

## DISEÑO DE UN PROCEDIMIENTO PARA EL CALCULO DE INCERTIDUMBRE EN MEDICIONES INDIRECTAS

Design of a procedure for the calculation of the uncertainty in indirect measurements

### RESUMEN

De manera didáctica se presenta con base en la norma GTC 51 “Guía para la expresión de incertidumbre en las mediciones” el desarrollo de una metodología para realizar el cálculo de la incertidumbre de medición para el caso en que se realizan mediciones indirectas. Se presenta para un mayor entendimiento una aplicación práctica.

**PALABRAS CLAVES:** Metrología, medición indirecta, incertidumbre, cálculo.

### ABSTRACT

Of didactic way appears with base in GTC-51 norm “Guide for the Expression of Uncertainty in Measurements” the development of a methodology to make the calculation of the uncertainty of measurement for the case in that indirect measurements are made. A practical application appears for a greater understanding.

**KEYWORDS:** Metrology, indirect measurement, uncertainty, calculation.

LUIS ENRIQUE LLAMOS A R

Profesor Titular

Facultad de ciencias básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

lellamo@utp.edu.co

JOSÉ DEL C. GÓMEZ E.

Profesor titular

Facultad de ciencias básicas

Universidad Tecnológica de Pereira

ANDRÉS FELIPE RAMÍREZ B.

Estudiante de ingeniería eléctrica

Facultad de Ingenierías

Universidad Tecnológica de Pereira

## 1. INTRODUCCIÓN

Medida Indirecta: Las medidas indirectas son aquellas que son resultado de emplear una expresión matemática que implica operaciones con cantidades físicas que fueron medidas directamente. Entre los casos clásicos para la medición indirecta de variables eléctricas están el de la resistencia eléctrica y el de potencia eléctrica a través de mediciones directas de tensión y corriente eléctricas. La incertidumbre en medidas indirectas proviene necesariamente de la incertidumbre obtenida por medio de las variables involucradas que se midieron por método directo. Contrario al caso de las medidas directas, la determinación de la incertidumbre en medidas indirectas es un proceso más complejo que puede llegar a involucrar aspectos de cálculo diferencial, debido a que es inevitable la presencia de correlaciones entre las variables de entrada.

El lenguaje metrologógico utilizado en este artículo es con base en la norma NTC-2194[1].

## 2. DISEÑO DEL PROCEDIMIENTO

A continuación, se irá presentando paso a paso el procedimiento propuesto para la aplicación práctica del Cálculo de la Incertidumbre de Medición en la realización de medidas indirectas. En una primera instancia se describen de manera general los pasos del algoritmo propuesto en esta sección mediante varias secciones de un diagrama de flujo (ver figura 1, 2 y 3)

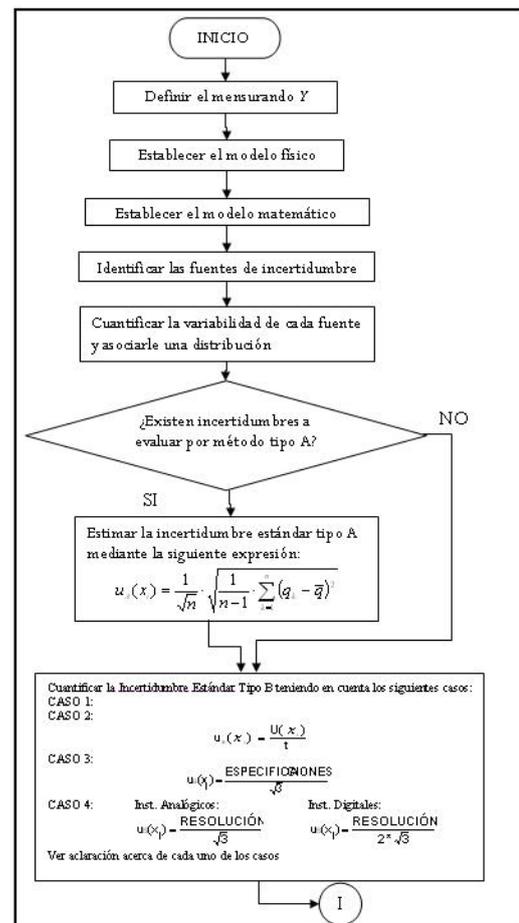


Figura 1. Sección del diagrama de flujo que especifica la metodología a seguir.

