MÉTODOS VARIACIONALES PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE ELASTICIDAD

Variational principles for the solution of elasticity problems.

RESUMEN

En este trabajo se determina la condición para hallar los puntos de bifurcación del proceso de deformación y la forma de perdida de estabilidad utilizando el principio variacional.

PALABRAS CLAVES: Deformación, estabilidad, puntos de bifurcación, tensor de Piola-Kirchoff.

ABSTRACT

In this work the condition to find the bifurcations points and the form of loss stability using the variational principle are obtained.

KEYWORDS: Bifurcations points, deformation, Piola-Kirchoff's tensor, stability.

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

FERNANDO MESA
M.Sc Instrumentacion Fisica
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. Introducción

Las dificultades en la solución de problemas de estabilidad radican no solamente en la geometría y la no linealidad, sino también en la falta de información acerca de la configuración actual. A diferencia con los problemas geométricos no lineales la configuración actual no se puede considerar igual a la configuración inicial, ya que tal suposición puede llevar a resultados cualitativamente equivocados. Es por esto, como se hace en [1], que en los problemas no lineales de cuerpos deformables se utiliza en gran manera el planteamiento de problemas en velocidades, en los cuales las ecuaciones de equilibrio, las condiciones

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.

Fecha de Aceptación: 12 de Octubre de 2009

en la frontera y otras relaciones, se formulan en términos de las velocidades del cambio escalar y parámetros

1. Planteamiento del problema

Examinemos un cuerpo elástico-plástico arbitrario, que ocupa en la configuración inicial la región V_o, con su frontera S_o. Supondremos que en la parte de la frontera S_T es dado el vector de los esfuerzos superficiales $P = P_i g^j = P^i g_j$, sobre la demás parte de la superficie S_U son conocidos los traslados de los puntos de la frontera $u = u_i g^j = u^i g_j$. Supongamos además que las fuerzas de las masas son cero y que los esfuerzos superficiales están "quietos". Es necesario determinar en cualquier momento t el estado de tensión-deformado del cuerpo analizado.

2. Criterio de unicidad, principio variacional

Analicemos un caso particular y muy utilizado, cuando se dan pequeñas deformaciones, es decir, cuando los componentes del tensor gradiente de los desplazamientos son pequeños en comparación con la unidad. Al mismo tiempo, para determinar las dependencias entre los diferentes tensores que describe el estado de tensión del cuerpo analizado, la configuración actual se sustituye por la inicial.

Las ecuaciones para los componentes de los diferentes tensores de tensión bajo estas condiciones se satisfacen. Pero como se discute en [2], para determinar la dependencia entre los diferentes tipos de velocidades de cambio de los tensores, es necesario hacer una diferenciación con respecto al parámetro temporal, y luego despreciar los componentes del tensor gradiente de desplazamiento. La expresiones para los diferentes componentes de la rata de cambio del tensor de Piola-tensoriales, que describen el comportamiento del objeto analizado

Kirchhoff, teniendo en cuenta lo anteriormente dicho, toman la forma

$$\dot{\Pi}^{ij} = \dot{\tau}^{ij} + \tau^{ik}\dot{u}^{j}_{,k}$$

Teniendo en cuenta que

$$\overset{\nabla}{\sigma}{}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + G^{jk}\sigma^{il}\dot{\eta}_{kl} + G^{ik}\sigma^{jl}\dot{\eta}_{kl}\ ,$$

$$T = T^{ij}G_iG_j = T_{ij}G^iG^j\ ,$$

ésta última ecuación se escribe como

$$\dot{\Pi}^{ij} = \overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} - \tau^{il}\dot{\varepsilon}_{jl} - \tau^{jl}\dot{\varepsilon}_{il} + \tau^{ik}\dot{u}^{j}_{,k}\ .$$

Anteriormente, dicha expresión se obtuvo en los trabajos [2] y ampliamente se ha utilizado en la solución de los problemas de estabilidad de sistemas deformables.

Las ecuaciones de equilibrio en velocidades y las condiciones correspondientes de frontera se formulan con el uso el primer tensor de Piola-Kirchoff. Las ecuaciones de equilibrio en términos de los componentes del primer tensor de Piola-Kirchoff, tienen el aspecto:

$$\frac{\partial \dot{\Pi}^{ij}}{\partial x_j} = 0\ . \qquad (1)$$

De igual manera se escriben las condiciones en la frontera en términos de las velocidades

$$N_i\dot{\Pi}^{ij} = \dot{P}^{i}\ , \text{ sobre } S_T\ , \qquad (2)$$

$$\dot{u}^{i} = \dot{u}^{i} \text{ sobre } S_u\ , \qquad (3)$$

Fecha de Recepción: 15 de Septiembre de 2009.

