ACCION DE CARTAN, UN CASO ESPECIAL DE ACCION DE GRUPOS EN SISTEMAS DINAMICOS

Cartan action, a special case of group actions in dynamical systems

RESUMEN
En este artículo se hace una presentación sobre las acciones de grupo y una descripción del caso especial de acción llamada acción de Cartan. Se presenta la definición de acción de Cartan y algunos resultados de equivalencia entre esta y una acción propia. Un ejemplo en el campo de los sistemas dinámicos ilustra como una acción de $\mathbf{P}$ en $\mathbf{P}^2$ define una acción de Cartan.

PALABRAS CLAVES: acción de grupos, acción de Cartan, acción propia.

ABSTRACT
In this article does a presentation about group actions and a description of special cases of action called Cartan action. It presents a definition of Cartan action and some results of equivalence between this one and proper action. An example in the field of dynamical systems illustrated how an action of P on P^2 defines a Cartan action.

KEYWORDS: *groups action, Cartan action, proper action.*

CARLOS ARTURO ESCUDERO SALCEDO
Ph.D. Matemáticas, Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
Carlos10@utp.edu.co

OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ
M.Sc. Matemáticas, Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
oscarf@utp.edu.co

LUIS EDUARDO OSORIO ACEVEDO
M.Sc. Enseñanza de las Matemáticas, Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
leosorio@utp.edu.co

1. PREELIMINARES

Definición 1. Sea X un espacio topológico y G un grupo topológico. Una acción continua de G en X es una aplicación continua $\theta : G\times X \to X$, tal que satisface las siguientes dos condiciones:

1. $\theta(e,x) = x$ para todo $x\in X$, donde e es la identidad de G y
2. $\theta(g_1,\theta(g_2,x)) = \theta(g_1 g_2,x)$ para todo $x\in X$ y $g_1,g_2 \in G$.

Para simplificar la notación, se denota $\theta(g,x)$ por $g\cdot x$.

Definición 2. Una acción de un grupo G sobre X se dice que es libre si $g\cdot x = x$ si y solo si $g = e$.

Definición 3. Sea G un grupo, dada una acción en X, se define la órbita de $x\in X$ como el conjunto $G\cdot x = \{g\cdot x, \forall g\in G\}$.

Con el concepto de órbita de un elemento, se puede hablar del espacio cociente X/G, cuyos elementos son las órbitas de la acción.

Definición 4. Si el grupo G actúa continuamente sobre un espacio topológico X, se dice que la acción es **propia** si la aplicación $\Phi : G\times X \to X\times X$ dada por $\Phi(g,x) = (g\cdot x, x)$ es una aplicación perfecta, es decir cerrada y con fibras compactas. (Esta definición es la usada en [7], [10], [44] y [50]). Además se dirá que una acción $\Phi : G\times X \to X\times X$ es de **Cartan** cuando la restricción de Φ sobre su imagen $\Phi' : G\times X \to P_\pi$, $\Phi'(g,x) = \Phi(g,x) = (g\cdot x, x)$ es perfecta. Donde $P_\pi = \{(y,x)\in X\times X : y = g\cdot x, \forall g\in G\}$. (La definición de acción de Cartan es tomada de [44] y es más general que la definición usada en [46], pero en [44], se hace la demostración de la equivalencia entre ambas definiciones)

Definición 5. Sea G un grupo que actúa continuamente en un espacio topológico X y sean $A,B \subseteq X$, se define $G_{A,B}$ como $G_{A,B} = \{g\in G : g\cdot A\cap B \neq \varnothing\}$ cuando $A = B$, solo se denotará por G_A.

Como consecuencia de la definición 4 y 5 se tienen los siguientes resultados:

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 22 de Agosto de 2009

Proposición 6. Supóngase que un grupo G que actúa sobre un espacio topológico X. Entonces X/G es Hausdorff, si y solo si P_π es cerrado en $X \times X$.

