



Un algoritmo híbrido para resolver el problema de los valores propios cuadrático

A hybrid algorithm to solve the quadratic eigenvalue problem

R. Pérez-Mera ; E. M. Macías-Caicedo ; F. E. Arenas-Aparicio 

Abstract—The quadratic eigenvalue problem has attracted the interest of many researchers due to its numerous applications in areas such as fluid mechanics, acoustics and engineering, among others. In this paper we present a hybrid algorithm to solve this problem, which combines an algorithm for the calculation of solutions of the matrix quadratic equation with a traditional one for the calculation of eigenvalues. Twelve application problems were selected, in different areas, to make a comparative analysis of the performance of the proposed algorithm with the traditional Newton method. In conclusion, it was determined that the algorithmic proposal is competitive with Newton's method and more efficient.

Index Terms—Newton method, quadratic matrix function, quasi-Newton method, q-quadratic convergence, the quadratic eigenvalue problem.

Resumen—El problema de los valores propios cuadráticos ha captado el interés de muchos investigadores debido a sus numerosas aplicaciones en áreas tales como mecánica de fluidos, Acústica e Ingeniería, entre otras. En este artículo se presenta un algoritmo híbrido para resolver este problema, el cual combina un algoritmo para el cálculo de soluciones de la ecuación cuadrática matricial con uno tradicional para el cálculo de valores propios. Se seleccionaron doce problemas de aplicación, en diversas áreas, para hacer un análisis comparativo del desempeño del algoritmo propuesto con el tradicional método de *Newton-Schur*. Como conclusión se determinó que la propuesta algorítmica es competitiva frente al método de *Newton-Schur* y más eficiente.

Palabras claves— convergencia q-cuadrática, función cuadrática matricial, Método cuasi-Newton, método de Newton, problema de valores propios cuadrático.

Este manuscrito fue enviado el 7 de diciembre de 2018 y aceptado el 29 de junio de 2019.

Los autores agradecen a la Universidad del Cauca por el tiempo concedido para esta investigación mediante el proyecto de investigación VRI ID 4641.

R. Pérez-Mera, Doctora en Matemática Aplicada. Grupo de Optimización. Universidad del Cauca., Carrera 2A, No. 3N-111. Popayán-Cauca (rosana@unicauca.edu.co).

I. INTRODUCTION

EN una gran variedad de aplicaciones es necesario encontrar, si es posible, soluciones o de la llamada ecuación cuadrática matricial

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = 0, \quad (1)$$

donde $A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}$ y Q es una función *Fréchet* diferenciable.

Entre esas aplicaciones están problemas estocásticos [1], análisis dinámico de mecánica estructural y sistemas acústicos; simulación de circuitos eléctricos; mecánica de fluidos; procesamiento de señales; problemas de vibración y modelamiento de sistemas mecánicos micro electrónicos [2] [3] [4].

En gran parte, el estudio y los desarrollos teóricos de la ecuación (1) han sido motivados por un problema que surge con frecuencia en el análisis de sistemas estructurales y en problemas de vibración [5] [6] [7] conocido como el problema de los valores propios cuadrático, el cual consiste en encontrar números complejos λ y vectores no nulos \mathbf{z} tales que

$$Q(\lambda) \mathbf{z} = (\lambda^2 A + \lambda B + C) \mathbf{z} = 0, \quad (2)$$

en este caso, \mathbf{z} es llamado un vector propio de la matriz $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$ correspondiente al valor propio λ . La matriz $Q(\lambda)$, cuyas componentes son polinomios en λ de grado menor o igual que dos, es conocida como una matriz λ [8] [9] [10].

Una idea útil para resolver el problema de los valores propios cuadrático es la siguiente [11] [12]. Si la matriz X es un solvente de (1) entonces $C = -BX - AX^2$, con lo cual $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B - BX - AX^2 - \lambda AX + -\lambda AX$. Así mediante una

E. M. Macías Caicedo-, Magíster en Ciencias Matemáticas. Grupo de Optimización. Universidad del Cauca. Carrera 2A, 3N-111., Popayán-Cauca (mauromac@unicauca.edu.co).

F. E. Arenas Aparicio -, Magíster en Ciencias Matemáticas. Grupo de Optimización. Universidad del Cauca, Carrera 2A, 3N-111. Popayán-Cauca (farenas@unicauca.edu.co).

manipulación algebraica, la matriz $Q(\lambda)$ puede factorizarse como en (3),

$$Q(\lambda) = -[B + AX + \lambda A][A - \lambda I_n] \quad (3)$$

A partir de (3), se tiene que los valores propios de $Q(\lambda)$ son los valores propios del solvente X junto con los del problema de valores propios generalizado $(B + AX)\mathbf{z} = -\lambda A\mathbf{z}$ [13].

Desde un punto de vista algorítmico, la idea expuesta en el párrafo anterior plantea la necesidad de disponer de un algoritmo híbrido que combine un algoritmo que calcule una solución de (1), con un algoritmo que resuelva el problema de valores propios tanto estándar como generalizado.

Como se evidencia en la factorización (3), un punto clave en la solución del problema de los valores propios cuadrático es obtener una solución de la ecuación cuadrática matricial. Respecto a la solución numérica de esta ecuación, se destaca el método de *Newton* que ha tenido un papel central en la solución de problemas matriciales no lineales y, en particular, en la solución de la ecuación matricial. Su iteración básica para resolver (1), es la siguiente,

$$\begin{aligned} AS_k X_k + (AX_k + B)S_k &= -Q(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k, \end{aligned}$$

donde $AS_k X_k + (AX_k + B)S_k$ denota la derivada *Fréchet* de Q en X_k , en la dirección de S_k .

Observe que, en cada iteración, se debe resolver un caso particular de la ecuación $ASB + CSD = E$ conocida como la ecuación de *Silvester* generalizada [14] [11] para encontrar la matriz S_k . La forma usual de resolver este tipo de ecuación es a través de descomposición generalizada de *Schur* [13], la cual es muy costosa computacionalmente [11]. Esta versión del método de *Newton* para resolver (1), se conoce como el método de *Newton-Schur*.

Una alternativa que disminuye el costo computacional y el tiempo de ejecución del método de *Newton-Schur* fue presentada en [12] y consiste en un método *cuasi-Newton* cuya iteración básica es dada por

$$\begin{aligned} (2AX_k + B)S_k &= -Q(X_k) \\ X_{k+1} &= X_k + S_k. \end{aligned}$$

Una globalización de este algoritmo fue presentada recientemente en [15], en donde se demuestra que la estrategia de globalización usada no interfiere en la convergencia del algoritmo *cuasi-Newton*.

