

Solución Numérica de la Reactividad en Reactores Nucleares

Numerical Solution of Reactivity for Nuclear Reactors

D. Suescún-Díaz  ; G. Ule-Duque  ; D. Peña-Lara 

DOI: <https://doi.org/10.22517/23447214.25438>

Scientific and technological research paper

Abstract— Nuclear reactivity and neutron population density are critical parameters for quantifying and describing the behavior of a nuclear reactor. Accurate knowledge of reactivity is essential for the safe control and operation of a reactor. Various approaches and methods for calculating reactivity are reported in the literature. In this paper, we propose using the Euler-Maclaurin formula to numerically solve reactivity through the inverse point kinetics equation, a key model in the design of digital reactivity meters. By approximating an integral as a sum in the expansion of a continuous integral into a discrete version, and considering only the first three Bernoulli numbers while reducing higher-order derivatives, we derive a model to calculate nuclear reactivity as a function of neutron population density and physical constants in thermal reactors using uranium as nuclear fuel.

Index Terms— Bernoulli numbers; Euler-Maclaurin formula; Neutron density; Nuclear reactivity; Nuclear reactor; Numerical simulation.

Resumen—La reactividad nuclear y la densidad de la población de neutrones son los parámetros más significativos al momento de cuantificar y describir físicamente el comportamiento de un reactor nuclear. Conocer el valor de la reactividad con suficiente precisión permite realizar el control y la operación segura de un reactor nuclear. Existen varios enfoques y métodos para calcular la reactividad reportados en la literatura. Sin embargo, en este artículo se propone usar la fórmula de Euler-Maclaurin para la solución numérica de la reactividad mediante la ecuación inversa de la cinética puntual que ha sido un modelo clave en el diseño de medidores de reactividad digital. Considerando la aproximación de una integral como una suma, en el desarrollo de la expansión de la integral continua en una versión discreta y tomando en cuenta únicamente los tres primeros números de Bernoulli y una

aproximación que reduce las derivadas de mayor orden, es posible deducir un modelo que permite el cálculo de la reactividad nuclear en función de la densidad de la población de neutrones y de las constantes física en reactores térmicos que usan uranio como combustible nuclear.

Palabras claves— Números de Bernoulli; Formula Euler-Maclaurin; Densidad de neutrones; reactividad nuclear; Reactor nuclear; Simulación numérica.

I. INTRODUCCIÓN

Uno de los retos de la actualidad es producir electricidad para el desarrollo económico de los pueblos sin aumentar el calentamiento global del planeta, un camino para lograrlo es mediante la energía nuclear que se obtiene a partir de los núcleos atómicos en un proceso conocido como fisión nuclear. En esta reacción nuclear se liberan alrededor de 200 MeV con una producción de varios neutrones, los cuales van a producir nuevas fisiones. Para una reacción en cadena controlada es necesario un reactor nuclear [1]. Para dicho control, es necesario conocer con mayor precisión un parámetro llamado reactividad obtenida a partir de una forma conocida de la densidad de neutrones.

Diferentes métodos experimentales y numéricos se utilizan para estimar y calcular la reactividad, este valor se calcula con la ecuación inversa de la cinética puntual, la cual es una ecuación integro diferencial que tiene asociada a la parte diferencial el periodo del reactor y la parte integral contiene todos los valores de la densidad de la población de neutrones. A lo largo de la historia de los reactores nucleares se han llevado a cabo diferentes estudios para calcular la reactividad, un trabajo pionero usa diferencias finitas con el filtro pasabajo [2]. Otro trabajo usa un método estadístico para determinar la fuente de neutrones [3]. Posteriormente, se presenta un método que puede calcular la reactividad en tiempo real con una aproximación lineal [4]. Análogamente, se propone una medición de la reactividad en tiempo real [5]. El método conocido como memorial índice se presenta para el cálculo de la reactividad [6]. Así mismo, se publicó un nuevo método usando los polinomios de Lagrange de tercero y quinto orden de precisión [7]. La serie de Euler-Maclaurin es usada para el cálculo de la reactividad con una buena aproximación [8]. Otro método para el cálculo de la reactividad emplea un pronóstico-corrección de alta precisión Hamming [9]. En otros métodos se hace uso de la

Este manuscrito fue enviado el día 11 agosto, 2023, aceptado el 10 de septiembre de 2024 y publicado el 20 de diciembre del 2024

Este artículo fue desarrollado con el apoyo financiero de la Universidad Surcolombiana.