Corolario 7. Supóngase que un grupo G que actúa sobre un espacio topológico X. Si la acción es propia entonces X/G es Hausdorff.

Corolario 8. Supóngase que un grupo G que actúa sobre un espacio topológico X. Una acción de Cartan es propia si y solo si X/G es Hausdorff.

Las demostraciones de la proposición 6 y corolarios 7 y 8 se encuentran en [44].

Proposición 9. Supóngase que un grupo topológico G actúa continuamente en un espacio topológico X. Sean K y L subconjuntos compacto de X. La acción es propia si y solo si $G_{K,L} = \{g \in G : g \cdot K \cap L \neq \emptyset\}$ es un conjunto compacto.

Corolario 10. Supóngase que un grupo topológico G actúa continuamente en un espacio topológico X. Sea K subconjunto compacto de X. La acción es propia si y solo si $G_K = \{g \in G : g \cdot K \cap K \neq \emptyset\}$ es un conjunto compacto.

2. SISTEMAS DINÁMICOS COMO UNA ACCIÓN DE GRUPOS

El hecho que la acción de un grupo Hausdorff localmente compacto G en un espacio Hausdorff X sea de Cartan es una propiedad local, puesto que cada punto x está contenido en un conjunto abierto U tal que el conjunto $G_U = \{g \in G : gU \cap U \neq \emptyset\}$ tiene clausura compacta en G. Por otro lado que la acción sea propia es una propiedad global. El ejemplo 12, tomado de [3] el cual es una modificación al ejemplo de Palais [46], muestra que si una acción es de Cartan, no implica que es propia. Pero antes, para una mejor compresión, se explicará en detalle un caso muy especial e importante de acción de grupos como son los sistemas dinámicos.

Se puede pensar en un sistema dinámico como la evolución de un sistema físico a través del tiempo, como por ejemplo el movimiento de los planetas bajo la influencia de las fuerzas gravitacionales. De manera más formal, la definición más general de un sistema dinámico, es una acción de un grupo G sobre un espacio (variedad diferenciable) X, llamado *espacio fase*. Cuando $G = \mathrm{Z}$ se obtiene un sistema dinámico discreto, si $G = \mathrm{P}$ un sistema dinámico continuo y el espacio de todos los posibles sistemas dinámicos es el grupo de difeomorfismos de X. Un caso particular muy estudiado es cuando $G = \mathrm{P}^n$.

Sea V un campo vectorial suave en P^n y $x \in \mathrm{P}^n$ Supóngase que las soluciones a la ecuación diferencial $x' = V(x)$ están siempre definidas, y sean $x_0 \in \mathrm{P}^n$ un vector fijo y $\varphi_x(t)$ la solución con condición inicial $x(0) = x_0$. Se puede definir la función $\varphi_t : \mathrm{P}^n \to \mathrm{P}^n$ dada por $\varphi_t(x) = \varphi_x(t)$. Entonces φ_t es un difeomorfismo de P^n. (Si se considera la aplicación $\varphi : \mathrm{P} \times \mathrm{P}^n \to \mathrm{P}^n$, $\varphi(t,x)$ esta aplicación define la acción de P sobre P^n y además $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, y $\varphi_0(x) = x_0$ por ser la condición inicial. Se llama al conjunto $\{\varphi_t : t \in \mathrm{P}\}$ un flujo en P^n. Recíprocamente, si $\{\varphi_t\}$ induce en P^n una acción, se le puede asociar un campo vectorial V en P^n (el generador infinitésimo de la acción) definido por $V(x) = \frac{d}{dt}\varphi_t(x) \Big|_{t=0}$. Para relacionar la terminología de los sistemas dinámicos con la presentada en el artículo se dará la siguiente definición:

Definición 11. Sean U un abierto de P^n, $x_0 \in U$ y sea $x(t)$ la solución única (La solución existe y es única por el teorema de existencia y unicidad de la solución de un sistema de ecuaciones, sujeto a una condición inicial) de la ecuación $x' = V(x)$ con la condición inicial $x(0) = x_0$.