Fecha de Recepción: 8 de julio de 2009

Fecha de Aceptación: 25 de julio de 2009

Casos de incertidumbre estándar tipo B (Diagrama de flujo: Figura 1)

CASO 1. Si la incertidumbre de un valor x se obtiene a partir de la especificación de un fabricante, o de un certificado de calibración, un manual u otra fuente externa al procedimiento de medición en que se indique que este es un múltiplo de la desviación estándar,  $U_x$  se obtiene simplemente de dividir la incertidumbre dada entre el factor multiplicativo.

CASO 2. La especificación de incertidumbre de un elemento de medición se indica respecto de un nivel de confianza (90%, 95%, 99%, etc.) se puede asumir, (salvo indicación contraria), que esta ha sido estimada en base a una distribución normal, por lo tanto podemos hallar la incertidumbre estándar dividiendo por el factor de STUDENT (t) correspondiente:

$$u(x_i) = \frac{U(x_i)}{t}$$

CASO 3. La especificación de incertidumbre no es explícita sino que se da un límite máximo para el error del instrumento. Esto implica que el comportamiento del instrumento tiene características de una distribución tipo rectangular o uniforme dentro de unos límites establecidos. Para este tipo de distribución, la incertidumbre estándar se estima así:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{ESPECIFICACIONES}}{2\sqrt{3}}$$

CASO 4. Incertidumbre asociada a la resolución de la indicación de un instrumento de medición. La incertidumbre básica asociada a este problema se puede obtener considerando que la información que se pueda obtener considerando que la información que se pueda obtener en la porción menos significativa de la indicación de un instrumento, tiene una función de distribución tipo rectangular. En el caso de una indicación digital, la incertidumbre básica corresponde a la sensibilidad del dígito menos significativo, dividido entre dos, y dividida entre la raíz cuadrada de tres:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{RESOLUCIÓN}}{2\sqrt{3}}$$

En el caso de una indicación analógica la incertidumbre básica corresponde a:

$$u_B(x_i) = \frac{\text{RESOLUCIÓN}}{2\sqrt{3}}$$

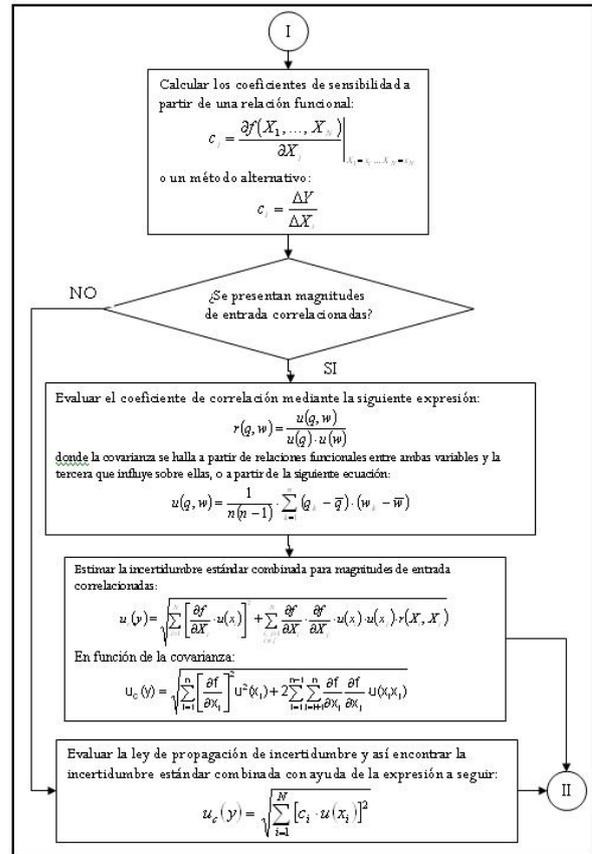


Figura 2. Segunda sección del método.