Daniel Suescún Díaz es un investigador del grupo de Física aplicada, FIASUR de la Universidad surcolombiana, Neiva, Colombia. (e-mail: daniel.suescun@usco.edu.co).

Geraldine Ule Duque es una investigadora del grupo de Física aplicada, FIASUR de la Universidad surcolombiana, Neiva, Colombia. (e-mail: geraldinu525@gmail.com).

Diego Peña Lara es un investigador del grupo de Transiciones de Fase y Materiales Funcionales de la Universidad del Valle, Cali, Colombia. (e-mail: diego.pena@correounivalle.edu.co).



transformada wavelet [10], el uso de transporte híbrido [11], y la reconstrucción de la reactividad por medio de detectores de neutrones [12]. Un trabajo más reciente con mayor precisión en el cálculo de la reactividad se presenta [13], allí se discretiza la integral que contiene la dependencia de la densidad de neutrones en la ecuación inversa de la cinética puntual con infinitos números de Bernoulli.

En este trabajo se discretiza la dependencia de la densidad de neutrones mediante la fórmula de Euler-Maclaurin y se hace una aproximación únicamente con los tres primeros números de Bernoulli resultado en una expresión donde la corrección tiene características especiales como es el carácter recursivo.

II. ASPECTOS TEÓRICOS

La seguridad en la generación de energía a partir de la fisión nuclear es de vital importancia por lo que los modelos computacionales que se utilicen para medir, modelar y/o simular el comportamiento de un reactor nuclear deben aproximarse en gran medida al comportamiento real. Para esto, se parte de las ecuaciones de la cinética puntual que son un conjunto de siete ecuaciones fuertemente acopladas que describen la evolución temporal de la densidad de neutrones. Están descritas por las siguientes ecuaciones [14]:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \left[\frac{\rho(t) - \beta}{\Lambda} \right] P(t) + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i(t) \quad (1)$$

$$\frac{dC_i(t)}{dt} + \lambda_i C_i(t) = \frac{\beta_i}{\Lambda} P(t); \quad i = 1, 2, \dots, 6 \quad (1)$$

donde, P es la densidad del neutrón, C_i es la concentración del i -ésimo grupo de neutrones atrasados, ρ es la reactividad, Λ es el tiempo de generación de neutrones instantáneos, β_i es la fracción efectiva del i -ésimo grupo de neutrones atrasados, β es la fracción total de neutrones atrasados, λ_i es la constante de decaimiento del i -ésimo grupo de neutrones atrasados.

Las ecuaciones (1) y (2) están sujetas a unas condiciones iniciales, las cuales hacen que para un tiempo inicial $t=0$ la reactividad sea nula, esto indica que el reactor está en estado de criticidad. Al resolver (2) por cualquier método de solución de ecuaciones diferenciales, y despejar la reactividad en (1), considerando las condiciones iniciales mencionadas anteriormente, se obtiene la expresión de la ecuación inversa de la cinética puntual.

$$\rho(t) = \beta + \frac{\Lambda}{P(t)} \frac{dP(t)}{dt} - \frac{P(0)}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \beta_i e^{-\lambda_i t} - \frac{1}{P(t)} \sum_{i=1}^6 \int_0^t \lambda_i \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} P(t') dt' \quad (2)$$

La ecuación (3) tiene dependencia de la densidad de la población de neutrones, lo cual hace que su implementación computacionalmente no sea efectiva para cálculos en tiempo real. Es la forma como se implementan algoritmos para construir medidores de reactividad digital.

En la siguiente sección se describe un método que

discretiza la dependencia del histórico de la densidad de neutrones lo cual aumenta la precisión en el cálculo de la reactividad y facilita su implementación computacional.

III. MÉTODO PROPUESTO

Para discretizar la dependencia de la integral en la ecuación (3), se emplea una aproximación de la integral a una suma mediante la fórmula de Euler-Maclaurin [15],

$$\int_0^n F(y) dy = \sum_{s=1}^{n-1} F[s] + \frac{1}{2} [F[0] + F[n]] - \sum_{x=1}^{\infty} \frac{B_x}{(2x)!} [F^{(2x-1)}[n] - F^{(2x-1)}[0]] \quad (3)$$

La ecuación (4) permite hacer un cambio en la dependencia de funciones continuas $F(y)$ a funciones discretas $F[n]$.