1. La curva integral de x_0 es el conjunto $\{(t,x) \in \mathrm{P} \times U : x = x(t)\}$
2. La trayectoria de x_0 es el conjunto $\{x \in U : x = x(t), t \in \mathrm{P}\}$, (es decir la trayectoria es la órbita de x_0)
3. El flujo de la ecuación $x' = V(x)$ es la aplicación $\varphi : \mathrm{P} \times U \to U$, $\varphi(t, x_0) = \varphi_t(x_0) = x(t)$ (en otras palabras, el flujo define la acción de P sobre $U \subseteq \mathrm{P}^n$).

Geométricamente, la órbita es una curva en el abierto U que contiene a x_0 tal que el campo vectorial $V(x)$ es tangente a la curva en cualquier punto x de la curva. La unicidad de la solución significa que existe una sola órbita por cualquier punto en el abierto U.

Por definición, se cumple que el flujo es efectivamente una acción: Se tiene que para todo $x_0 \in U$, y la unicidad

1. Las notas de pie de página deberán estar en la página donde se citan. Letra Times New Roman de 8 puntos

de la solución implica que $\varphi_t \circ \varphi_s(x_0) = \varphi_{t+s}(x_0)$. Considérese el siguiente ejemplo (tomado de [3]).

Ejemplo 12. Sea $X = P^2$ y $G = P$. La idea es definir la acción de P en P^2 por el flujo del campo vectorial suave en P^2 dado por $V(x, y) = (\cos x, \operatorname{sen} x)$. Este campo vectorial es invariante con respecto a las traslaciones verticales. Se construirá una ecuación explícita que describa la acción de P sobre P^2. Si se considera el sistema $(x', y') = (\cos x, \operatorname{sen} x)$, sus curvas integrales son líneas verticales (se llamarán órbitas especiales) para $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, $n \in Z$, y curvas que satisfacen la ecuación $\gamma'(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \tan x$ (se llamarán órbitas regulares). Entonces la ecuación de las curvas integrales es $\gamma(x) = \ln|\cos x|^{-1} + c$, con $c \in P$ si $x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi$, o $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, (ver figura 1.)

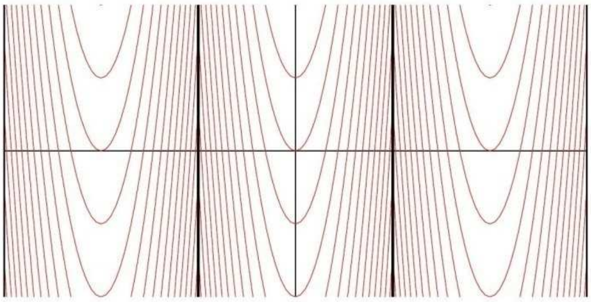

Figura 1.

En las órbitas especiales, es inmediato que la acción sea simplemente la traslación vertical hacia arriba o abajo. Para una órbita regular, se quiere determinar la posición de un punto arbitrario a lo largo de la trayectoria como una función del punto inicial (x, y) y la longitud t de la curva que une a los dos puntos. (Por construcción, la longitud de la curva es el elemento del grupo P por el cual el punto inicial (x, y) se desplaza hasta un punto arbitrario sobre la órbita). Obsérvese que dada una órbita regular en particular, todas las órbitas regulares pueden ser obtenidas por una traslación vertical de la órbita elegida, esto implica que la primera coordenada de un punto arbitrario sobre una órbita depende únicamente de la primera coordenada x del punto inicial y del elemento t del grupo P. Denotemos la primera coordenada del punto arbitrario por $\varphi(t, x)$. Según lo descrito, se tiene por la ecuación de longitud de arco que $\int_x^{\varphi(t,x)} \sqrt{1 + (\gamma'(s))^2}\, ds = t$. Cuya solución viene dada por

$$\varphi(t,x) = \begin{cases} \operatorname{sen}^{-1}(\varphi_0(t,x)) + 2\pi n, \; si \; x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \\ \pi - \operatorname{sen}^{-1}(\varphi_0(t,x)) + 2\pi n, \; si \; x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \right) \end{cases}$$

donde $\varphi_0(t, x) = \frac{e^t(1 + \operatorname{sen} x) - e^{-t}(1 - \operatorname{sen} x)}{e^t(1 + \operatorname{sen} x) + e^{-t}(1 - \operatorname{sen} x)}$.