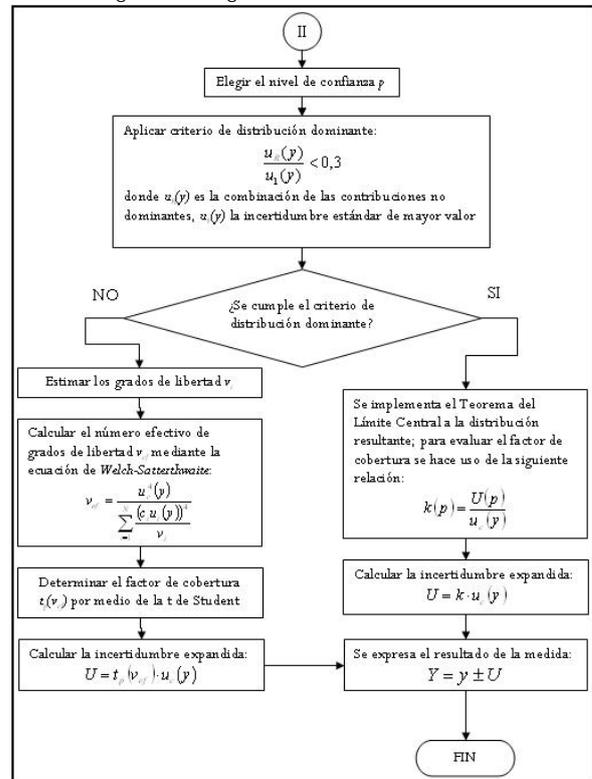


Figura 3. Tercera sección del método.

Nota para la estimación del número de grados de libertad (Diagrama de flujo: Figura 3)

El número efectivo de grados de libertad  $\gamma_{ief}$  de cada distribución se determina teniendo en cuenta los siguientes criterios:

$\gamma_{ief} = n - 1$ . Evaluaciones Tipo A con una restricción.

$\gamma_{ief} = n - m$ . Evaluaciones Tipo A con m restricciones.

$\gamma_{ief} = \text{infinito}$ . Cuando se apliquen distribuciones rectangulares.

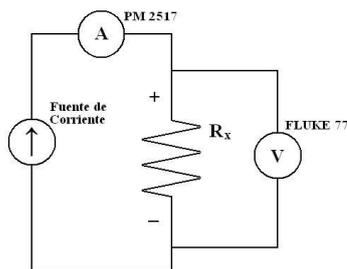
$\gamma_{ief} = 50$ . Si se deduce de una distribución normal para la cual se han tomado suficiente número de datos.

### 3 APLICACIÓN

Medición indirecta de una resistencia. El ejercicio consiste en medir la magnitud de una resistencia eléctrica con un valor nominal  $R_{nom} = 100 \Omega$ , por medio de una fuente de corriente que produzca una corriente eléctrica a través de esta resistencia, la cual será medida con un amperímetro, y la tensión eléctrica producida en la misma se medirá mediante un voltímetro.

Para evitar contribuciones de incertidumbre adicionales, se tendrá control sobre las condiciones ambientales, de tal manera que el experimento se realice solo cuando la temperatura ambiente se encuentre en el rango de  $23 \text{ }^\circ\text{C} \pm 5 \text{ }^\circ\text{C}$  y la humedad relativa en un rango de entre 40% y 60%, los cuales son rangos seguros para los cuales no se modificarán las propiedades metrológicas de los instrumentos.

