

## DETERMINACIÓN EXPERIMENTAL DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN EMPLEANDO SENSORES MOVIMIENTO

Experimental Determination of the Coefficient friction Using Movement Sensors

### RESUMEN

El objetivo de este artículo es mostrar una alternativa en la medición del coeficiente de fricción estático y dinámico entre dos superficies sólidas cuando se emplea el método del plano inclinado. La medición es realizada por medio de sensores de movimiento, aplicando los circuitos de acondicionamiento de señal los cuales son necesarios en su implementación. Los resultados muestran que los instrumentos empleados pueden ser adecuados en el cálculo de estos coeficientes.

**PALABRAS CLAVES:** acelerómetro, amplificador de instrumentación, amplificadores operacionales, coeficiente de fricción, fricción estática, fricción dinámica, potenciómetro lineal.

### ABSTRACT

*The objective of this article is show an alternative in the measuring of dynamic and static friction factor between two solid surfaces, using Tilted plane method. The measuring process is developed by means of moving sensors with conditioner signal circuits, whole are necessary for implementation of system. The results are signals that have the information for the calculations of friction coefficient.*

**KEYWORDS:** *accelerometer, instrumentation amplifier, operational amplifier, coefficients of friction, kinematic friction, static friction, linear potentiometer.*

### 1. INTRODUCCIÓN

A lo largo del tiempo la ciencia ha estudiado la interacción entre superficies, la mayoría de estudios realizados han llegado a concluir que el rozamiento depende de muchos factores, los cuales involucran entre otras las condiciones ambientales, el estado superficial, la humedad relativa, la magnitud de la fuerza normal, la dirección de movimiento, etc.

Una forma de estimar el coeficiente de fricción es mediante el método del plano inclinado. La ayuda de los sensores de movimiento aplicados a este método facilita el cálculo y reducen en cierta medida la incertidumbre en la lectura de los datos.

El objetivo de este trabajo es mostrar a través de pruebas experimentales como se puede medir el coeficiente de fricción aplicando sensores de movimiento, buscando que los elementos seleccionados sean los apropiados y proporcione posteriormente la automatización del proceso de medición.

### 2. CALCULO DEL COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICO Y DINÁMICO

La fuerza de fricción entre dos superficies sólidas se puede aproximar al modelo de fricción de Amontons y a Coulomb, y que plantean que, en condiciones de

deslizamiento, la fuerza de fricción es proporcional a la fuerza normal,  $N$ , y la constante de proporcionalidad es definida como coeficiente de fricción. La fuerza de fricción de Coulomb es una fuerza que tiene una amplitud constante con respecto al cambio de velocidad. La relación para el coeficiente de fricción " $\mu$ ", se presenta en la ecuación 1: [1]

$$\mu = \frac{R}{N} \quad (1)$$

**2.1 Calculo del coeficiente de fricción estático.** Se tiene un cuerpo estacionario sobre un plano inclinado, dicho plano forma un ángulo con la horizontal el cual puede variar desde cero hasta un valor " $\alpha$ ". " $\alpha$ " representa el máximo ángulo de inclinación de una superficie para que un objeto que se encuentre sobre esta, descansa estacionariamente. La figura 1 muestra el diagrama de cuerpo libre de un cuerpo sobre una superficie inclinada.

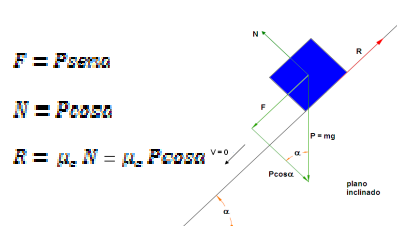


Figura 1. Diagrama de cuerpo libre de un cuerpo sobre una superficie inclinada

Donde:  $R$  = Fuerza de rozamiento,  $P$  = Peso del cuerpo,  $F$  = Fuerza de tracción (componente del peso).  
 $N$  = Fuerza normal.

Con base en la primera ley de Newton, en dicho instante la condición de equilibrio para el bloque mostrado es:

$$\Sigma F = 0; \quad F - R = 0 \quad F = R \quad (2)$$

El coeficiente de fricción estático " $\mu_e$ " se expresa en términos del ángulo de fricción como:

$$\mu_e = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{P \operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tan} \alpha \quad (3)$$

**2.2 Calculo del coeficiente de fricción dinámico.** En el instante en que el cuerpo empieza a deslizar, el cuerpo puede experimentar una velocidad y una aceleración determinada. Se presentan dos condiciones para calcular el coeficiente de fricción dinámico.