Si $x=3$, la ecuación (4) se reescribe de la siguiente forma:

$$\int_0^n F(y) dy = \sum_{s=1}^{n-1} F[s] + \frac{1}{2} [F[0] + F[n]] - \frac{B_1}{2!} [F^{(1)}[n] - F^{(1)}[0]] + \frac{B_2}{4!} [F^{(3)}[n] - F^{(3)}[0]] - \frac{B_3}{6!} [F^{(5)}[n] - F^{(5)}[0]] \quad (4)$$

donde $B_1=1/6$, $B_2=1/30$ y $B_3=1/42$ representan los tres primeros números de Bernoulli. La reactividad con la aproximación de tres números de Bernoulli puede ser calculada, sustituyendo la ecuación (5) en (3) resulta:

$$\rho[n] = \rho_{Trap} + \rho_{B1} + \rho_{B2} + \rho_{B3} \quad (6)$$

donde ρ_{Trap} representa la reactividad con la corrección de la regla trapezoidal [17], esto es:

$$\rho_{Trap}[n] = \beta + \frac{\Lambda}{P[n]} P^{(1)}[n] - \frac{\langle P_0 \rangle}{P[n]} \sum_{i=1}^6 \beta_i e^{-\lambda_i n T} - \frac{T}{P[n]} \sum_{i=1}^6 \left[\sum_{s=1}^n h_i[n-s] P[s] - \frac{1}{2} [h_i[n] P[0] + h_i[0] P[n]] \right] \quad (7)$$

ρ_{B1} , ρ_{B2} y ρ_{B3} representan las correcciones con el primero, el segundo y el tercer número de Bernoulli, dados por:

$$\rho_{B1} = \frac{T^2}{12P[n]} \sum_{i=1}^6 \left[h_i^{(1)}[0] P[n] + h_i[0] P^{(1)}[n] - h_i^{(1)}[n] P[0] - h_i[n] P^{(1)}[0] \right] \quad (8)$$

$$\rho_{B2} = -\frac{T^4}{720P[n]} \sum_{i=1}^6 \left[\begin{aligned} & h_i^{(3)}[0] P[n] + 3 \left(h_i^{(2)}[0] P^{(1)}[n] \right) \\ & + 3 \left(h_i^{(1)}[0] P^{(2)}[n] \right) + h_i[0] P^{(3)}[n] \\ & - h_i^{(3)}[n] P[0] - 3 \left(h_i^{(2)}[n] P^{(1)}[0] \right) \\ & - 3 \left(h_i^{(1)}[n] P^{(2)}[0] \right) - h_i[n] P^{(3)}[0] \end{aligned} \right] \quad (9)$$

$$\rho_{B_3} = \frac{T^6}{30240P[n]} \sum_{i=1}^6 \left[\begin{array}{c} \left[\sum_{k=0}^5 \binom{2p-1}{k} h_i^{(2p-k-1)} [0] P^{(k)} [n] \right] \\ - \left[\sum_{k=0}^5 \binom{2p-1}{k} h_i^{(2p-k-1)} [n] P^{(k)} [0] \right] \end{array} \right] \quad (10)$$

Es posible escribir una expresión para el cálculo de la reactividad en una forma más compacta en términos de expresiones pares e impares obteniendo la siguiente ecuación para la reactividad:

$$\rho[n] = \rho_{Trap}[n] + \frac{1}{P[n]} \sum_{i=1}^6 \sum_{p=1}^3 (-1)^{p-1} \frac{T^{2p} B_p}{(2p)!} * \left[\begin{array}{c} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{2k} h_i^{(2p-2k-1)} [0] P^{(2k)} [n] \right] \\ + \sum_{k=1}^p \binom{2p-1}{2k-1} h_i^{(2p-2k)} [0] P^{(2k-1)} [n] \end{array} \right] \\ - \left[\begin{array}{c} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{2k} h_i^{(2p-2k-1)} [n] P^{(2k)} [0] \right] \\ + \sum_{k=1}^p \binom{2p-1}{2k-1} h_i^{(2p-2k)} [n] P^{(2k-1)} [0] \end{array} \right] \quad (11)$$

Se puede simplificar las derivadas de la respuesta del sistema h_i para un impulso unitario contenidas en la ecuación (11) por ser una función exponencial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} h_i^{(1)}(t-t') &= \lambda_i^2 \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} = \lambda_i h_i(t-t') \\ h_i^{(2)}(t-t') &= \lambda_i^3 \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} = \lambda_i^2 h_i(t-t') \\ h_i^{(3)}(t-t') &= \lambda_i^4 \beta_i e^{-\lambda_i(t-t')} = \lambda_i^3 h_i(t-t') \end{aligned} \quad (12)$$

