

ALGUNOS RESULTADOS DE OPERADORES LINEALES CONTINUOS

Some results of lineal continue operators

RESUMEN

En este artículo se presentan dos resultados interesantes de operadores continuos en un espacio de Hilbert.

PALABRAS CLAVES: Espacio de Hilbert y Operador continuo.

ABSTRACT

In this article presents two interesting results of continuos operators in a space of Hilbert.

KEYWORDS: Space of Hilbert and continuos Operator

EDGAR ALIRIO VALENCIA

Profesor Auxiliar, Magíster en
Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

FERNANDO MESA

Profesor Titular, Magister en
Instrumentación Física
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

PEDRO PABLO CÁRDENAS
ALZATE

Profesor Asistente, Magíster en
Enseñanza de las Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Dado un espacio de Hilbert, siempre podemos encontrar una base ortonormal, teniendo en cuenta este resultado del análisis funcional y conociendo algunas condiciones que cumplen ciertos operadores lineales vamos a demostrar en este artículo, la continuidad de dichos operadores.

Ahora, uno de los espacios de Hilbert más estudiados en el análisis, es $L^2(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ donde $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ es un espacio de medida (terna compuesta por un espacio muestral, una sigma algebra del espacio muestral y una medida) ver definición en [1]. $L^2(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ se conoce como el conjunto de todas las funciones cuadrado integrables, es decir,

$$L^2(\Omega, \mathfrak{S}, \mu) = \left\{ f : \int_{\Omega} |f|^2 d\mu < \infty \right\}. \quad (1)$$

La norma que utilizaremos en este espacio es :

$$\|f\| = \left(\int_{\Omega} |f|^2 d\mu \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2)$$

En este contexto, demostraremos que bajo ciertas condiciones que cumple un operador lineal, este operador es continuo.

Este artículo consiste básicamente en demostrar los dos resultados mencionados anteriormente.

Definición 1 Un operador lineal es, simplemente, una aplicación lineal de un espacio vectorial en otro, lógicamente ambos sobre el mismo cuerpo k . Para ver más detalles ver [2] y [3]

La continuidad de un operador lineal entre espacios normados puede caracterizarse de varias maneras, entre las que destacamos la más apropiada para nuestros resultados posteriores.

Teorema 2 Sean X y Y dos espacios normados y $T : X \rightarrow Y$ un operador lineal. Entonces T es continuo si, y sólo si, existe una constante $M \geq 0$ tal que:

$$\|Tx\| \leq M\|x\| \text{ para todo } x \in X.$$

La demostración se puede ver en [4].

Teorema 3 Sean $(\Omega, \mathfrak{S}, \mu)$ un espacio de medida dotado de una medida μ y una función $\mu \oplus \mu$ -medible $k : \Omega \times \Omega \rightarrow C$ donde C es un campo. Suponga que existen constantes a y b tales que

$$\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(y) \leq a \text{ c.t.p.} \quad \text{y}$$

$$\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(x) \leq b \text{ c.t.p.}$$

Demuestre que el operador $f \rightarrow K(f)$ definido por $K(f)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)\mu(y)$ es un operador continuo de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$ y $\|K\| \leq (ab)^{1/2}$.

Demostración Sabemos que $L^2(\mu)$ es el conjunto de las funciones $f : \Omega \rightarrow C$ tales que

$$\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty, \text{ donde}$$

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Ahora si $k : \Omega \times \Omega \rightarrow C$ es una función $\mu \oplus \mu$ medible y existen constantes a y b tales que

$$\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(y) \leq a \text{ c.t.p.} \quad \text{y}$$

$$\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(x) \leq b \text{ c.t.p.}$$

entonces la función $|k(x, y)|^{1/2}$ es cuadrado integrable.

En efecto

$$\int_{\Omega} \left| |k(x, y)|^{1/2} \right|^2 d\mu(y) =$$

$$\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(y) \leq a \text{ c.t.p.} \quad (3).$$

Demostremos ahora que el operador $f \rightarrow K(f)$ donde

$$K(f)(x) = \int_{\Omega} k(x, y)f(y)\mu(y) \quad (4)$$

Es un operador continuo de $L^2(\mu)$ en $L^2(\mu)$ y

$$\|K\| \leq (ab)^{1/2}.$$

Demostremos que si f es cuadrado integrable entonces $K(f)$ es cuadrado integrable.

$$|K(f)(x)| \leq \int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)| d\mu(y) =$$

$$\int_{\Omega} |k(x, y)|^{1/2} |k(x, y)|^{1/2} |f(y)| d\mu(y). \quad (5)$$

Entonces por la desigualdad de Hölder ver [5] para integrales ($p = q = 2$) por ser $|k(x, y)|^{1/2}$ cuadrado integrable y $f \in L^2(\mu)$ tenemos que

$$|K(f)(x)| \leq$$

$$\left(\int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2}. \quad (6)$$

Luego

$$|K(f)(x)| \leq (a)^{1/2} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \text{ c.t.p.}$$

