ y $g(x) = -x$.

4. APLICACIÓN A UN MODELO DE PÉNDULO

Puede verse que cualquier función de la forma

$$g_1(\theta) := \theta + c\theta^{2n+1}$$

o

$$g_2 := c\theta^{2n}$$

Con $c \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}$, en particular si se toma

$$g_1(\theta) := \theta + \theta^3$$

y

$$g_2(\theta) := -4\theta^2$$

con $\delta > 0$, se tiene que $g_1'(\theta)$ es positiva para cualquier intervalo $-\delta \leq \theta \leq \delta$, mientras que $g_2'(\theta)$ cambia de signo en el mismo intervalo. Entonces, si se toma

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta} - 1 \quad g(\theta) = g_1(\theta)$$

El teorema 5 (ver [2]), garantiza que $\tau(\theta_0, \cdot)$ es creciente respecto a la condición inicial θ_0 . Mientras que al sustituir

$$f(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\theta} - 1 \quad g(\theta) = g_2(\theta)$$

Mientras que al sustituir tenemos que el tiempo de retorno no tiene que ser una función creciente respecto a la condición inicial.

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se ha extendido la técnica expuesta en [1] a problemas de valor inicial más generales, además el resultado sigue relacionando el tiempo de (2) con el tiempo de retorno de (3). Sin embargo, quedan algunas preguntas abiertas como por ejemplo: ¿Hasta qué punto se puede debilitar la hipótesis (H) para que el tiempo de retorno de (2) sea una función monótona respecto a la condición inicial? ¿Cómo se puede modificar la técnica expuesta al caso en que $g'(x)$ cambia de signo para todo intervalo $]-\delta, \delta[$, $\delta > 0$?

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Arango J., Tischer J. "Oscilaciones, Tiempos de retorno y Experimentación numérica". Revista: Matemáticas Enseñanza Universitaria. Vol IV, pp 31- 46, 1995.
- [2] Bonilla, E. "Tiempo de retorno en algunos péndulos", Tesis de maestría en enseñanza de las matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, 2010.
- [3] Cina A., Armengol G., Mañosas F. "Period Function for a Class of Hamiltonian Systems". J. of Diff. Eq, vol. 168, pp 180-190, Nov 2000.
- [4] Fabry C., Mawhin J., Nkashama M., N., "A multiplicity result for periodic solutions of forced nonlinear second order ordinary differential equations," Bull. London Math.Soc., vol 18, pp 173-180, 1986.
- [5] Giné J. "Isochronous foci for analytic differential systems," Internat.J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Eng., vol. 13, n 6, pp 1-7, 2003.
- [6] Sabatini M. "On the period function of Liénard systems," J. Differ. Equations, vol. 152, pp. 467-487, March, 1999.
- [7] J. F. Fuller, E. F. Fuchs, and K. J. Roesler, "Influence of harmonics on power distribution system protection," *IEEE Trans. Power Delivery*, vol. 3, pp. 549-557, Apr. 1988