De otra parte, en la ecuación (11) se tienen términos pares e impares de la densidad de neutrones P , para simplificar se hace uso de la regla de derivadas para términos pares como impares que fueron obtenidas integrando por partes la integral de la ecuación (3), originando una serie geométrica que converge [13], las cuales son válidas para diferentes formas de la densidad de la población de neutrones:

$$P^{(2k)}(t) = P(t) \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right]^k \equiv P(t) a^{2k} \quad (13)$$

$$P^{(2k-1)}(t) = P^{(1)}(t) \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right]^{k-1} \equiv P^{(1)}(t) a^{2(k-1)} \quad (14)$$

siendo a una constante que es la razón de convergencia de una serie geométrica dada por:

$$a^2 = \left[\frac{P^{(2)}(t)}{P(t)} \right] = constante \quad (15)$$

Con las consideraciones dadas por las ecuaciones (14-15) y usando las ecuaciones (11-12) se puede escribir la reactividad como:

$$\rho[n] = \rho_{Trap}[n] + \frac{1}{P[n]} \sum_{i=1}^6 \sum_{p=1}^3 (-1)^{p-1} \frac{T^{2p} B_p}{(2p)!} * \left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{c} P[n] \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{2k} \lambda_i^{2p-2k-1} a^{2k} \\ + \frac{P^{(1)}[n]}{a} \sum_{k=1}^p \binom{2p-1}{2k-1} \lambda_i^{2p-2k} a^{2k-1} \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} P[0] \sum_{k=0}^{p-1} \binom{2p-1}{2k} \lambda_i^{2p-2k-1} a^{2k} \\ + \frac{P^{(1)}[0]}{a} \sum_{k=1}^p \binom{2p-1}{2k-1} \lambda_i^{2p-2k} a^{2k-1} \end{array} \right] \end{array} \right] \quad (16)$$

La ecuación (16) representa el método para calcular la reactividad en forma discreta con la dependencia de solo hasta la segunda derivada, siendo el orden de las derivadas menor al presentado en las ecuaciones (8-10).

Una representación más simple y compacta para escribir la ecuación (16) es:

$$\rho[n] = \rho_{Trap}[n] + \sum_{p=1}^3 \rho_{C_p} \quad (17)$$

La ecuación (17) tiene dos ventajas, la primera es el carácter semi recursiva, lo que no se obtenía con la ecuación inversa de la cinética puntual dada por la ecuación (3) ya que es una integral de convolución y depende de todos los puntos de la densidad de neutrones. La segunda es que los términos ρ_{C_p} que originalmente fueron definidos en las ecuaciones (8-10), ya no dependen de las derivadas de orden superiores, sino que su nueva dependencia solo es función de hasta la segunda derivada de la densidad de la población de neutrones.

IV. RESULTADOS

En esta sección se exponen los resultados de las simulaciones numéricas realizadas a partir de la ecuación (17). Las simulaciones se presentan para un reactor nuclear que utiliza combustible ${}^{235}_{92}\text{U}$ (los parámetros de este tipo de reactor están dados en la Tabla I).

TABLA I. PARÁMETROS DEL COMBUSTIBLE ${}^{235}_{92}\text{U}$ UTILIZADOS EN LOS EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Parámetro	Valor	Parámetro	Valor [s ⁻¹]
β_1	0.000266	λ_1	0.0127
β_2	0.001491	λ_2	0.0317
β_3	0.001316	λ_3	0.115
β_4	0.002849	λ_4	0.311
β_5	0.000896	λ_5	1.4
β_6	0.000182	λ_6	3.87

El tiempo de generación de neutrones es $A = 2 \times 10^{-5}$ s. Los resultados se comparan con la solución exacta o método de referencia usando la ecuación (3), también se realizan

comparaciones con la aproximación del primer y segundo número de Bernoulli. y otros métodos encontrados en la literatura como el método de Hamming [9] y el método de Lagrange 5 puntos [7]. Las simulaciones se realizan para diferentes densidades de neutrones y diferentes pasos de tiempo.