Entonces

$$|K(f)(x)|^2 \leq a \int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \text{ c.t.p.}$$

Ahora al integral con respecto a la variable x , obtenemos

$$\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(y) \right) d\mu(x)$$

y por el Teorema de Fubini, entonces

$$\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} |k(x, y)| |f(y)|^2 d\mu(x) \right) d\mu(y)$$

$$\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_{\Omega} \left(|f(y)|^2 \int_{\Omega} |k(x, y)| d\mu(x) \right) d\mu(y) \quad (7)$$

Por lo tanto

$$\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq a \int_{\Omega} \left(|f(y)|^2 b \right) d\mu(y) = ab \int_{\Omega} |f(y)|^2 d\mu(y),$$

Finalmente llegamos a que

$$\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \leq ab \|f\|_2^2, \quad (8)$$

Esta desigualdad demuestra que $K(f) \in L^2(\mu)$.

Ahora es inmediato que $K(f)$ es un operador continuo ya que

$$\|K(f)\|_2 = \left(\int_{\Omega} |K(f)(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2} \leq (ab)^{1/2} \|f\|_2. \quad (9)$$

Teorema 4 Sean E y G espacios de Hilbert, $(b_i)_{i \in T}$ una base ortonormal de E y $f : E \rightarrow G$ una función lineal tal que $\sum_i \|f(b_i)\| < \infty$. Entonces f es un operador continuo.

Demostración Si E espacios de Hilbert, y $(b_i)_{i \in T}$ una base ortonormal de E , entonces para todo $x \in E$

$$x = \sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle b_i = \lim_F \sum_{i \in F} \langle x, b_i \rangle b_i \quad \text{donde}$$

$$F \subseteq T \text{ y } \|x\| = \left(\sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle^2 \right)^{1/2}.$$

Si $f : E \rightarrow G$ lineal tal que $\sum_i \|f(b_i)\| < \infty$, entonces

$$f(x) = \sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle f(b_i), \text{ luego}$$

$$\|f(x)\| \leq \sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle \|f(b_i)\| \quad (10).$$

Sea F un subconjunto finito de T entonces por la desigualdad de Hölder, tenemos que

$$\sum_{i \in F} \langle x, b_i \rangle \|f(b_i)\| \leq \left(\sum_{i \in F} \langle x, b_i \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in F} \|f(b_i)\|^2 \right)^{1/2}$$

y como $\|f(b_i)\| \geq 0$ entonces

$$\sum_{i \in F} \|f(b_i)\|^2 \leq \left(\sum_{i \in F} \|f(b_i)\| \right)^2. \quad (11)$$

Luego

$$\sum_{i \in F} \langle x, b_i \rangle \|f(b_i)\| \leq \left(\sum_{i \in F} \langle x, b_i \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in F} \|f(b_i)\| \right)$$

Por consiguiente, aplicando límite a F ; obtenemos

$$\sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle \|f(b_i)\| \leq \left(\sum_{i \in T} \langle x, b_i \rangle^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i \in T} \|f(b_i)\| \right), \quad (12)$$

Entonces

$$\|f(x)\| \leq \|x\| \sum_{i \in T} \|f(b_i)\|; \text{ como } \sum_{i \in T} \|f(b_i)\| = M < \infty,$$

entonces $\|f(x)\| \leq \|x\| M$. Hemos así demostrado que f es continua.

4. CONCLUSIÓN GENERAL

En este artículo obtuvimos dos conclusiones: La primera es que si el operador

$$K(f)(x) = \int_{\Omega} k(x, y) f(y) \mu(y)$$

es integrable en cada variable, entonces este operador es continuo. Y la segunda conclusión se refiere a que si un operador lineal esta definido en los elementos de la base de un espacio de Hilbert y la suma de sus valores en la base forman una serie convergente, entonces el operador es continuo.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] P Ibarrola, L. Pardo y V. Quesada. *Teoría de la Probabilidad. Editorial Síntesis, S. A. Madrid 1997.*
- [2] Erwin Kreyszig. *Introductory Functional Analysis With Applications.*
- [3] W. Rudin. *Análisis funcional. Revertè. 1979*
- [4] B. P. Rynne and M. A. Martin Youngson. *Linear Functional Analysis. Springer Verlag. 2000.*
- [5] A. E. Taylor and D.C. Lay. *Introduction to functional Analysis. John Wiley 1980.*