Teniendo en cuenta la factorización de la matriz $Q(\lambda)$ dada en (3) y motivados no solo por las numerosas aplicaciones del problema de valores propios cuadrático, sino por el buen desempeño del algoritmo *cuasi-Newton* global propuesto recientemente en [15] para encontrar solventes de la ecuación cuadrática matricial, se presenta en este artículo un algoritmo híbrido para resolver dicho problema y se presenta un estudio numérico detallado del mismo, en el cual se consideran doce problemas de aplicación que surgen en diferentes contextos de

la ingeniería.

Organizamos este artículo en la siguiente forma. En la Sección 2, se presenta el algoritmo híbrido para resolver la ecuación (1) y con el propósito de comparar su desempeño numérico, se presenta una versión híbrida del método de *Newton-Schur*. En la Sección 3, se hace una breve descripción de cada uno de los doce problemas de aplicación considerados. En la Sección 4, se analiza numéricamente el comportamiento del algoritmo propuesto. Finalmente, en la Sección 6, se presentan algunas conclusiones del trabajo realizado.

II. ALGORITMO HÍBRIDO

En esta sección, se presenta un algoritmo híbrido para resolver el problema de los valores propios cuadráticos, en el cual combina el algoritmo tipo *cuasi-Newton* globalizado propuesto en [15] para resolver la ecuación cuadrática matricial con un algoritmo de MATLAB que calcula valores propios. El algoritmo híbrido propuesto (**Algoritmo 1**), es el siguiente.

Algoritmo 1 *cuasi-Newton* híbrido para resolver el problema de los valores propios cuadrático.

Entrada: $A, B, C, X_0, \epsilon = 10^{-7}, \epsilon_1 = \sqrt{\epsilon}, N_{max} = 900$, y $k = 0$.

Salida: Matriz de aproximación a X_* .

1. **Mientras** $k \leq N_{max}, Res(X_k) \geq \epsilon$ **hacer**
 2. Resolver, para S_k , el sistema matricial:

$$(2AX_k + B)S_k = -Q(X_k).$$
 3. **Si** $Res(X_k) > \epsilon_1$ **entonces**
 4. $t = 1$,
 5. **Si no**
 6. Búsqueda lineal exacta: encontrar t tal que

$$\|Q(X_k + tS_k)\|_F^2 = \min_{p \in (0,2)} \|Q(X_k + pS_k)\|_F^2$$
 7. **Fin si**
 8. Actualizar $X_{k+1} = X_k + tS_k$ y $k = k + 1$.
 9. **Fin mientras**
 10. **Salida** X_*
 11. Defina $D = AX_* + B$ y encuentre los valores propios generalizados de D y A :

$$v_1 = eig(D, -A).$$
 12. Encuentre los valores propios de X_* :

$$v_2 = eig(X_*).$$
 13. **Salida** $v = (v_1, v_2)$.
-

Con el propósito de comparar el desempeño global de nuestra propuesta algorítmica, se implementa también el algoritmo global de *Newton-Schur* híbrido (**Algoritmo 2**) basado en la propuesta que hacen los autores en [11].

Algoritmo 2 *Newton-Schur* global híbrido para resolver el problema de los valores propios cuadrático.

Entrada: $A, B, C, X_0, \epsilon = 10^{-7}, \epsilon_1 = \sqrt{\epsilon}, N_{max} = 900$, y $k = 0$.

Salida: Matriz de aproximación a X_* .

1. **Mientras** $k \leq N_{max}$, $Res(X_k) \geq \epsilon$ **hacer**
2. Resolver, para S_k , el sistema matricial:

$$AS_kX_k + (AX_k + B)S_k = -Q(X_k).$$
3. **Si** $Res(X_k) > \epsilon_1$ **entonces**
4. $t = 1,$
5. **Si no**
6. Búsqueda lineal exacta: encontrar t tal que

$$\|Q(X_k + tS_k)\|_F^2 = \min_{p \in (0,2)} \|Q(X_k + pS_k)\|_F^2$$
7. **Fin si**
8. Actualizar $X_{k+1} = X_k + tS_k$ y $k = k + 1.$
9. **Fin mientras**
10. **Salida** X_*
11. Defina $D = AX_* + B$ y encuentre los valores propios generalizados de D y A :

$$v_1 = eig(D, -A).$$
12. Encuentre los valores propios de X_* :

$$v_2 = eig(X_*).$$
13. **Salida** $v = (v_1, v_2).$

III. APLICACIONES

Para el análisis comparativo del desempeño numérico del algoritmo propuesto, se consideran doce problemas de aplicación. Estos se describen brevemente a continuación.

A. P1: La Bicicleta

En [16], los autores presentan un estudio de auto estabilidad de una bicicleta y para ello, toman como referencia un modelo que consta de cuatro partes rígidas, lateralmente simétricas e idealmente articuladas: dos ruedas, un marco y un ensamblaje frontal para el cual, muestran que el modelo de ecuaciones linealizadas que describe el movimiento de esta clase de bicicleta puede escribirse como el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales,

$$M\ddot{q} + vC_1\dot{q} + [gK_0 + v^2K_2]q = f, \tag{4}$$

donde las componentes constantes de las matrices M , C_1 , K_0 y K_2 son definidas en términos de 25 parámetros de diseño [15]. M es una matriz de masa, simétrica, la cual da la energía cinética del sistema de la bicicleta, la matriz $C = vC_1$ es lineal en la velocidad de avance v y almacena los pares de torsión debido a las velocidades de dirección y de inclinación; la matriz de $K = gK_0 + v^2K_2$ es la suma de dos partes: una parte simétrica, gK_0 , independiente de la velocidad, proporcional a la aceleración gravitacional, y una parte no simétrica v^2K_2 , cuadrática en la velocidad de avance.

La ecuación diferencial homogénea asociada a (4) conduce a la correspondiente ecuación característica

$$Q(\lambda) = \lambda^2M + \lambda C + K = 0, \tag{5}$$

cuyas soluciones λ , los valores propios de $Q(\lambda)$, dan información sobre el tipo de movimiento. En efecto, valores propios con parte real positiva corresponden a movimientos

inestables; con parte real negativa, a movimientos estables asintóticamente y valores propios imaginarios corresponden a movimientos oscilatorios. En particular, las matrices M , C_1 , K_0 y K_2 son las siguientes,

$$M = \begin{bmatrix} 80.81722 & 2.31941332208709 \\ 2.31941332208709 & 0.29784188199686 \end{bmatrix},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 33.86641391492472 \\ 3.86641391492472 & 1.68540397397560 \end{bmatrix},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} -80.95 & -2.59951685249872 \\ -2.59951685249872 & -0.80329488458618 \end{bmatrix},$$

$$K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 76.59734589573222 \\ 0 & 2.65431523794604 \end{bmatrix}.$$

B. P2: Modelo Bilby

En [17], los autores presentan un modelo matemático para sistemas ecológicos que incorpora la variabilidad del ambiente en procesos de nacimiento y muerte, lo cual hace que dicho modelo sea apropiado para el estudio de la evolución de muchas poblaciones. Al incorporar una variable auxiliar, el modelo se convierte en uno de casi nacimiento y muerte.