Conociendo el objetivo de la presente medición, se procede a diseñar el modelo físico que servirá de aproximación del sistema en cuestión. En este caso, la conexión corresponde al siguiente circuito eléctrico:



Las características metrológicas de los instrumentos de medición, según sus manuales:

Medición de Tensión (V):

Instrumento: Multímetro Digital

Marca: FLUKE

Modelo: 77

Resolución: 0,01 V

Rango: 32,00 V

Especificaciones de Exactitud:

$\pm (0,3\% \text{ lectura} + 1 \text{ dígito})$

Medición de Corriente (I):

Instrumento: Multímetro Digital

Marca: PHILLIPS

Modelo: PM 2517

Resolución: 0,01 mA

Rango: 99,99 mA

Especificaciones de Exactitud:

$\pm (0,5\% \text{ lectura} + 0,1\% \text{ rango})$

Modelamiento matemático del procedimiento de medición: El modelo físico mostrado anteriormente se puede ahora representar por medio de la Ley de Ohm, y así obtener la representación matemática necesaria para relacionar las magnitudes de entrada:

$$Y = f(X), T_{op} = \frac{V}{I} = \frac{5,555 \text{ T} \phi 1 0 0 1}{I + \delta I_{esp} + \delta I_{res} + \delta I_{amb}} \quad (3.1)$$

En este ejemplo se hacen 10 pares de mediciones (tensión y corriente), un par cada 3 minutos sin corregir la corriente producida por la fuente. Según Luis O. Becerra[3], el número de mediciones (repeticiones) necesarias para realizar una medición es una decisión que el metrólogo debe tomar considerando la incertidumbre “objetivo”, el aporte de la incertidumbre tipo A, el tiempo requerido para realizar repeticiones entre otras consideraciones. Los datos obtenidos se consignan en la siguiente tabla con sus respectivas unidades, calculando al final el promedio respectivo de las mediciones en cada uno de los multímetros:

Medición No.	Tensión [V]	Corriente [mA]
1	5,24	52,49
2	5,22	52,29
3	5,20	52,13
4	5,19	52,02
5	5,18	51,85
6	5,17	51,81
7	5,16	51,70
8	5,16	51,63
9	5,14	51,53
10	5,14	51,46
	$\bar{V} = 5,180000$	$\bar{I} = 51,891000$

Tabla 1. Mediciones realizadas en cada uno de los instrumentos.

Luego de desprejar los valores de las contribuciones que no aportan al valor del mensurando, se obtiene entonces la relación de los promedios que se observa, la cual es el mejor estimado para el valor de la resistencia que se está intentando hallar:

$$y = f(x), T_p = f_x \cdot \frac{V}{I} = \frac{5,180000 \text{ V}}{51,891000 \text{ mA}} = 0,100019 \Omega \quad (3.2)$$

En el transcurso de los cálculos se sugiere utilizar todas las cifras decimales que presente la herramienta de cálculo para evitar la pérdida de información.

Identificación y cuantificación de las fuentes de incertidumbre: Las fuentes de incertidumbre que se tendrán en cuenta para este problema serán las debidas a la repetibilidad de las lecturas tomadas, las especificaciones de exactitud y la resolución en cada

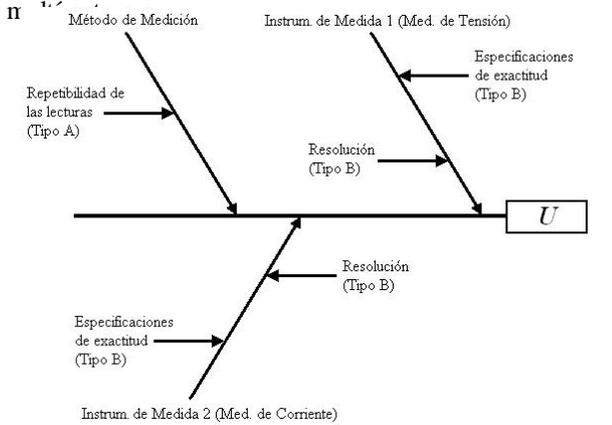


Figura 2. Fuentes de incertidumbre involucradas en el proceso de medición.