Fecha de Aceptación: 12 de Octubre de 2009

donde $N = N_i g^i = N^i g_i$ es la normal exterior a la superficie del cuerpo en la configuración inicial.

Las relaciones constitutivas se formulan teniendo en cuenta la derivadas en la forma de Jaumannu a través de los tensores de tensión de Kirchoff. En el caso general las relaciones diferenciales nolineales se representan de la siguiente manera

$$\overset{\nabla}{\tau}^{ij} = L_{ijpq}\dot{\eta}_{pq}\,. \tag{4}$$

Para la formulación de la solución general (o el correspondiente principio variacional) es necesario las ecuaciones del equilibrio, las condiciones en la frontera y las relacionas constitutivas representarlas en términos de un único tensor, esto es posible utilizando [1]:

El problema antes formulado puede no tener solución única [2, 9]. Supongamos que existe t_c, tal que la solución del problema (1) - (6) es única, donde $t < t_c$ es un parámetro monótonamente creciente que caracteriza el proceso de carga de los cuerpos. Denominemos a esta solución la “básica” y todo lo relacionado con esta solución lo designamos por el índice “a”. Supongamos que en un determinado momento $t = t_c$ además de la solución básica $\dot{u}_a$ existe por lo menos otra solución $\dot{u}_b$. Introduciremos al análisis las diferencias $\Delta v = \dot{u}_a - \dot{u}_b$, $\Delta\Pi = \dot{\Pi}_a - \dot{\Pi}_b$, etc. Utilizando las transformaciones usuales llegamos a la siguiente condición de unicidad

$$I_\sigma\left(\dot{u}_a, \dot{u}_b\right) = \int_{V_0} \Delta\Pi^{ij}\Delta v_{j,i}\; dV > 0 \tag{5}$$

Introduciendo la llamada medida de Jaumann y teniendo en cuenta que $\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\eta}_{ij}$ se tiene:

$$\overset{\nabla}{\sigma}^{ij} = \dot{\sigma}^{ij} + G^{jk}\sigma^{il}\dot{\eta}_{kl} + G^{ik}\sigma^{jl}\dot{\eta}_{kl}\,. \tag{0.1}$$

De ésta última y lo anteriormente mencionado, obtenemos

$$I_\sigma\left(\dot{u}_a, \dot{u}_b\right) = \int_{V_0} \Delta\overset{\nabla}{\tau}^{ij}\;\Delta\eta_{ij}\; dV$$
$$-\int_{V_0}\left(G^{jk}\tau_a^{il}\Delta\eta_{kl} + G^{ik}\tau_a^{jl}\Delta\eta_{kl}\right)\Delta\eta_{ij}\; dV$$
$$+\int_{V_0}\tau_a^{ij}\Delta v^k_{,i}\Delta v_{k,j}\; dV > 0\,. \tag{6}$$

o de la forma

$$I_\sigma\left(\dot{u}_a, \dot{u}_b\right) \equiv \int_{V_0} \Delta\overset{\Delta}{\tau}^{ij}\;\Delta\eta_{ij} dV$$
$$-\int_{V_0} R^{ijkl}\Delta\dot{u}_{i,j}\Delta\dot{u}_{k,l} dV > 0 \tag{7}$$

los componentes de la matriz R^{ijkl} se calculan de la siguiente manera:

$$R^{ijkl} = \left(G^{ad}\tau^{bc} + G^{ac}\tau^{bd}\right)\left(\delta_i^a\delta_j^b + \delta_j^a\delta_i^b + u^{i}_{,a}\delta_j^b + u^{i}_{,b}\delta_j^a\right)$$
$$\times\left(\delta_i^c\delta_j^d + \delta_j^c\delta_i^d + u^{i}_{,c}\delta_j^d + u^{i}_{,d}\delta_j^c\right) + \tau^{jl}g^{ik} \tag{7}$$