El modelo *Bilby*, es un ejemplo del modelo descrito en el párrafo anterior, donde la población considerada está formada por pequeños marsupiales australianos conocidos como *bilbies*, los cuales son una especie en peligro de extinción. En el modelo se tiene en cuenta que los patrones de reproducción de los *bilbies* dependen de la calidad de las estaciones precedentes; una medida de esta calidad es la cantidad de lluvia que hubo durante esa estación; así, el modelo *bilby* incorpora una variable que se especifica, si una estación es de buena o de mala calidad.

Algunas de las propiedades cuadrática claves del modelo *bilby* son capturadas en la solución de la ecuación matricial (1) y el correspondiente polinomio cuadrática matricial, $Q(\lambda) = \lambda^2A + \lambda B + C$, con

$$A = \beta M(g, \mathbf{d})^T, \quad B = \beta M(g, \mathbf{e} - \mathbf{b} - \mathbf{d})^T - I_5, \\ C = \beta M(g, \mathbf{b})^T,$$

donde,

$$M(g, \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} gx_1 & (1-g)x_1 & 0 & 0 & 0 \\ gx_2 & 0 & (1-g)x_2 & 0 & 0 \\ gx_3 & 0 & 0 & (1-g)x_3 & 0 \\ gx_4 & 0 & 0 & 0 & (1-g)x_4 \\ gx_5 & 0 & 0 & 0 & (1-g)x_5 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.4 \\ 0.25 \\ 0.1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \\ 0.55 \\ 0.8 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad g = 0.2,$$

los vectores \mathbf{b} y \mathbf{d} son vectores de probabilidad y \mathbf{e} es un vector de unos.

C. P3: Viga Amortiguada [6]

En este problema se considera una viga delgada con soportes simples en ambos extremos, y amortiguada en el punto medio. La ecuación del movimiento que da el desplazamiento transversal de la viga es una ecuación diferencial en derivadas parciales, con condiciones de frontera, cuya discretización mediante el método de elementos finitos es un problema de valores propios cuadráticos, con

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C,$$

donde, la matriz de *masa resultante* A y la matriz de *rigidez* C son simétricas y definidas positivas, por construcción; en tanto que B es simétrica y semidefinida positiva. Esto implica que todos los valores propios de $Q(\lambda)$ pertenecen al semiplano izquierdo (cerrado) lo cual garantiza que el problema de la viga es estable (débilmente) [21].

Encontrar los valores propios de la matriz $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + (1 + \mu i)K$, donde $M > 0$, $K > 0$ (matrices definidas positivas) y $C = ce_n e_n^T \geq 0$ (matriz semidefinida positiva). En particular, $M = 100 \text{diag}(v)$, $K = 100I_n$ y $c = 3$.

D. P4: Polinomios hiperbólicos [18] [19]

En este problema se considera un polinomio matricial cuadrático $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, el cual es hiperbólico, es decir, las matrices A, B y C son hermitianas, A es definida positiva y, para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ se satisface,

$$(\mathbf{x}^H B \mathbf{x})^2 > 4(\mathbf{x}^H A \mathbf{x})(\mathbf{x}^H C \mathbf{x}).$$

Estos polinomios desempeñan un papel central en sistemas de vibración [7]. En [19] los autores generan polinomios de este tipo a partir de un conjunto de valores y vectores propios reales $(\lambda_k, \mathbf{v}_k)$, $k = 1: 2n$, para lo cual, definen las matrices,

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{2n}) = \text{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2), \quad \Lambda_1, \Lambda_2 \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

$$V = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{2n}] = [V_1, V_2], \quad V_1, V_2 \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

con $\lambda_{\min}(\Lambda_1) > \lambda_{\max}(\Lambda_2)$, V_1 no singular y $V_2 = V_1 U$, para alguna matriz ortogonal U . Con esta información se tiene que la matriz simétrica $Q(\lambda)$ es hiperbólica, donde

$$A = \Gamma^{-1}, \quad \Gamma = V_1 \Lambda_1 V_1^T - V_2 \Lambda_2 V_2^T,$$

$$B = -A(V_1 \Lambda_1^2 V_1^T - V_2 \Lambda_2^2 V_2^T)A,$$

$$C = -A(V_1 \Lambda_1^3 V_1^T - V_2 \Lambda_2^3 V_2^T)A + B \Gamma B,$$

y tiene valores y vectores propios $(\lambda_k, \mathbf{v}_k)$, $k = 1: 2n$.

En particular tomamos $n = 3$; los valores propios son $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 4$, $\lambda_4 = 8$, $\lambda_5 = -1$, $\lambda_6 = -2$; y los vectores propios asociados son

$$\mathbf{v}_1 = (1, 2, 1)^T, \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, -1)^T, \quad \mathbf{v}_3 = (1, -1, 1)^T,$$

$$\mathbf{v}_4 = (2, 1, 2)^T, \quad \mathbf{v}_5 = (1, 2, -2)^T, \quad \mathbf{v}_6 = (-1, 1, 1)^T.$$

E. P5: Tira de metal [20]

En este problema se considera un circuito de prueba que representa un circuito equivalente de onda completa para una tira de metal pequeña el cual, está discretizado en dos. El modelo matemático de este problema conduce a la siguiente ecuación diferencial con retardo (h),

$$\begin{cases} D_1 x'(t-h) + D_0 x'(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h), & t \geq 0, \\ x(t) = \varphi(t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

donde

$$A_0 = 100 \begin{bmatrix} -7 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 0 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = 100 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -0.5 & -0.5 & -1 \\ -0.5 & -1.5 & 0 \end{bmatrix},$$

$$D_1 = -\frac{1}{72} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_0 = I_3,$$

$$\varphi(t) = [\sin(t), \sin(2t), \sin(3t)]^T.$$

Las ecuaciones diferenciales de retardo ocurren en diferentes campos incluyendo teoría de circuitos. En efecto, circuitos que incluyen elementos de retardo han incrementado su importancia debido a que aumentan en el rendimiento del sistema electrónico respectivo. Una vez modelado el problema un aspecto clave es el estudio de la estabilidad del mismo. En dicho estudio usando el método propuesto en [21] [22] conduce a un problema de valores propios cuadráticos $Q(\lambda)\mathbf{u} = (\lambda^2 E + \lambda F + G)\mathbf{u} = 0$, con

$$E = (D_0 \otimes A_1) + (A_0 \otimes D_1), \quad G = (D_1 \otimes A_0) + (A_1 \otimes D_0),$$

$$F = (D_0 \otimes A_0) + (A_0 \otimes D_0) + (D_1 \otimes A_1) + (A_1 \otimes D_1).$$

F. P6: Cámara omnidireccional [23]

Una cámara omnidireccional es la que tiene un ángulo de visión mayor que 180 grados. Cámaras con tal ángulo de visión son ventajosas en aplicaciones como vigilancia, seguimiento, estructuras en movimiento y navegación; la tecnología de estas cámaras es muy usada en algunos campos como la robótica. Actualmente, a raíz de la aparición de nuevos sistemas de reproducción de realidad virtual se está introduciendo en el sector del entretenimiento audiovisual.