El primer experimento numérico se realiza para una densidad de neutrones de la forma $P(t)=exp(\omega t)$ para diferentes pasos de tiempo, el valor de la frecuencia considerada ω y el tiempo de simulación son: $\omega=0.0243 s^{-1}$ y $t=1000 s$ respectivamente. Los resultados en las máximas diferencias se presentan en la Tabla II. Es posible observar que para los valores ω , el método propuesto usando (6), esto es el cálculo de la reactividad incluyendo todas las derivadas, la aproximación del tercer número de Bernoulli representado por ρ_{B_3} , tiene mayor precisión que los dos primeros números de Bernoulli denotados por ρ_{B_1} y ρ_{B_2} . Iguales resultados son encontrados cuando se compara con el método reduciendo el orden de las derivadas ρ_{C_3} usando (17), estos resultados son equivalentes pues la forma de la densidad de neutrones cumple con las condiciones dadas por las ecuaciones (13-15).

TABLA II. MÁXIMA DIFERENCIA EN LA REACTIVIDAD EN PCM

$T(s)$	ρ_{B_1}	ρ_{B_2}	ρ_{B_3}	ρ_{C_3}
0.01	6.17×10^{-8}	4.50×10^{-11}	4.30×10^{-11}	4.30×10^{-11}
0.05	3.85×10^{-5}	3.20×10^{-8}	4.69×10^{-11}	4.69×10^{-11}
0.1	6.14×10^{-4}	2.04×10^{-6}	7.60×10^{-9}	7.60×10^{-9}
0.2	9.73×10^{-3}	1.29×10^{-4}	1.92×10^{-6}	1.92×10^{-6}
0.5	3.56×10^{-1}	2.93×10^{-2}	2.70×10^{-3}	2.70×10^{-3}
1	4.67×10^0	1.50×10^0	5.53×10^{-1}	5.53×10^{-1}

En las Tablas III-IV se presentan los resultados numéricos obtenidos para frecuencias y tiempos de simulación: $\omega=0.01046 s^{-1}$ y $t = 800 s$; $\omega=0.02817 s^{-1}$ y $t=600 s$ respectivamente. Se observa que para los valores diferentes ω , el método propuesto usando la aproximación del tercer número de Bernoulli representado por ρ_{B_3} , tiene mayor precisión que los métodos de Lagrange de 5 puntos y el método de Hamming, excepto para un paso de tiempo de cálculo muy alto de $T = 1s$. Iguales resultados son encontrados cuando se compara con el método reduciendo el orden de las derivadas ρ_{C_3} ya que cumple con las condiciones dadas por las ecuaciones (13-15).

TABLA III. MÁXIMA DIFERENCIA EN LA REACTIVIDAD EN PCM

$T(s)$	Lagrange 5 puntos	Hamming	ρ_{B_3}	ρ_{C_3}
0.01	2.37×10^{-5}	1.062×10^{-10}	3.77×10^{-11}	3.77×10^{-11}
0.05	3.98×10^{-4}	2.43×10^{-7}	4.46×10^{-11}	4.46×10^{-11}
0.1	1.14×10^{-3}	5.29×10^{-6}	7.71×10^{-9}	7.71×10^{-9}
0.5	1.04×10^{-2}	7.86×10^{28}	2.80×10^{-3}	2.80×10^{-3}
1	1.83×10^{-2}	Infinito	5.60×10^{-1}	5.60×10^{-1}

TABLA IV. MÁXIMA DIFERENCIA EN LA REACTIVIDAD EN PCM

$T(s)$	Lagrange 5 puntos	Hamming	ρ_{B_3}	ρ_{C_3}
0.01	6.38×10^{-5}	2.88×10^{-10}	2.96×10^{-11}	2.96×10^{-11}
0.05	1.06×10^{-3}	6.56×10^{07}	4.10×10^{-11}	4.01×10^{-11}
0.1	3.05×10^{-3}	1.42×10^{05}	7.95×10^{-9}	7.95×10^{-9}
0.5	2.65×10^{-2}	4.44×10^{182}	2.80×10^{-3}	2.80×10^{-3}
1	4.36×10^{-2}	Infinito	5.77×10^{-1}	5.77×10^{-1}

Es bueno resaltar que, para cualquier paso de cálculo, el método propuesto ya sea reduciendo o no el orden de las derivadas, el método propuesto tiene mejores aproximaciones que el método de Hamming con un paso de cálculo de $T=1 s$, el método de Hamming diverge, mientras los métodos ρ_{B_3} y ρ_{C_3} convergen a valores cercanos de $10^{-1} pcm$. Esto es posible debido a la alta precisión que proporciona la aproximación del tercer número de Bernoulli en el cálculo de la reactividad.