**2.2.1 Velocidad Constante.** Si el cuerpo se desliza a velocidad constante, se puede medir el coeficiente de fricción dinámico.

Siendo la fuerza de rozamiento  $R$  la que se opone al movimiento del cuerpo, el coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu_d$  debe ser menor que el coeficiente estático

$$\mu_e \cdot \mu_d < \mu_e$$

Al analizar las fuerzas que se presentan entre el bloque y el plano inclinado, descritas en la figura anterior, se tiene que el coeficiente de fricción dinámico " $\mu_d$ " se expresa en términos del ángulo de fricción como.

$$\mu_d = \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{P \operatorname{cos} \alpha} = \operatorname{tan} \alpha \quad (4)$$

**2.2.2 Aceleración Constante.** El cuerpo se acelera durante el deslizamiento. Como en el anterior caso,  $R$  es la fuerza de rozamiento que se opone al movimiento del cuerpo, y el coeficiente de rozamiento dinámico  $\mu_d$  debe

$$\text{ser menor que el coeficiente estático } \mu_e \cdot \mu_d < \mu_e$$

En La figura 3, el deslizamiento del bloque es posible cuando  $F > R$

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene

$$\Sigma F = ma \quad F - R = ma \quad (5)$$

Donde  $m$  = Masa del cuerpo,  $g$  = Gravedad,  $a$  = Aceleración con que desliza el cuerpo.

La aceleración con que desliza el bloque es la siguiente:

$$g(\operatorname{sen} \alpha - \mu_d \operatorname{cos} \alpha) = a \quad (6)$$

Se tiene que el coeficiente de fricción dinámico " $\mu_d$ "

$$\mu_d = \operatorname{tan} \alpha - \frac{a}{g \operatorname{cos} \alpha} \quad (7)$$

Con la ecuación 7 se puede determinar el coeficiente de fricción dinámico entre dos superficies sólidas, cuando es posible medir la aceleración.

### 3. DESCRIPCIÓN DEL DISPOSITIVO Y PROCEDIMIENTO EXPERIMENTAL

El dispositivo mostrado en la figura 2 consiste en un plano inclinado, que se eleva debido al movimiento ejercido por un mecanismo de cuatro barras. Un motor transmite la potencia necesaria al mecanismo por medio un sistema de engranajes el cual proporciona la velocidad adecuada en los eslabones del mecanismo.

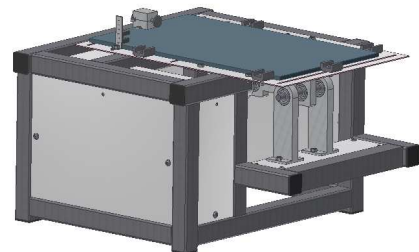


Figura 2. Dispositivo para medir el Coeficiente de fricción

La probeta se ajusta sobre la superficie de deslizamiento de tal manera que su presencia sea percibida por un sensor óptico de barrera. Posicionada la probeta, se empieza a inclinar lentamente la superficie hasta que la probeta apenas empiece a deslizar, en dicho instante el sensor le envía una señal al motor para que este se detenga. La visualización del ángulo de inclinación es hecha a través de un potenciómetro rotacional el cual se encuentra acoplado a la superficie inclinada. El valor del ángulo de inclinación nos permite el cálculo del coeficiente de fricción estático, empleando la ecuación 3.

El coeficiente de fricción dinámico calculado con la ecuación 4 se determina posicionando el plano inclinado

en un ángulo menor y cercano al obtenido en la medición del coeficiente de fricción estático, luego a pequeños incrementos del ángulo de inclinación y con la ayuda de un mecanismo de impacto, se le aplica un golpe leve y constante a la probeta, hasta que deslice de manera uniforme. Un acelerómetro instalado encima de la probeta comprueba que la velocidad se mantenga en un valor aproximadamente constante.

Para el coeficiente de fricción dinámico empleando la ecuación 7, se determinará la aceleración con que se desliza la probeta a un ángulo un poco más elevado al obtenido en la medición del coeficiente de fricción estático.