En [23] los autores proponen un modelo de cámara omnidireccional, el cual asigna un punto de la escena a su imagen digitalizada por una matriz de proyección en perspectiva. El número de parámetros en este modelo permite formular el proceso de calibración de la cámara omnidireccional como un problema de valores propios cuadrático con matriz $Q(\lambda) = \lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0$ de tamaño 9×9 , donde la matriz A_0 tiene una columna no nula, A_1 tiene 5 columnas no nulas y de rango 5, y A_2 es una matriz de rango completo,

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = I_9.$$

G. P7: Sistema de tiempo de retardo

Este problema surge del análisis de estabilidad de una ecuación parcial de retardo diferencial (PDDE) [21], [22]. Su discretización da lugar a un sistema de retardo de tiempo

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h_1) + A_2 x(t - h_2),$$

donde, $A_0 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es tridiagonal y $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n \times n}$ son diagonales con

$$(A_0)_{kj} = \begin{cases} \frac{-2(n+1)^2}{\pi^2} + a_0 + b_0 \sin\left(\frac{j\pi}{n+1}\right), & k = j, \\ (n+1)^2/\pi^2, & |k - j| = 1, \end{cases}$$

$$(A_1)_{jj} = a_1 + b_1 \frac{j\pi}{n+1} (1 - e^{-\pi(1-j/(n+1))}),$$

$$(A_2)_{jj} = a_2 + b_2 \frac{j\pi^2}{n+1} (1 - j/(n+1)).$$

Aquí, a_k y b_k son parámetros reales y $n \in \mathbb{N}$ es el número de puntos de cuadrícula interiores espaciados uniformemente en la discretización del PDDE. Preguntando por los retrasos $h_1; h_2$ tal que el sistema de retardo es estable conduce al problema de valor propio cuadrático $Q(\lambda)v = (\lambda^2 E + \lambda F + G)v = 0$ de dimensión $n^2 \times n^2$, donde

$$E = I_n \otimes A_2,$$

$$F = (I_n \otimes (A_0 + e^{-i\varphi_1} A_1)) + ((A_0 + e^{i\varphi_1} A_1) \otimes I_n),$$

$$G = A_2 \otimes I_n,$$

donde i es la unidad imaginaria y $\varphi_1 \in [-\pi, \pi]$ es un parámetro. Los valores tomados son:

$$n = 20, \quad a_0 = 2, \quad b_0 = 0.3, \quad a_1 = -2, \\ b_1 = 0.2, \quad a_2 = -2, \quad b_2 = -0.3, \quad \varphi_1 = -\pi/2.$$

H. P8: Planta de Energía nuclear [24]

En este problema, el comportamiento dinámico de una planta de energía nuclear simplificada en un sistema de 8 grados de libertad es descrito por un problema de valores propios cuadrático $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0$, donde la matriz de masa M y la matriz de amortiguamiento D son reales, simétricas y la matriz de rigidez K tiene la forma $K = (1 + \mu i)K_0$, con K_0 una matriz real simétrica. El parámetro μ describe la amortiguación histerética (cuando un elemento estructural es sometido a inversiones en el sentido de la carga aplicada debido a que el material del elemento se encuentra en rango inelástico o no lineal) del problema.

I. P9: Vía férrea soportada por traviesas [3]

En este problema se considera una modelo de vía férrea soportada elásticamente (por “traviesas”) en puntos espaciados uniformemente. El modelo admite mecanismos de amortiguación externos e internos. El largo del riel es mucho más grande que h , y las deformaciones elásticas del riel deben ser investigadas.

El modelo está formulado haciendo una discretización adecuada de un problema continuo comparable gobernado por una ecuación diferencial en derivadas parciales. En esta discretización se muestra que las oscilaciones de la vía férrea están descritas por los valores propios cuadrático cuya matriz $Q(\lambda)$ está dada por

$$Q(\lambda) = \lambda^2 I_n + \lambda(I_n + A^2) + (I_n + A + A^2),$$

donde A es una matriz circulante cuya primera fila es $[-2, 1, 0, \dots, 0, 1]$.

J. P10: Sistema masa-resorte amortiguador [10]

En este problema, se considera un sistema masa-resorte amortiguador [10], donde la masa i -ésima de peso m_i está conectada a su $(i + 1)$ vecino por un resorte y un amortiguador con constantes k_i y d_i , respectivamente. La masa i -ésima también está conectada a tierra por un resorte y un amortiguador con constantes k_i y τ_i , respectivamente (ver Fig. 1).

El estudio de la vibración de este sistema conduce al problema de valores propios cuadrático $Q(\lambda)x = (\lambda^2 M + \lambda C + K)x = 0$. Para una escogencia por defecto de los parámetros, las matrices M, C, K están dadas por,

$$M = I_n, \quad C = 10T, \quad K = 5T, \quad T = \begin{bmatrix} -3 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & -1 \\ & & & & 3 \end{bmatrix}.$$

K. P11: Oscilaciones de un ala de un avión en una corriente de aire [25] [7]

En este problema se considera un modelo del ala de un avión, la cual está colocada en un pequeño ángulo de incidencia con una corriente de aire. Los tres grados de libertad considerados son, la flexibilidad del ala, giro del ala y el movimiento del alerón relativo al del ala. Los modos de movimiento y las columnas modales, son las soluciones al problema de valores propios cuadrático $Q(\lambda)\mathbf{x} = (\lambda^2 A_2 + \lambda A_1 + A_0)\mathbf{x} = 0$. En el caso particular en el que la velocidad del viento es 12 pies por segundo, las matrices de coeficientes dinámicas son las siguientes.

$$A_2 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 17.6 & 0.128 & 2.89 \\ 0.128 & 0.00824 & 0.0413 \\ 2.89 & 0.0413 & 0.725 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 7.66 & 0.245 & 2.1 \\ 0.023 & 0.0104 & 0.0223 \\ 0.6 & 0.0756 & 0.658 \end{bmatrix},$$

$$A_0 = 10^{-3} \begin{bmatrix} 121 & 1.89 & 15.9 \\ 0 & 0.027 & 0.0145 \\ 11.9 & 0.364 & 15.5 \end{bmatrix}.$$

L. P12: Onda acústica bidimensional

Para entender y predecir el nivel de sonido en un sistema acústico es de gran importancia conocer los valores propios del sistema, conocidos en este contexto como frecuencias de respuesta. En particular, modificando estas frecuencias de respuesta se pueden evitar resonancias indeseables en una cavidad.