La Figura 1 muestra la curva de reactividad en pcm para una densidad de neutrones de forma cúbica $P(t)=a+bt^3$, $a=1$ y $b=(0.0127)^5/9$ y un paso de cálculo $T=1 s$ para un tiempo total de simulación $t=10000 s$. Se observa que el tercer número de Bernoulli denotado por ρ_{B_3} tiene mejores aproximaciones cuando se comparan con el método de referencia dado por la solución exacta que se obtiene al resolver analíticamente (3).

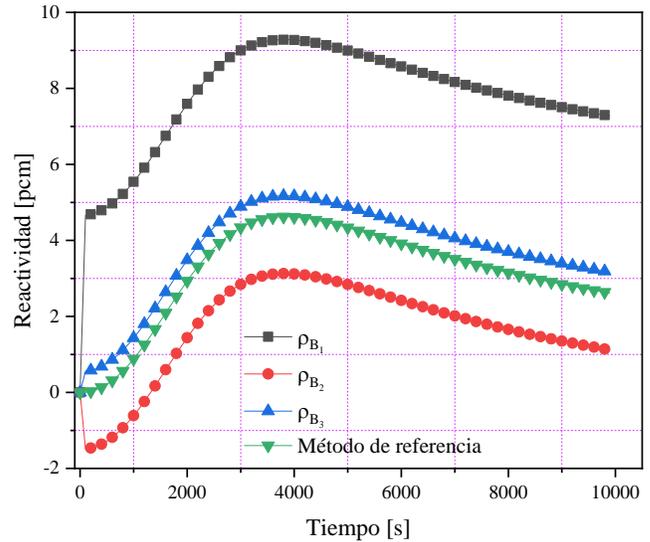


Fig. 1. Curva de reactividad en pcm, $P(t)=a+bt^3$, $a=1$, $b=(0.0127)^5/9$

En los próximos experimentos numéricos se considera un tiempo total de simulación de $t=10000 s$, en las Tablas V-VI se exponen los resultados obtenidos cuando se usan las derivadas normales y cuando se reduce el orden respectivamente para una densidad de neutrones de la forma $P(t)=a+sin(bt)$ con distintos valores de a y fijando $b= \pi/10$. Esta forma de la densidad de neutrones no cumple estrictamente con las condiciones dadas por (13-15). Es posible notar que hay cambios en los resultados usando el tercer número de Bernoulli, ρ_{B_3} y ρ_{C_3} cuando se reduce el orden de la derivada hasta 5. Las grandes diferencias aparecen

cuando se considera el valor $a=1$ ya que los resultados obtenidos pasan de estar en el orden de 10^{-6} pcm cuando no se reduce el orden de las derivadas y cuando se reducen las máximas diferencias alcanzan valores de 10^{-1} pcm.

TABLA V. MÁXIMA DIFERENCIA EN LA REACTIVIDAD EN PCM

T (s)	a	ρ_{B_1}	ρ_{B_2}	ρ_{B_3}
0.1	1	5.09×10^{-2}	3.44×10^{-4}	2.51×10^{-6}
0.1	100	6.15×10^{-4}	2.05×10^{-6}	7.63×10^{-9}
0.1	150	6.14×10^{-4}	2.05×10^{-6}	7.62×10^{-9}

TABLA VI. MÁXIMA DIFERENCIA EN LA REACTIVIDAD EN PCM

T (s)	a	ρ_{C_1}	ρ_{C_2}	ρ_{C_3}
0.1	1	5.09×10^{-2}	4.04×10^{-1}	3.83×10^{-1}
0.1	100	6.15×10^{-4}	2.06×10^{-6}	2.06×10^{-8}
0.1	150	6.14×10^{-4}	2.05×10^{-6}	1.66×10^{-8}

En el último experimento numérico se puede observar el comportamiento del método propuesto cuando se usan la reducción del orden de las derivadas para una forma de la densidad de la población de neutrones $P(t)=a+\sin(bt)$ con $a=150$, $b= \pi/10$ y un paso de tiempo $T=1$ s. Las máximas diferencias en reactividad son aproximadamente 4.67 pcm, 1.50 pcm y 0.55 pcm usando el primero, segundo y tercer número de Bernoulli respectivamente. Los resultados indican nuevamente como el caso ρ_{C_3} presenta buenas aproximaciones.