Nótese que φ está bien definido incluso en los valores especiales de x, es decir, para $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$, es decir, la aplicación es continua en todos estos puntos y es independiente de t. Esta aplicación concuerda con la acción en las órbitas especiales.

Ahora se debe encontrar el comportamiento de la segunda coordenada bajo la acción de grupo, obsérvese para esto, que la segunda coordenada del punto puede ser escrita como $y + \phi(t, x)$, donde (x, y) es el punto inicial, t es el elemento del grupo bajo el cual el punto inicial ha sido movido, y

$$\phi(t, x) = \gamma(\varphi(t, x)) - \gamma(x) = \ln\left(\frac{e^t(1 + \operatorname{sen} x) + e^{-t}(1 - \operatorname{sen} x)}{2} \right)$$

Otra vez, la invariancia vertical hace irrelevante que órbita regular se ha tomado. Así se ha llegado a una ecuación explícita para la acción continua:

$\theta : P \times P^2 \to P^2$, dada por la ecuación:

$$\theta(t, (x, y)) = (\varphi(t, x), y + \phi(t, x)).$$

El que sea acción se satisface directamente de la comprobación que:

$$\varphi(t_1, \varphi(t_2, x)) = \varphi(t_1 + t_2, x),$$

$$\phi(t_1, \phi(t_2, x)) = \phi(t_1 + t_2, x)$$

Y que

$$\varphi(0, x) = x, \quad \phi(0, x) = 0$$

Además la acción es libre, en efecto, para cualquier $x \in P$, si $\varphi(0, x) = x$ y $\phi(t, x) = 0$, entonces $t = 0$.

Esta acción es de Cartan, para ver esto considérense los puntos (x, y) que no pertenecen a las órbitas especiales y sea K un compacto que contiene a (x, y) y cuya intersección con las órbitas especiales es vacío, así el conjunto G_K es un conjunto compacto. Pero la acción no es propia, para ver esto considérense compactos K y L que contienen los puntos $(-\pi/2, 0)$ y $(\pi/2, 0)$ respectivamente, y ambos lo suficientemente pequeños. Como las trayectorias difieren por una constante, a partir de cierto valor de dicha constante, todas las trayectorias se intersecan con K y L. Así, la longitud de K a L a lo largo de una trayectoria se vuelve arbitrariamente grande, entonces el subconjunto $G_{K,L}$ de P no es acotado, por lo tanto no es compacto. En otras palabras, la aplicación $\Phi : G \times X \to X \times X$ dada por

$\Phi(g,x)=(g\cdot x,x)$ es continua, y por ser la acción libre es inyectiva, pero no es una aplicación propia, esto se manifiesta en no poseer la propiedad de que el espacio cociente $X/G=\mathrm{P}^2/\mathrm{P}$ no es Hausdorff, esto último puesto que las vecindades de las órbitas especiales no pueden ser separadas por ningún conjunto abierto.

3. CONCLUSIONES

Se consideran dos tipos de acciones, las acciones de Cartan y las acciones propias (propias en el sentido de Bourbaki). Para el caso de una acción de Cartan debe cumplirse que para todo x en el espacio, existe una vecindad U tal que el conjunto G_U tenga clausura compacta en G, para el caso de una acción propia, para todo par de puntos x,y en el espacio existen vecindades U y V de x e y respectivamente tales que $G_{U,V}$ tiene clausura compacta en G. Ver [46].