Dado un revestimiento es posible predecir las frecuencias de respuesta modelando el comportamiento del sistema por medio de la ecuación de la onda acústica armónica en el tiempo

$$-\Delta p - \left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2 p = 0,$$

para una presión acústica p en un dominio acotado con condiciones de frontera y de impedancia apropiadas [26]. En esta ecuación, f es la frecuencia, c es la velocidad del sonido en el medio y ζ es la impedancia, posiblemente compleja.

Los valores propios del sistema discretizado [27] pueden ser calculados para una impedancia dada resolviendo el problema de valores propios cuadrático

$$Q(\lambda)p = (\lambda^2 M + \lambda C + K)p = 0.$$

Los valores propios de $Q(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda C + K$ son las frecuencias de resonancia del sistema.

Sobre el dominio $[0,1] \times [0,1]$ con un tamaño de malla h y las matrices de coeficientes M , C , K de tamaño $n \times n$, con $n = h^{-1}(h^{-1} - 1)$ están definidas por,

$$M = -4\pi^2 h^2 I_{m-1} \otimes \left(I_m - \frac{1}{2} e_n e_n^T \right),$$

$$C = 2\pi i \frac{h}{\zeta} I_{m-1} \otimes (e_n e_n^T),$$

$$K = I_{m-1} \otimes D_m + T_{m-1} \left(-I_m + \frac{1}{2} e_n e_n^T \right),$$

donde \otimes denota el *producto Kronecker*, $m = h^{-1}$, ζ representa la impedancia y D_m y T_{m-1} son matrices definidas, respectivamente, por

$$D_m = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & \\ -1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 4 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$T_{m-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & \ddots & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & 1 & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m-1) \times (m-1)}.$$

IV. RESULTADOS

En esta sección, se presenta un análisis numérico comparativo del algoritmo híbrido propuesto comparado con el **Algoritmo 2**. Para ello, consideramos los doce problemas de aplicación descritos en la sección anterior.

Para los códigos de los algoritmos y de las funciones que definen los problemas usamos MATLAB; los experimentos numéricos se desarrollaron en un computador INTEL (R) Core (TM) i5-3450 de 2.8 GHz.

La Tabla I, contiene los problemas considerados, su tamaño y las matrices iniciales (aleatorias), en cada caso.

TABLA I
PROBLEMAS: TAMAÑO Y MATRICES INICIALES

Problema	Tamaño	Matrices Iniciales
P1: Bicicleta	2	$10 (rand)I_n$
P2: Modelo Bilby	5	$-10^2 (rand)I_n$
P3: Viga Amortiguada	100	$10 (rand)iI_n$
P4: Polinomios hiperbólicos	3	$10 (rand)iI_n$
P5: Tira de Metal	9	$(rand)iI_n$
P6: Cámara omnidireccional	20	$10^2 (rand)iI_n$
P7: Sistema de tiempo de retardo	4	$10^{20}(rand)iI_n$
P8: Planta de Energía nuclear	10	$10^2 (rand)iI_n$
P9: Vía férrea soportada por traviesas	20	$10^2 (rand)I_n$
P10: Sistema masa-resorte amortiguador	100	$10^2 (rand)I_n$
P11: Oscilaciones de un ala en una corriente de aire	3	$-10^{-10} (rand)iI_n$
P12: Onda acústica bidimensional	6	$-10^{10} (rand)I_n$

En esta Tabla, i representa $\sqrt{-1}$ y $rand$ es un número aleatorio entre 0 y 1.

Para efectos de la comparación numérica se procedió a realizar 100 pruebas numéricas para cada algoritmo con la misma matriz inicial; se encontró el número de iteraciones, se promedió el tiempo computacional obtenido y el número de éxitos con cada algoritmo.

La Fig. 1, muestra el tiempo de ejecución de cada algoritmo para cada problema considerado. Se observa que en todos los casos el algoritmo híbrido propuesto (Algoritmo 1) tiene un menor costo computacional con respecto al método *Newton-Schur* híbrido (Algoritmo 2). En particular para los problemas P1 y P2 el comportamiento es casi similar, pero podemos apreciar un excelente comportamiento del Algoritmo 1, en los demás casos, en particular, para los problemas P3 y P10.

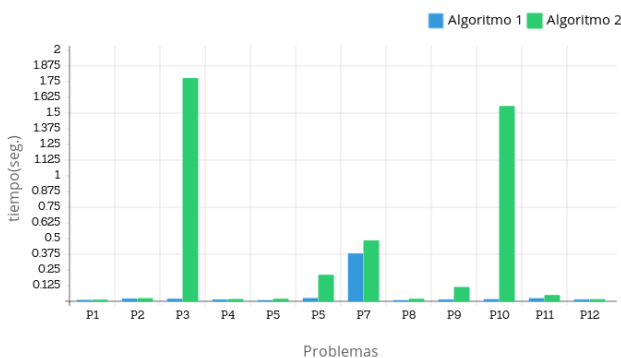


Fig. 1: Tiempo de ejecución para cada uno de los Problemas.

La Fig. 2, ilustra el comportamiento de los dos algoritmos respecto al número de iteraciones.

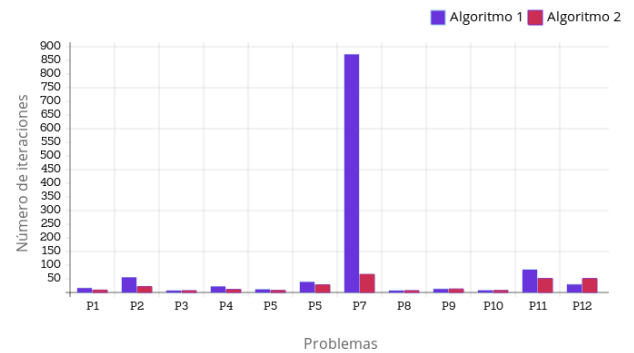


Fig 2: Gráfico del número de iteraciones para cada uno de los Problemas.

En general, se puede apreciar que el Algoritmo 2 tiene un mejor comportamiento que el Algoritmo 1, en cuanto al número de iteraciones se refiere. Vale la pena mencionar que, para el problema P7 el número de iteraciones con el Algoritmo 1 es muy alto comparado con el Algoritmo 2, pero su costo computacional es menor (ver Fig. 1).

La Fig. 3 relaciona el porcentaje de éxitos para cada problema.