En la Figura 2 se muestra la curva de reactividad para una densidad de neutrones $P(t)=a + b \sinh(ka t)$ con $a=100$, $b= 1$ y $ka= 1.27 \times 10^{-3} s^{-1}$ con un tamaño de paso de tiempo $T=1$ s hasta un tiempo de simulación de $t=10000$ s. Se evidencia que el método propuesto tiene una mejor aproximación en comparación con el primer y el segundo número de Bernoulli.

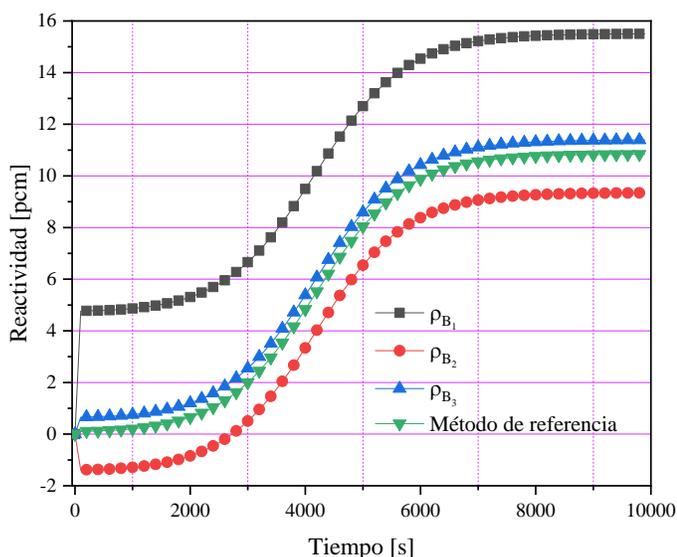


Fig. 2. Curva de reactividad en pcm para $P(t)=a + b \sinh(ka t)$, $t=10000$ s.

V. CONCLUSIONES

Se presento un método para calcular numéricamente la reactividad considerando los parámetros físicos para un reactor nuclear que emplea combustible $^{235}_{92}U$ usando la ecuación inversa de la cinética puntual, la cual depende de la densidad de población de neutrones; esto se logró empleando la fórmula de Euler-Maclaurin que permite hacer una aproximación de una integral entre el tiempo continuo y el tiempo discreto. El método propuesto usó la aproximación del tercer número de Bernoulli y el criterio de reducir el orden de las derivadas, permitiendo calcular la reactividad en una forma semi recursiva, obteniendo buenas aproximaciones para diferentes formas de la densidad de la población de neutrones y diferentes pasos de cálculo. La limitación y las dificultades se pueden presentar por las aproximaciones dadas en las ecuaciones (13-15). Sin embargo, existe buena precisión y se evidencia en los resultados numéricos realizados, la aproximación del tercer número de Bernoulli reduce el costo computacional y puede ser un método alternativo para implementar en medidores de reactividad digital.

REFERENCIAS

- [1] M. Stacey, Nuclear Reactor Physics 3e. Weinheim, Germany: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 2018. doi: 10.1002/9783527812318
- [2] Y. Shimazu, Y. Nakano, Y. Tahara, and T. Okayama, "Development of a Compact Digital Reactivity Meter and a Reactor Physics Data Processor.," Nucl Technol, vol. 77, no. 3, pp. 247–254, 1987, doi: 10.13182/NT87-A33964
- [3] J. E. Hoogenboom and A. R. van der Sluijs, "Neutron source strength determination for on-line reactivity measurements," Ann Nucl Energy, vol. 15, no. 12, pp. 553–559, 1988, doi: 10.1016/0306-4549(88)90059-X
- [4] S. E. Binney and A. J. M. Bakir, "Design and development of a personal-computer-based reactivity meter for a research reactor," Nucl Technol, vol. 85, no. 1, pp. 12–21, 1989, doi: 10.13182/NT89-A34223
- [5] S. A. Ansari, "Development of on-line reactivity meter for nuclear reactors," IEEE Trans Nucl Sci, vol. 38, no. 4, pp. 946–952, Aug. 1991, doi: 10.1109/23.83857
- [6] A. Kitano, M. Itagaki, and M. Narita, "Memorial-Index-Based Inverse Kinetics Method for Continuous Measurement of Reactivity and Source Strength," J Nucl Sci Technol, vol. 37, no. 1, pp. 53–59, Jan. 2000, doi: 10.1080/18811248.2000.9714866
- [7] H. Malmir and N. Vosoughi, "On-line reactivity calculation using Lagrange method," Ann Nucl Energy, vol. 62, pp. 463–467, 2013, doi: 10.1016/j.anucene.2013.07.006
- [8] D. Suescún-Díaz, J. A. Rodríguez-Sarasty, and J. H. Figueroa-Jiménez, "Reactivity calculation using the Euler–Maclaurin formula," Ann Nucl Energy, vol. 53, pp. 104–108, Mar. 2013, doi: 10.1016/j.anucene.2012.09.026
- [9] D. Suescún-Díaz, M. C. Ibarguen-Gonzalez, and J. H. Figueroa-Jiménez, "Hamming generalized corrector for