Estimación de la incertidumbre tipo A: La desviación estándar<sup>1</sup> de las lecturas tomadas se calcula como se muestra:

$$s(V) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (V_k - \bar{V})^2} = \dots \quad (3.3)$$

$$s(I) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (I_k - \bar{I})^2} = \dots \quad (3.4)$$

Ahora, calculando la incertidumbre estándar tipo A con las desviaciones anteriores, se tiene:

$$u_A(V) = \frac{s(V)}{\sqrt{n}} = \dots$$

<sup>1</sup> En Microsoft Excel, la desviación estándar de una serie de datos se puede obtener por medio de la función 'DESVEST(A:B)', donde "A:B" es el rango de valores obtenidos en la medición.

$$u_A(I) = \frac{s(I)}{\sqrt{n}} = \dots$$

Estimación de las incertidumbres tipo B: Para estimar las incertidumbres estándar tipo B a partir de las fuentes identificadas, hay que observar que se tienen presentes dos casos diferentes: especificaciones y resolución. Las especificaciones de exactitud están bien delimitadas para un valor máximo de error del instrumento, esto implica que el comportamiento de tal instrumento posee propiedades caracterizadas por una distribución uniforme entre límites establecidos, denominada también de tipo rectangular. Para este tipo de distribución de probabilidad la incertidumbre estándar se calcula de la siguiente forma:

$$u_{B1}(V)_{esp} = \frac{E_{sp}}{\sqrt{3}} = \frac{0,03 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,01732 \text{ V}$$

$$u_{B1}(I)_{esp} = \frac{E_{sp}}{\sqrt{3}} = \frac{0,01 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,00577 \text{ mA}$$

La incertidumbre estándar asociada a la resolución de la indicación de un instrumento de medición se puede obtener considerando que la información contenida en el menor incremento en la escala de la indicación de tal instrumento, posee una función de distribución de tipo rectangular. En el caso de una indicación digital, la incertidumbre estándar asociada corresponde a la mitad de la sensibilidad del dígito menos significativo, dividida entre raíz cuadrada de tres:

$$u_{B2}(V)_{res} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{0,001 \text{ V}}{\sqrt{3}} = 0,000577 \text{ V}$$

$$u_{B2}(I)_{res} = \frac{r}{\sqrt{3}} = \frac{0,001 \text{ mA}}{\sqrt{3}} = 0,000577 \text{ mA}$$

Estimación de las incertidumbres combinadas individuales: Después de haber estimado las incertidumbres estándar tipo A y tipo B, se sigue primero con el cálculo de la incertidumbre estándar combinada de cada uno de los parámetros obtenidos a partir de mediciones directas, es decir, de la tensión y la corriente:

$$u_c(V) = \sqrt{u_{A1}^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = \dots$$

$$u_c(I) = \sqrt{u_{A2}^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = \dots$$

(3.11)



$$V_{ef} = \frac{u_c^2(r) T_{p, 0.95, 161} / \sqrt{102.4873269}}{\sqrt{\frac{1}{51.891000 mA} + \frac{1}{5.800000 \Omega}}} = \frac{0.948 \Omega \cdot 8.371 T_{p, 1.0001} \cdot 10.24873269 T_{p, 1.0001}}{\sqrt{\frac{1}{51.891000 mA} + \frac{1}{5.800000 \Omega}}} = 161.10 \approx 161 \quad (3.21)$$

Cálculo de la incertidumbre expandida: Con este resultado se consulta en la tabla de valores  $t_p(v)$  de la distribución t de Student el valor correspondiente del factor de cobertura con un nivel de confianza del 95%, para hallar posteriormente la incertidumbre expandida de medición. En la tabla, debido a que 161 grados efectivos de libertad es mayor que 100, se eligen infinitos grados que corresponden a un factor de cobertura de 1,960:

$$U = t_p(v) \cdot T_{p, 0.95, 161} = 1.960 \cdot 1.0001 = 1.960196$$

4. EXPRESIÓN DEL RESULTADO DE MEDICIÓN

Expresión de la incertidumbre. En la División de Metrología de la Superintendencia de Industria y Comercio y en la mayoría de los laboratorios a nivel nacional, la política común es expresar los resultados de sus mediciones con un nivel de confianza no menor al 95%, en vista de la costumbre en laboratorios similares fuera del país, como en el caso del CENAM de México. Es difícil asegurar un valor preciso de la incertidumbre debido a las múltiples aproximaciones realizadas durante su estimación. Por ello, generalmente los valores de  $t_p(V_{ef})$  para  $\rho = 95\%$  se aproximan por los que corresponden a  $t_p(V_{ef})$  para  $\rho = 95,45\%$  con el fin de obtener un valor de  $k = 2,00$  en el límite de una distribución normal (ver tabla distribución *t de student*). La expresión de la incertidumbre expandida  $U$  incluye su indicación como un intervalo centrado en el mejor estimado “y” del mensurando, la afirmación de que  $\rho$  es del 95% (o el valor elegido) aproximadamente y el número efectivo de grados de libertad, cuando sea requerido. Una manera de expresar el resultado de la medición es:

$$Y = y \pm U \quad (4.1)$$

Como recomendación general, los valores numéricos del estimado y su incertidumbre no deben informarse con un número excesivo de dígitos. Es suficiente utilizar dos cifras significativas, redondeando la última cifra hacia el número superior consecutivo, aunque en algunos casos se pueden ofrecer algunos dígitos adicionales para evitar redondeos. Los valores numéricos de los estimados de salida y entrada deben redondearse de modo tal que sean consistentes con sus incertidumbres (por ejemplo, si  $y = 9,069 51 F$ , debido a un valor de  $U = 17 mF$ ,  $y$  debe redondearse a 9,070 F). Una vez la incertidumbre haya

sido redondeada, el estimado de medición debe tener las mismas posiciones decimales que su respectiva incertidumbre.

De acuerdo a lo anterior la incertidumbre expandida se presenta con 9 dígitos significativas, redondeando la última cifra al mayor número más cercano y la exactitud del mensurando debe ser consistente con tales cifras significativas. Entonces, con un nivel de confianza del 95% y 161 grados efectivos de libertad, el resultado de la medición es:

$$R_x = r_x \pm U = 99,82 \Omega \pm 0,97 \Omega \quad (4.2)$$

5. CONCLUSIONES

Generalmente, en los laboratorios de experimentación tanto de las empresas como de las universidades, se hacen mediciones sin realizar el cálculo de la incertidumbre de medición. En muchos artículos especializados a nivel nacional se puede observar todavía, cómo experimentalistas reportan medidas sin incertidumbre de medición. La mayor parte de la investigación experimental en Colombia adolece de esta falla; las medidas se realizan con instrumentos que se han comprado y nunca más vuelven a ser calibrados. En general, se puede decir que en nuestro país son muy pocos los experimentalistas que saben reportar sus medidas.

Se presentó en este trabajo una aplicación práctica de estimación de la incertidumbre de medición en mediciones indirectas, utilizando la metodología de la norma GTC-51 “Guía para la expresión de Incertidumbre en las Mediciones”[4]. La aplicación presentada se ha desarrollado de manera metodológica de tal manera que el lector pueda implementar este desarrollo en otros tipos de aplicaciones de mediciones directas.

Esperamos que este artículo sirva para crear cultura metrológica entre los experimentalistas.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Norma NTC 2194: Vocabulario de Términos Básicos y Generales en Metrología. Bogotá D.C: ICONTEC, 1997.33 p.  
 [2] BECERRA, Luis O. Número de Mediciones Necesarias [Archivo PDF en línea]. El Marqués, Querétaro: CENAM, 2004. 5 p. Disponible en Internet: (URL: <http://www.cenam.mx/simposio2004/memorias/TA-121.pdf>).  
 [3] EUROPEAN CO-OPERATION FOR ACCREDITATION (Francia). EA 4/02: Expression of the Uncertainty of Measurement in Calibration [Archivo PDF en línea]. París: EA, 1999. 79 p. Disponible en Internet: (URL: <http://www.european-accreditation.org/n1/doc/EA-4-02.pdf>).  
 [4] INSTITUTO COLOMBIANO DE NORMAS TÉCNICAS Y CERTIFICACIÓN. Norma GTC 51: Guía para la expresión de Incertidumbre en las Mediciones. Bogotá D.C.: ICONTEC, 1997.178 p.