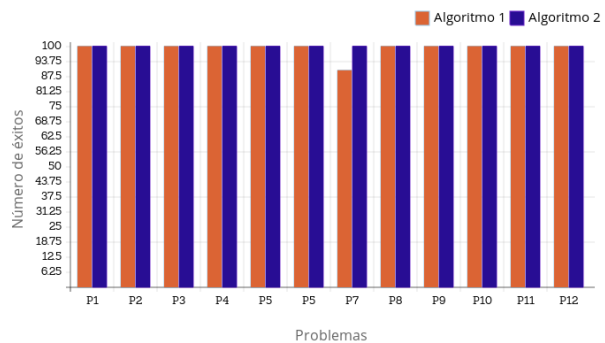


Fig 3: Gráfico de éxitos en el desempeño para cada uno de los Problemas.

Este gráfico permite apreciar el buen comportamiento de los dos algoritmos, ya que el nivel de éxito fue prácticamente del 100%.

Finalmente, se presentan las gráficas de la ubicación, en el plano complejo, de los valores propios obtenidos por el algoritmo híbrido propuesto, para cada uno de los problemas.

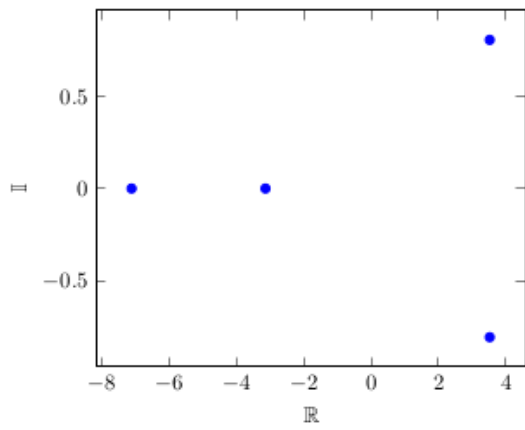


Fig 4: P1: Bicicleta, n= 2, it=15

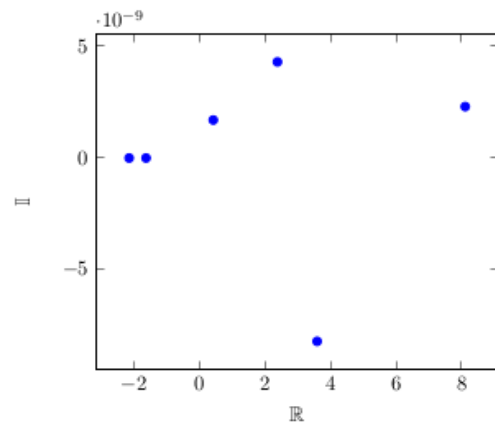


Fig 7: P4: Polinomios hiperbólicos, n= 3, it=5

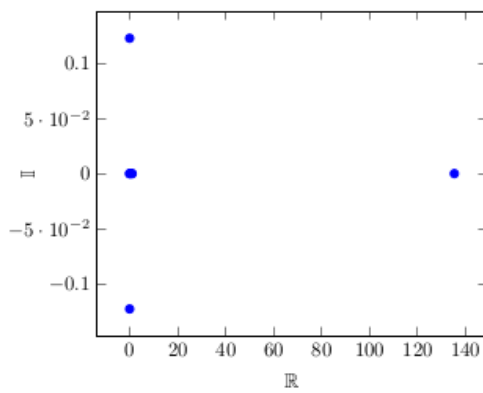


Fig 5: P2: Bilby, n= 5, it=53

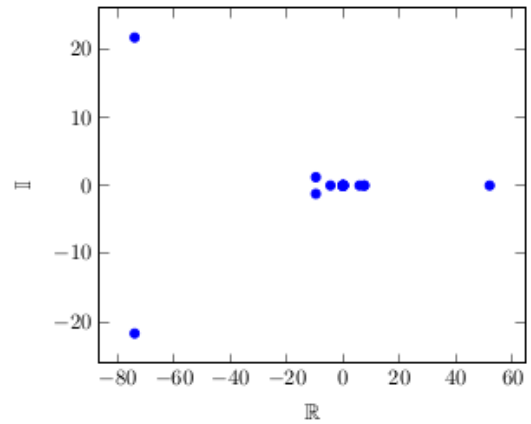


Fig 8: P5: Tira de metal, n= 9, it=9

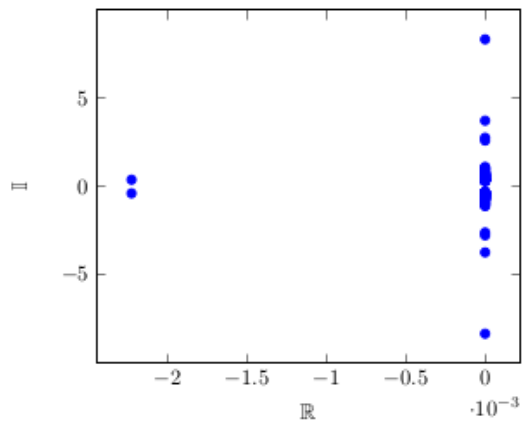


Fig 6: P3: Viga amortiguada, n= 100, it=5

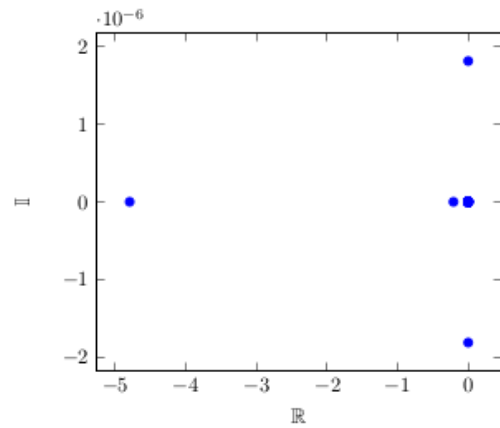


Fig 9: P6: Cámara omnidireccional, n= 9, it= 9

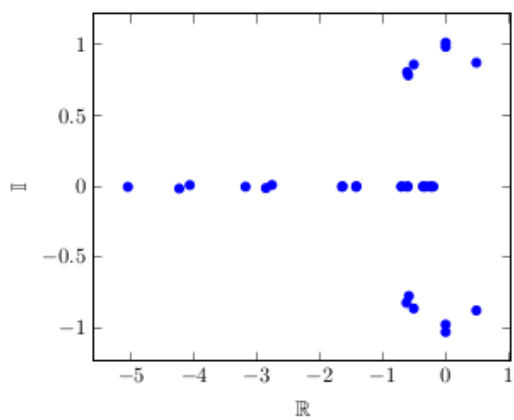


Fig 10: P7: Sistema de tiempo de retardo, n= 20, it=698

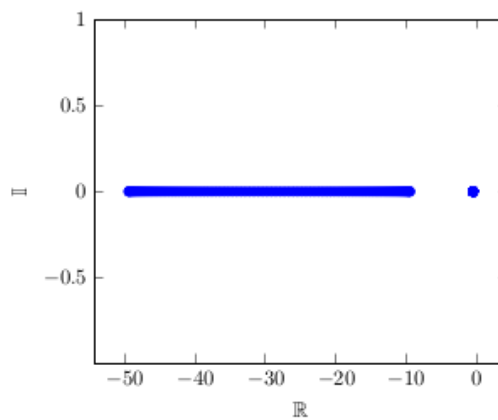


Fig 13: P10: Sistema masa-resorte amortiguador, n= 100, it=6