- reactivity calculation,” *Kerntechnik*, vol. 79, no. 3, pp. 219–225, Jun. 2014, doi: 10.3139/124.110423
- [10] M. Mohideen Abdul Razak and N. Rathinasamy, “Haar wavelet for solving the inverse point kinetics equations and estimation of feedback reactivity coefficient under background noise,” *Nuclear Engineering and Design*, vol. 335, pp. 202–209, Aug. 2018, doi: 10.1016/j.nucengdes.2018.04.022
- [11] P. Picca and R. Furfaro, “Reactivity determination using the hybrid transport point kinetics and the area method,” *Ann Nucl Energy*, vol. 114, pp. 191–197, 2018, doi: 10.1016/j.anucene.2017.12.019
- [12] N. Chentre, P. Saracco, S. Dulla, and P. Ravetto, “On the prompt time eigenvalue estimation for subcritical multiplying systems,” *Ann Nucl Energy*, vol. 132, pp. 172–180, 2019, doi: 10.1016/j.anucene.2019.04.030
- [13] D. Suescún-Díaz, G. Ule-Duque, and F. H. Escobar, “Novel approach to solving the inverse equation of point kinetics by the Bernoulli number generalisation method,” *J Nucl Sci Technol*, vol. 57, no. 8, pp. 989–999, 2020, doi: 10.1080/00223131.2020.1742813
- [14] J. J. Duderstadt and L. J. Hamilton, *Nuclear Reactor Analysis*, Second ed. New York: John Wiley & Sons Inc, 1976.
- [15] Y. K. Kwok, *Applied Complex Variables for Scientists and Engineers*. Cambridge University Press, 2010. doi: 10.1017/CBO9780511844690
- [16] S. Haykin and B. Van Veen, *Signals and Systems*. New York: Wiley, 2005.
- [17] D. Suescún Díaz, A. Senra Martinez, and F. Carvalho Da Silva, “Calculation of reactivity using a finite impulse response filter,” *Ann Nucl Energy*, vol. 35, no. 3, pp. 472–477, 2008, doi: 10.1016/j.anucene.2007.07.002

intereses investigativos se encuentra la Física Estadística, Física computacional con métodos numéricos, dinámica molecular, método de Monte Carlo, procesos estocásticos, Transiciones de fases en sistemas magnético e iónicos
<https://orcid.org/0000-0001-6199-1547>

Daniel Suescún Díaz. Recibió el título de Licenciando en Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander en 1993, el título de Físico de la Universidad Industrial de Santander en 1999 y MSc en Física de la Universidad Industrial de Santander en el año 2000, el título de Doctor en Física en Reactores Nucleares de la Universidad Federal de Rio de Janeiro en el año 2007. Entre sus intereses investigativos se encuentra la Física nuclear y la Física computacional con métodos numéricos estocásticos.

<https://orcid.org/0000-0003-2422-0684>

Geraldine Ule Duque. Recibió el título de Físico de la Universidad Surcolombiana en 2019, el título M Sc. en Física de la Universidad de Valencia en el año 2021, actualmente realiza estudios PhD en Física en la Universidad de Bangor, Reino Unido. Entre los intereses investigativos se encuentra la Física computacional con métodos numéricos, método de Monte Carlo, procesos estocásticos, Física de reactores nucleares.

<https://orcid.org/0000-0001-9534-5260>

Diego Peña Lara. Recibió el título de Físico de la Universidad del Valle 1986, el título M Sc. en Física de la Universidad de Valle en el año 1990 y el título de Doctor en Física de la Universidad Federal de Minas Gerais en el año 1999. Entre los