En el artículo de Palais [46]. Dice que una acción es (Palais-) propia (propias en el sentido de Palais), si para todo punto $x\in X$ existe una vecindad fija U tal que para cada $y\in X$, existe una vecindad V, tal que el conjunto $G_{U,V}$ tiene clausura compacta en G. Esta definición de acción propia es más restrictiva que la definición dada por Bourbaki [10], en consecuencia se tiene lo siguiente: Las acciones Palais-propias son (Bourbaki-) propias, y las (Bourbaki-) propias son de Cartan.

El ejemplo 12, muestra como una acción de Cartan no es Bourbaki-propia, donde se ilustra la caracterización de las acciones propias, que hacen que el espacio cociente sea un espacio Hausdorff, lo cual no necesariamente lo satisface una acción de Cartan.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] M.A. Armstrong. *Topología Básica*. Editorial Reverté S.A, 1987.

[2] P. Baum, A. Connes, N. Higson, *Classifying space for proper actions and* K*-Theory of group* C^**-Algebras*, Contemp. Math. 167 (1994), pp.241-291.

[3] P. Baum, P. M. Hajac, R. Matthes, W. Szymánski. *Non-commutative geometry approach to principal and associated bundles*. To appear in book Quantum Symmetry and Noncommutative Geometry (ed. By P. M. Hajac), 2006.

[4] A. Becker. *Matrix groups, An Introduction To Lie Groups*. Springer, 2002.

[5] E.T. Bell. *Los Grandes Matemáticos*. Preparado por Patricio Barros. Edición en internet: http://www.geocities.com/grandesmatematicos/index.html.

[6] H. Biller. *Proper actions on cohomology manifolds*, Preprint 2182, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001. Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2182.html.

[7] H. Biller. Characterizations of Proper *Actions*, Preprint 2211, Fachbereich Mathematik, Technische Universitat Darmstadt, 2001, Edición en internet: http://wwwbib.mathematik.tu-armstadt.de/Preprints/shadows/pp2211.html.

[8] R.H. Bing. *A homeomorphism between the 3-sphere and the sum of two solid horned spheres*, Ann. of Math.56 (1952), 354-362.

[9] F. Brickell, R.S. Clark. *Differentiable Manifolds an introduction*. Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[10] N. Bourbaki. *General topology*, Part 1, Hermann, Paris and Addison-Wesley, Reading, 1966, the translation of Topologie Generale, Hermann, Paris.

[11] W.M. Boothby. *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, 2a Ed. Academic press, inc, 1986.

[12] M.P. Do Carmo. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser Boston, 1993.

[13] J. Dugundji. *Topology*, Allyn and Bacon, 1970.

[14] R. Engelking. *General Topology*. Heldermann, 1989

[15] J. Fraleigh. *Algebra Abstracta-3aEd*. Addison Wesley Iberoamérica, 1967.

[16] A. Gleason. *Spaces with a compact Lie group of transformations*, Proc. Amer. Math. Soc., 1 (1950), 35-43.

[17] V. Guillemin, Yael Karshon, Viktor L. Ginzburg. *Moment Maps, Cobordisms, and Hamiltonian Group Actions*. AMS, 2002.

[18] I.N. Herstein. *Algebra Moderna* Editorial Trillas México, 1964.

[19] K.H. Hofmann, S.A. Morris. *The structure of compact groups*, Walter de Gruyter, Berlin, 2006

[20] S. Illman. *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: a contribution to Hilbert's fth problem*, Ann. of Math. Stud. 138 (1995), 189-220.

[21] S. Illman. *Hilbert's fifth problem and proper actions of Lie groups*, Current Trends in transformation groups, 1-23, K-Monogr. Math., 7, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002

[22] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. press, New York, 1991.

[23] M.A. Kervaire. *A manifold which does not admit any differentiable structure*, Comment. Math. Helv. 34(1960), 257-270.

[24] Kobayashi, Shoshichi- Nomizu, Katsumi. *Foundations of differential geometry*, Vol I, Vol II. John Wiley & Sons, 1963.