**4. INSTRUMENTOS SELECCIONADOS PARA LA MEDICIÓN**

**4.1 Potenciómetro Rotativo.** Potenciómetro de mando, rotativo y de variación lineal, empleado para medir el ángulo de inclinación de la superficie sobre la que se monta la probeta. (Ver tabla 1)

Tipo	R(Ω)	Tolerancia resistencia	Voltaje de operación	Angulo de giro	Potencia
Lineal (B)	5 KΩ	±20%	200 V	300° ± 5%	0.2 Watts

Tabla 1. Valores específicos del potenciómetro rotativo de carbón.[2]

Fuente: < URL: <http://www.ing.unp.edu.ar/electronica/asignaturas/ee016/anexo/r-dicopel.pdf>>.

Dependiendo del tipo de potenciómetro ya sea logarítmico o lineal así es su comportamiento, donde el valor de la resistencia es proporcional a la variación del desplazamiento que en este caso es rotacional.

**4.2 Acelerómetro ADXL202.** Es un acelerómetro micro mecanizado de dos ejes de sensibilidad, el cual permite medir aceleraciones de manera estática y dinámica hasta una escala máxima de ± 2g. Su tamaño es de aproximadamente 1mm². (Ver figura 3)



Figura 3. Acelerómetro ADXL202

Fuente: < URL : <http://www.dynamoelectronics.com/Sensores.pdf>>[3].

**4.2.1 Principio físico de operación.** La aceleración o desaceleración en el eje “sensor”, ejerce una fuerza sobre la masa central. Al moverse libremente, la masa desplaza las minúsculas placas del condensador digital que tiene en su interior, provocando un cambio de capacidad. Este

cambio de capacidad es detectado y procesado para obtener un voltaje de salida proporcional a la aceleración utilizando una tecnología BiCMOS (BiMOS II). (Ver Figura 4)

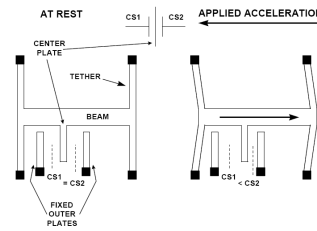


Figura 4. Acelerómetro micro mecanizado

Fuente: <URL: [http://www.analog.com/static/imported-files/seminars\\_webcasts/927412250sscsect4.PDF](http://www.analog.com/static/imported-files/seminars_webcasts/927412250sscsect4.PDF)> [4].

En la Figura 5 se ilustra el cambio presentado en los ejes X y Y, donde la variable dependiente es la aceleración en gravedades y la variable independiente el ángulo de inclinación.

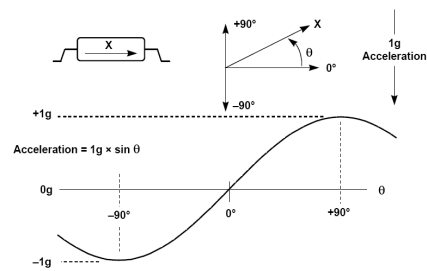


Figura 5. Usando el acelerómetro para medir inclinación

Fuente: <URL: [http://www.analog.com/static/imported-files/seminars\\_webcasts/927412250sscsect4.PDF](http://www.analog.com/static/imported-files/seminars_webcasts/927412250sscsect4.PDF)>.[4]

**5. PRUEBAS DE CONFIABILIDAD Y VALIDEZ EN LA MEDICIÓN**

**5.1 Implementación del potenciómetro.** Para la realización de las pruebas con el potenciómetro, se diseñó el circuito con amplificadores operacionales para lograr interpretar de manera directa en grados el valor de voltaje medido al final del circuito. En la Figura 6 se observa el circuito diseñado en el cual 9 V equivalen a 90°.

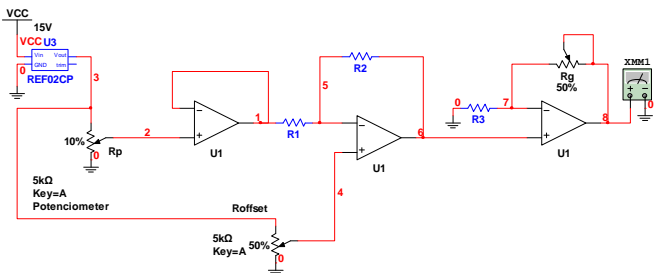


Figura 6. Circuito para la medición del ángulo por método resistivo.