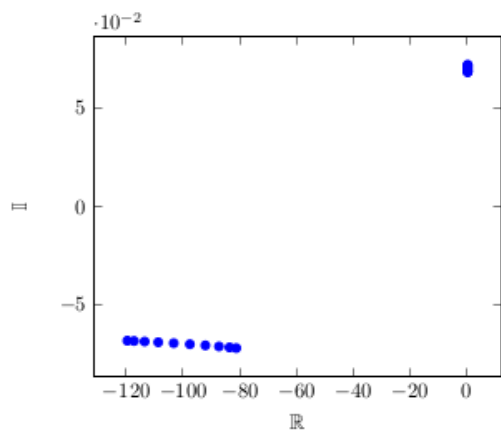


Fig 11: P8: Planta de energía nuclear, n= 10, it=4

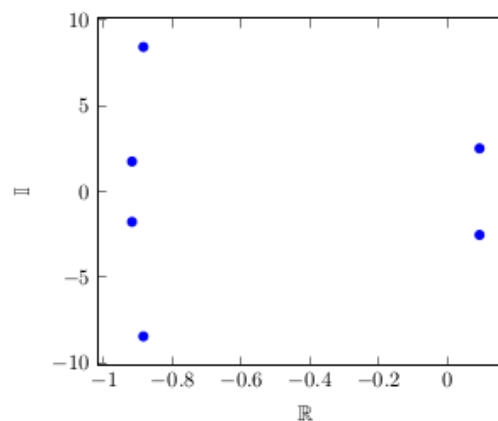


Fig 14: P11: Oscilaciones de un Ala en una corriente de aire, n= 3, it=82

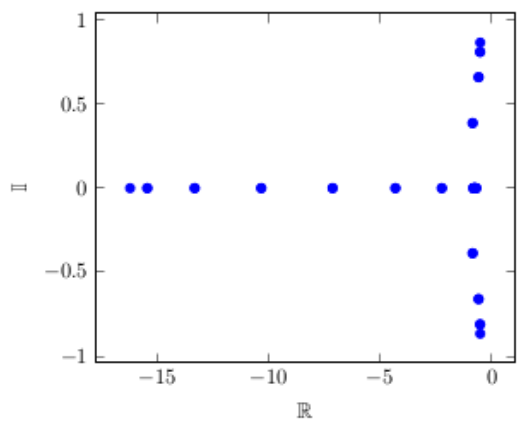


Fig 12: P9: Vía Férrea soportada por traviesas, n= 20, it=13

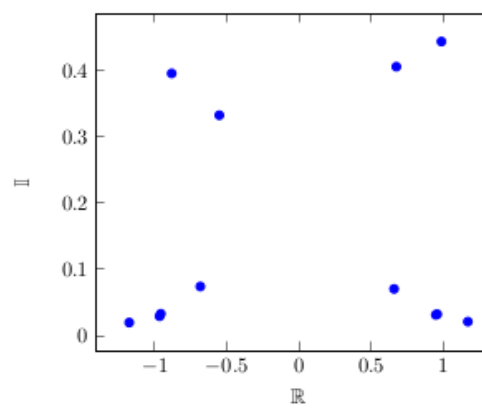


Fig 15: P12: Onda acústica bidimensional, n= 6, it=33

V. CONCLUSIONES

Dadas las numerosas aplicaciones en las que surge el problema de los valores propios cuadrático y la necesidad de disponer de algoritmos eficientes que lo resuelvan, presentamos un nuevo algoritmo para su solución. Este es un algoritmo híbrido que combina un algoritmo para el cálculo de soluciones de la ecuación cuadrática matricial con un algoritmo tradicional para el cálculo de valores propios.

Las pruebas numéricas realizadas muestran que nuestra propuesta algorítmica es competitiva frente al tradicional método de *Newton-Schur* y más eficiente, haciendo de la propuesta híbrida una nueva herramienta computacional para resolver el problema de valores propios cuadrático.