Es de notar, que debido a la no linealidad del problema, la función $\Delta W = \Delta\overset{\Delta}{\tau}^{ij}\,\eta_{ij}$ depende de los dos campos de velocidades, y por lo tanto el funcional $I\left(\dot{u}_a, \dot{u}_b\right)$ no estará dado en cuadraturas. Esta circunstancia limita esencialmente la posibilidad utilizar las condiciones (7) para investigar la bifurcación del proceso de deformación. Sin embargo, para una serie variantes de la teoría de plasticidad es posible sustituir la condición (9) por otra condición más fuerte, basándose en el concepto de linearización "cuerpo de comparación". "Los cuerpos de comparación" poseen la propiedad que las ecuaciones son lineales en sus velocidades, es decir, para cualquier $\dot{\eta}^a$ y $\dot{\eta}^b$ tiene lugar la siguiente desigualdad

$$\Delta W \ge \Delta W_L \equiv D^{ijpq}\Delta\eta_{ij}\Delta\eta_{pq}\,. \tag{8}$$

Para el cálculo de la matriz D^{ijpq} es necesario utilizar [1] e integrando en la región Ω_o, siendo Ω_o las direcciones de la microdeformación activa en el momento donde ocurre la bifurcación. En este caso, es sencillo mostrar que la unicidad se cumple si se lineariza el cuerpo de comparación de Euler, es decir tiene lugar la siguiente desigualdad:

$$H(\Delta v) \equiv \int_{V_o} D^{ijpq} \Delta\dot{\eta}_{ij} \Delta\dot{\eta}_{pq} dV,$$
$$-\int_{V_o} R^{ijkl} \Delta\dot{u}_{i,j} \Delta\dot{u}_{k,l} dV > 0, \qquad (9)$$

de esta forma, el problema para hallar los puntos de bifurcación del proceso de deformación y la forma de perdida de estabilidad conllevó a encontrar los valores y funciones propias del problema autoconjugado para el sistema de las ecuaciones lineales:

$$\Delta\dot{T}^{ij}_{,j} = 0, \qquad (10)$$

$$\Delta\dot{\eta}^{ij} = \frac{1}{2}\left(\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i} + \dot{u}_{k,i}\dot{u}^{k}_{,j} + \dot{u}_{k,j}\dot{u}^{k}_{,i}\right), \qquad (11)$$

$$\overset{\Delta}{\tau}{}^{ij} = D^{ijpq}\Delta\eta_{pq}, \qquad (12)$$

teniendo en cuenta las siguientes condiciones en la frontera

$$N_i \Delta\dot{T}^{ij} = 0, \text{ sobre } S_T,$$

$$\Delta v_j = 0, \text{ sobre } S_U. \qquad (14)$$

Siguiendo [9] se tiene que la condición estacionaria del funcional $H(\Delta v)$ dado en el campo de velocidades está dado por las ecuaciones (10) y las condiciones en la frontera (12). Así, para determinar el parámetro crítico temporal t_c y la forma de la pérdida de estabilidad $\dot{v}$ se puede utilizar la siguiente condición (principio variacional):

$$\delta H = 0. \qquad (14)$$

3. Conclusión

Para hallar la bifurcación del proceso de deformación se utilizan los sistemas (10) - (13) o el principio variacional (14).

4. BIBLIOGRAFÍA

1. Gonzalez J.R. Stability and Postbifurcation Behavior of Shells under Combined Loading. GAMM2001. Zurich, 2001. P. 44.

2. Grigoluk E.I. Estabilidad de envolturas no-homogeneas. .Dokl. A.C URSS. -1958.-119, №.4.-Pp. 663-666.

3. Ilushin A.A. Plasticidad. M., 1948. 876 p.

4. Kadashevish Yu. A., Novozhilov V.V. Chernyakov. Yu.A. Teoria de plasticidad y eleasticidad utilizando la microdeformacion // PMM. 1986. T.50, №6. p.890-897.

5. Lure A.I. Teoria de elasticidad no lineal. M.: Nauka, 1980. 512 p.

6. Novozhilov V.V., Kadashevish Yu. A., Chernyakov. Yu.A. Teria general de plasticidad que tiene en cuenta la microdeformación. Dokl. AN USSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823.

7. Vavakin A.S., Vasin R.A. El comportamiento elástico-plástico del acero ST 45en trayectorias en forma de elice de deformación. Plasticidad y destrucción de cuerpos duros. M 1988. P.21-29.

8. Zelenskiy A.G., Shvayko N. Yu. Influencia de la historia de carga en la bifurcación del proceso de deformación de envolturas cilindricas. Dokl. A.C URSS. Ser.A. 1978. T 1. Pp. 38-43.

9. Leonov M. Ya, Shvayko N. Yu. Deformación plana compleja. Dokl, AN. 1964. T. 159, Pp1007-1010.