1. Las notas de pie de página deberán estar en la página donde se citan. Letra Times New Roman de 8 puntos

[25] T. Kobayashi. *Discontinuous Groups for Non-Riemannian Homogeneous Spaces* -2001. Edición en internet: www.akagi.ms.u-tokyo.ac.jp/~toshi/texdvi/Kobaya3.pdf

[26] T. Kobayashi. *Criterion for proper actions on homogeneous spaces of reductive groups*, J. Lie Theory, 6 (1996), 147-163. Edición en internet: http://www.emis.de/journals/JLT/vol.6 no.2

[27] T. Kobayashi. *Proper action on a homogeneous space of reductive type*, Math. Ann. 285. (1989), 249-263.

[28] T. Kobayashi. *Compact Clifford-Klein forms of symmetric spaces-revisited*. Edición en internet: www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1537.pdf.

[29] T. Kobayashi. *Deformation of properly discontinuous actions of* $\mathbb{Z}^k$ *on* P^{k+1}, www.kurims.kyoto-u.ac.jp/preprint/_le/RIMS1536.pdf.

[30] T. Kobayashi. *On discontinuous group actions on non-Riemannian homogeneous spaces*, www.kurims.kyotou.ac.jp/preprint/file/RIMS1537.pdf.

[31] T. Kobayashi. *Introduction to actions of discrete groups on pseudo-Riemannian homogeneous manifolds*, Acta Appl. Math., 73 (2002), 115-131.

[32] J.L. Koszul. *Sur certains groupes des transformations de Lie, Colloque de Géométrie Différentielle*, Strasbourg, (1953).

[33] J.M Lee. *Introduction to Topological Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[34] J.M Lee. *Introduction to Smooth Manifolds*. Springer-Verlag, New York, 2003.

[35] T. Matumoto, M. Shiota. *Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its applications in: Homotopy Theory and Related Topics*. Adv. Stud. Pure Math., vol. 9, Kinokuniya, Tokyo, 1986, 41-55.

[36] J. Milnor. *Introduction to algebraic* K*-theory*. Princeton University Press-1971.

[37] G. Mislin, A. Valette. *Proper Group Actions and the Baum-Connes Conjecture*, Advanced Courses in Mathematics, Birkhäuser Barcelona 2003.

[38] D. Montgomery, C.T. Yang. *The existence of a slice*, Ann. of Math., 65 (1957), 108-116.

[39] D. Montgomery, L. Zippin. *Examples of transformation groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 5(1954),460-465.

[40] D. Montgomery, L. Zippin. *Small subgroups of finite-dimensional groups*, Ann. of Math. 56(1952), 213-241.

[41] G.D. Mostow. *Equivariant imbeddings in euclidean space*, Ann. of Math., 65 (1957), 432-446.

[42] J.R. Munkres. *Topología 2ª Ed*. Pearson Educación S.A.-2002.

[43] J.V.Neumann. *Die Einf uhrung analytischer Parameter in topologischen Gruppen*, Ann. of Math.34 (1933), 170-190.

[44] S. de Neymet U. *Introducción a los grupos topológicos de transformaciones*. Sociedad Matemática Mexicana, 2005.

[45] R.S. Palais C^1*-actions of compact Lie groups on compact manifolds are* C^1*-equivalent to* C^1*-actions*, Amer. J. Math. 92 (1970), 748-760.

[46] R. S. Palais. *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math. (2), 73 (1961), 295-323.

[47] R.S. Palais, *The classification of G-spaces*, Memoirs of Amer. Math. Soc., 36 (1960).

[48] L.S. Pontraguin. *Grupos continuos*. Editorial MIR, 1978.

[49] J.J. Rotman. *An introduction to the theory of groups*. *4a.Ed*. Springer Verlag, New York, 1995.

[50] T. tom Dieck. *Transformation groups*, Studies in Mathematics, vol 8. Walter de Gruyter, 1987.