En la figura 6, Rp es el potenciómetro (sensor), alimentado a 5V de alta precisión con la referencia REF02CP, el circuito de acondicionamiento permite ajuste de cero y ajuste de ganancia, para finalmente tener una salida con una sensibilidad de 100 mV/°. Esto se resume mediante la ecuación 8.

$$Escala_{medición} = Sensibilidad = 0.1 \frac{Volios}{Inclinación} \quad (8)$$

**5.1.1 Caracterización para medir el ángulo de inclinación mediante potenciómetro.**

Se ajustó el circuito para realizar la primera medición, estando la superficie a 0° y variando cada 5° hasta 70°. Este procedimiento inicial se hizo con el objetivo de hacer el ajuste de cero y de ganancia. Como instrumento patrón se empleo un goniómetro. (Ver tabla 2)

Variación [°]	Salida [V]	Error [%]
0	0.007	
5	0.541	8.20
10	1.045	4.50
15	1.519	1.27
20	1.975	1.25
25	2.514	0.56
30	3.040	1.33
35	3.501	0.03
40	3.997	0.08
45	4.531	0.69
50	5.011	0.22
55	5.513	0.24
60	6.018	0.30
65	6.560	0.92
70	6.990	0.14

Tabla 2. Salida de voltaje usando potenciómetro

En la figura 7 se observan los resultados obtenidos de la medición con el potenciómetro con referencia a la escala graduada y el error de medida entre ambos instrumentos.

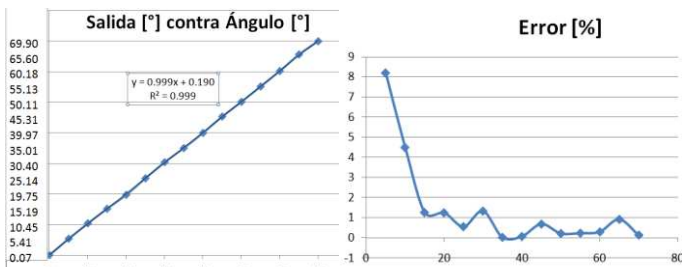


Figura 7. Resultados empleando potenciómetro

De acuerdo al índice de correlación  $R^2 = 0.999$ , el error de linealidad es  $\pm 0.1\%$ . Se puede observar en la figura 9 que el error se incrementa notablemente por debajo de los 18°.

**5.2 Implementación del acelerómetro.** Para obtener el grado de inclinación, se mide la aceleración de caída libre g. Si cambia la inclinación entonces cambia el vector de aceleración, lo cual permite determinar teóricamente el grado de inclinación de una superficie. La ecuación 9 muestra como se determina el ángulo.

$$\theta = \arcsen \left[ \frac{V(salida) - V(cero\ g)}{1\ g \times factor\ escala\ (V/g)} \right] \quad (9)$$

Donde:  $V(salida)$  = El voltaje de salida del acelerómetro.

$V(cero\ g)$  = El voltaje a cero gravedades.  $1\ g = 9.8\ m/s^2$

Tomando como base la hoja de datos del ADXL202 [4] con un voltaje de alimentación de 5V de alta precisión (AD584 [5]), el voltaje de salida con respecto a la aceleración es determinado por la ecuación 10.

$$V_{salida}_{ADXL202} = 0.3 * x + 2.5 \quad (10)$$

Donde x varía de -1g a 1g.

El diseño del acondicionador de señal para la salida deseada es de 0 a 10 V, donde 0 V es equivalente a 0° (0 gravedades) y 10 V es equivalente a 90° (1 gavedad).

El circuito final se muestra en la figura 8, dicho circuito reúne las exigencias de la aplicación y los requerimientos del fabricante.