REFERENCIAS

- [1] S Sang- Hyup, S Jong Hyun-Min, and K Hyun-Min, "Newton's method for solving a quadratic matrix equation with special coefficient matrices," *Honam Mathematical Journal*, vol. 35, no. 3, pp. 417-433, 2013, DOI: 10.1088/1742-6596/490/1/012001
- [2] N Zhou, J.V Clark, and K.S.J Pister, "Nodal simulation for MEMS design using SUGAR v0.5," *Santa Clara CA April*, pp. 6-8, 1998.
- [3] P Lancaster and P Rózsa, "The spectrum and stability of a vibrating rail supported by sleepers," *Computers & Mathematics with Applications*, vol. 31, no. 4, pp. 201-213, 1996, DOI: 10.1016/0898-1221(95)00233-2.
- [4] H.A Smith, R.K Singh, and D.C Sorensen, "Formulation and solution of the nonlinear, damped eigenvalue problem for skeletal systems," *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, vol. 38, no. 18, 1995, DOI: 10.1002/nme.1620381805.
- [5] F Tisseur and N.J Higham, "Structured Pseudospectra for Polynomial Eigenvalue Problems, with Applications," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, vol. 23, no. 1, pp. 187-208, 2001, DOI: 10.1137/S0895479800371451.
- [6] N.J Higham, D.S Mackey, F Tisseur, and S.D Garvey, "Scaling, sensitivity and stability in the numerical solution of quadratic eigenvalue problems," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 73, no. 3, pp. 344-360, 2008, DOI: 10.1002/nme.2076.
- [7] P. Lancaster, *Lambda-Matrices and Vibrating Systems*. Oxford-New York-Paris: Pergamon Press, 1966.
- [8] M Berhanu, *The polynomial eigenvalue problem.: The University of Manchester*, 2005, <http://www.ma.man.ac.uk/~ftisseur/phd/mberhanu05.pdf>.
- [9] J.E. Jr Dennis, J.F Traub, and R.P Weber, "The algebraic theory of matrix polynomials," *SIAM*, vol. 15, pp. 832-845, 1976, <https://www.jstor.org/stable/2156446>.
- [10] F Tisseur and K Meerbergen, "The quadratic eigenvalue problem," *SIAM Review*, vol. 43, no. 2, pp. 235-286, 2001, DOI: 10.1137/S0036144500381988.
- [11] N. J. Higham and H. Kim, "Solving a quadratic matrix equation by Newton's methods with exact line searches," *SIAM J. Anal. Appl.*, vol. 23, no. 2, pp. 303-316, 2001.
- [12] E.M Macías, H.J Martínez, and R Pérez, "Un algoritmo cuasi-Newton para resolver la ecuación cuadrática matricial," *Revista Integración, temas de matemáticas*, vol. 34, no. 2, pp. 187-206, 2016, DOI: 10.18273/revint.v34n2-2016006.
- [13] H.G Golub and C.F Van Loan, *Matrix Computations*. Baltimore, MD: The Johns Hopkins University Press, 1996.
- [14] S. Nash, C. Van Loan, and H.G Golub, "A Hessenberg-Schur methods for the problem $AX + XB = C$," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 24, no. 6, pp. 909-913, 1980.
- [15] E. M. Macías, H. J. Martínez, and R. Pérez, "Un algoritmo tipo Newton globalizado para resolver la ecuación cuadrática Matricial," *Integración: temas de matemáticas*, vol. 36, no. 2, 2018, Aceptada, pendiente de publicación.
- [16] J. P. Meijaard, J.M Papadopoulos, and A.L.S Ruina, "Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review," *The Royal Society*, vol. 463, no. 2084, pp. 1955-1982, 2007, DOI: 10.1098/rspa.2007.1857.
- [17] N.G Bean, L Bright, G Latouche, and C.E.M Pearc, "The quasi-stationary behavior of quasi-birth-and-death processes," *The Annals of Applied Probability*, vol. 7, no. 1, pp. 134-155, 1997, <https://www.jstor.org/stable/2245136>.
- [18] M Al-Ammari and F Tisseur, "Hermitian matrix polynomials with real eigenvalues of definite type. Part I: Classification," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 436, no. 10, pp. 3954 - 3973, 2012, DOI: 10.1016/j.laa.2010.08.035.
- [19] C.H Guo, N.J Higham, and F Tisseur, "Detecting and solving hyperbolic quadratic eigenvalue problems," *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, vol. 30, no. 4, pp. 1593-1613, 2009, DOI: 10.1137/070704058.
- [20] A. Bellen, N. Guglielmi, and A.E Ruehli, "Methods for linear systems of circuit delay differential equations of neutral type," *IEEE Trans. Circuits and Systems—I: Fundamental Theory and Applications*, vol. 46, no. 1, pp. 212-216, 1999.
- [21] H Fassbender, N Mackey, D.S Mackey, and C Schroder, "Structured polynomial eigenproblems related to time-delay systems," *Electronic Transactions on Numerical Analysis.*, vol. 31, pp. 306-330, 2008.
- [22] E. Jarlebring, *The spectrum of delay-differential equations: numerical methods, stability and perturbation*. Braunschweig, Germany: Institut Computational Mathematics, Carl-Friedrich-Gauss-Fakult at, 2008, <http://www.digibib.tu-bs.de/?docid=00023961>.
- [23] B Micusik and T Pajdla, "Estimation of omnidirectional camera model from epipolar geometry," *2003 IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition*, 2003. *Proceedings*, vol. 1, p. 1, 2003, DOI: 10.1109/CVPR.2003.1211393.
- [24] T. Itoh, "Damped vibration mode superposition method for dynamic response analysis," *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, vol. 2, no. 1, pp. 47-57, 1973, DOI: 10.1002/eqe.4290020105.
- [25] R.A Frazer, W.J Duncan, and A.R Collar, *Elementary Matrices and Some Applications to Dynamics and Differential Equations.*: Cambridge University Press, 1963.
- [26] F Chaitin-Chatelin and M.B Van Gijzen, "Analysis of parameterized quadratic eigenvalue problems in computational acoustics with homotopic deviation theory," *Numerical Linear Algebra with Applications*, vol. 13, no. 6, pp. 487-512, 2006, DOI: 10.1002/nla.484.
- [27] I. Harari, K Grosh, T.J.R Hughes, and M Malhotra, "Recent developments in finite element methods for structural acoustics," *Archives of Computational Methods in Engineering*, vol. 3, no. 2, pp. 131--309, 1996, DOI: 10.1007/BF03041209.
- [28] F. Perotti, V. Simoncini A. Feriani, "Iterative system solvers for the frequency analysis of linear mechanical systems," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 190, no. 13, pp. 1719 - 1739, 2000, DOI: 10.1016/S0045-7825(00)00187-0.
- [29] F. Tisseur, "Backward error and condition of polynomial eigenvalue problems," *Linear Algebra and its Applications*, vol. 309, no. 1, pp. 339-361, Apr. 2000, DOI: 10.1016/S0024-3795(99)00063-4.
- [30] A.J. Laub, C. Willems S. Bittani, *The Riccati equation*. Berlin: Springer Berlin Heidelberg, 1991, DOI: 10.1007/978-3-642-58223-3.

- [31] C. Johnson, H. Wolkowicz G. Butler, "Nonnegative Solutions of a Quadratic Matrix Equation Arising from Comparison Theorems in Ordinary Differential Equations," *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, vol. 6, no. 1, pp. 47-53, 1985, DOI: 10.1137/0606005.
- [32] H.J. Martínez, R. Perez E.M. Macías, "Sobre la convergencia de un método secante para ecuaciones matriciales no lineales," *Revista Integración, temas de matemáticas*, vol. 32, no. 2, pp. 181-197, 2014.
- [33] W.T. Thomson, *Teoría de vibraciones con aplicaciones*, 4th ed.: CRC Press, 1996.



Rosana Pérez Mera. Profesora Titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca, integrante y coordinadora del Grupo de Investigación OPTIMIZACIÓN. Licenciada en matemáticas de la Universidad del Cauca; Magíster en Matemáticas de la Universidad del Valle; Doctora en Matemática Aplicada de la Universidad de Campinas, SP, Brasil. Ha sido coordinadora de la Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Cauca. Ha coordinado proyectos de investigación en optimización, álgebra lineal numérica y redes neuronales, y ha dirigido trabajos de grado a nivel de pregrado y maestría.
ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0279-8522>



Eduard Mauricio Macías Caicedo. El autor recibió el título Licenciado en Matemáticas en el año 2000, es Especialista en Matemática Aplicada 2001, Magíster en Ciencias Matemáticas 2013 y actualmente estudiante de Doctorado en Ciencias Matemáticas en la Universidad del Cauca. Pertenece al grupo de Optimización, grupo

de investigación de la Universidad del Cauca. Sus áreas de interés son el Análisis Numérico, la Optimización Matemática y el Álgebra Lineal Numérica.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9971-5318>



Favián Enrique Arenas Aparicio.

Profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Cauca y miembro del grupo de Optimización de la Universidad del Cauca, Licenciado en Matemáticas de La Universidad de Sucre, Especialista en Matemáticas de la Universidad de Córdoba y Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Cauca, ha trabajado en el grupo interesado en los temas: sistemas de ecuaciones no lineales y el problema de complementariedad no Lineal.

ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7781-7559>