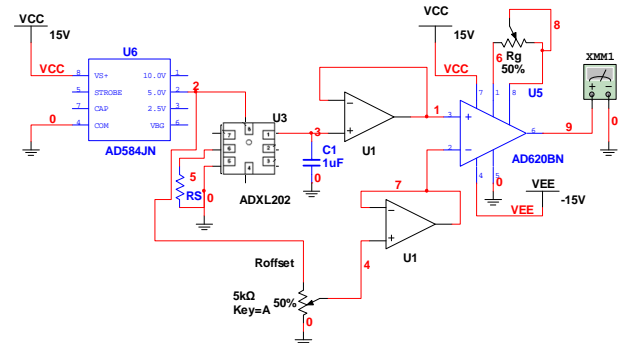


Figura 8. Circuito para la medición mediante acelerómetro.

**5.2.1 Caracterización para medir el ángulo de inclinación mediante acelerómetro.** Una vez montado y ajustado el circuito para medir el ángulo de inclinación, se verifica la primera medición y se varia el ángulo de inclinación de 0° a 70° (0 al 100%). Usando el circuito de acondicionamiento de señal de la figura 8.

En la Tabla 3 se muestran los valores de inclinación obtenidos de la prueba realizada.

Valor X Salida (V)	Valor (m/s <sup>2</sup> )	Valor gravedad (g)	Angulo (°)
0.004	0.004	0.0004	0
0.501	0.501	0.0501	2.87
1.030	1.030	0.1030	5.91
1.535	1.535	0.1535	8.82
2.521	2.521	0.2521	14.60
3.062	3.062	0.3062	17.77
3.502	3.502	0.3502	20.49
4.060	4.060	0.4060	23.95
4.516	4.516	0.4516	26.84
5.034	5.034	0.5034	30.22
6.011	6.011	0.6011	36.94
6.556	6.556	0.6556	40.96
7.549	7.549	0.7549	49.01
8.006	8.006	0.8006	53.18

Tabla 3. Valores de inclinación debido a la gravedad

Mediante regresión polinomial de tercer grado de los datos obtenidos, se obtuvo la ecuación y el índice de correlación a fin de saber el error. (Ver figura 9)

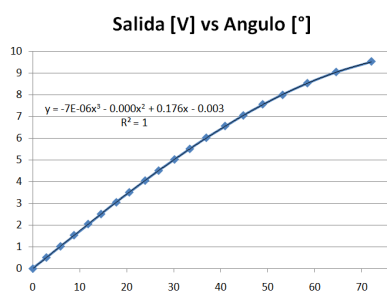


Figura 9. Curva de comportamiento del voltaje de salida contra ángulo de inclinación.

Se empleó en el cálculo el siguiente factor de escala:

$$\text{factor escala} = \text{Sensibilidad} = 1 \frac{V}{(m/s^2)}$$

La relación entre la variación del ángulo y el voltaje de salida no es lineal, pero si es lineal con respecto a la gravedad según la hoja de datos del acelerómetro, teniendo esto se puede determinar usando la función arcoseno (ecuación 11)

$$\theta = \arcsen \left[ \frac{V(\text{salida}) - V(\text{cero g})}{1 \text{ g} \times \text{factor escala} (V/g)} \right] \quad (11)$$

### 6. RESULTADOS OBTENIDOS

**6.1 probetas.** Se seleccionaron los materiales y se dimensionaron en bloques de acuerdo a la normas TAPPI y ASTM para medir fricción.

Lámina de aluminio: 6.35x6.35 mm, espesor de 1.5 mm.

Lámina de acero: 6.35x6.35 mm, espesor de 1 mm.  
 Bloque de madera: 2x4 in, espesor de 40 mm.

Se emplearon probetas con peso adicional.

Lámina de aluminio: 6.35x6.35 mm, 200 gramos de peso.  
 Lámina de acero: 6.35x6.35 mm, 750 gramos de peso.  
 Bloque de madera: 2X4 in, 750 gramos de peso.

**6.2. Resultados.** Para la medición del coeficiente de fricción dinámico se incrementó la superficie a 3° y 5° consecutivamente, a partir de la posición cuando se determina el coeficiente de fricción estático. En las tablas 4 y 5 se describen los valores obtenidos de las probetas sin peso adicional.

Material	$\mu_s$	Aceleración final (m/s <sup>2</sup> )	$\mu_d$
Aluminio Madera	0.38	4.943	0.34
Acero Madera	0.34	4.276	0.3
Madera Madera	0.36	4.871	0.31

Tabla 4. Valores obtenidos a 3° por encima del valor obtenido en la medición del coeficiente de fricción estático.

Materiales	$\mu_s$	Gravedad final (m/s <sup>2</sup> )	$\mu_d$
Aluminio Madera	0.38	5.796	0.32
Acero Madera	0.34	5.472	0.28
Madera Madera	0.36	5.724	0.29

Tabla 5. Valores obtenidos a 5° por encima del valor obtenido en la medición del coeficiente de fricción estático.

En las tablas 6 y 7 se observan los valores obtenidos de las probetas con peso adicional.

Materiales	$\mu_s$	Gravedad final (m/s <sup>2</sup> )	$\mu_d$
Aluminio madera	0.46	5.907	0.38
Acero madera	0.60	7.485	0.44
Madera madera	0.48	6.222	0.38

Tabla 6. Valores obtenidos a 3° por encima del valor obtenido en la medición del coeficiente de fricción estático y con adición de peso.

Materiales	$\mu_s$	Gravedad final (m/s <sup>2</sup> )	$\mu_d$
------------	---------	------------------------------------	---------

Aluminio madera	0.46	6.746	0.36
Acero madera	0.60	8.455	0.40
Madera madera	0.48	7.140	0.35

Tabla 7. Valores obtenidos a 5° por encima del valor obtenido en la medición del COF estático y con adición de peso.

Los valores obtenidos de las pruebas respecto a los presentados en la literatura se muestran en la tabla 8. Los valores más cercanos se obtuvieron cuando se implementó peso adicional, el cual está sujeto a la norma correspondiente para medir fricción bajo el método del plano inclinado.

Materiales	Valores expuestos en la literatura		Valores obtenidos de la prueba	
	$\mu_s$	$\mu_d$	$\mu_s$	$\mu_d$
Aluminio - madera	0.46	0.40	0.46	0.38
Acero - madera	0.65	0.45	0.60	0.44
Madera - madera	0.25-0.6	0.2-0.4	0.48	0.38

Tabla 8. Comparación entre valores obtenidos en la prueba y los sugeridos en la literatura.

## 7. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los resultados de las pruebas realizadas confirman que el coeficiente de fricción dinámico depende de varios factores, en este caso para la toma de datos, los valores de fricción varían respecto al peso, la velocidad relativa y la naturaleza del material; lo cual confirma algunos estudios en los cuales el coeficiente de fricción puede incrementarse o disminuir con la fuerza normal.

El empleo del acelerómetro puede dar la combinación de alta seguridad en su funcionamiento y tamaño pequeño, además de permitir medir varias variables al mismo tiempo, aceleración, velocidad y ángulo de manera estática y dinámica, dándole mayor confiabilidad a las lecturas.

El potenciómetro como sensor de ángulo de inclinación es una alternativa muy versátil a pesar de su baja precisión, lo cual se traduce en bajo nivel de repetibilidad y alta histéresis.

Se logró comprobar que los instrumentos seleccionados pueden ser empleados a fin de obtener el coeficiente de fricción estático y dinámico entre diferentes superficies,

lo cual se puede evidenciar en la comparación con los datos de la literatura.

Se recomienda emplear potenciómetros de precisión para ser confiable la medición.

## 8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Rabinowicz, E. (1995). *Friction and wear of materials*. 2<sup>nd</sup> edition, New York: John Wiley & Sons, Inc
- [2] Dicopel, Potenciómetro rotacional de variación lineal sin switch data sheet, disponible en [<http://www.ing.unp.edu.ar/electronica/asignaturas/ee016/anexo/r-dicopel.pdf>]
- [3] DYNAMOELECTRONICS, Catálogo Sensores, Alecerómetros, [citado 25 oct., 2009]. Disponible desde Internet: < URL : <http://www.dynamoelectronics.com/Sensores.pdf>>
- [4] ANALOG DEVICES, ADXL202 data sheet, [cited apr., 1999]. Available from Internet: <URL: [http://www.analog.com/static/importedfiles/seminars\\_webcasts/927412250sscsect4.PDF](http://www.analog.com/static/importedfiles/seminars_webcasts/927412250sscsect4.PDF)>
- [5] ANALOG DEVICES, ADXL202 data sheet, [cited jul., 2001]. Available from Internet: <URL: [http://www.analog.com/static/imported-files/data\\_sheets/AD584.pdf](http://www.analog.com/static/imported-files/data_sheets/AD584.pdf)>