SOLUCIÓN EN SERIES PARA SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

RESUMEN
En este artículo se propone un procedimiento para hallar la solución en series para del problema diferencial mixto del tipo
$u_t(x,t) - A(t)u_{xx}(x,t) = 0$, $0 < x < p$, $t > 0$, $u(0,t) = u(p,t) = 0$,
$u(x,0) = f(x)$. Se considera que $u(x,t)$, $f(x) \in \pounds^{m}$ y $A(t) \in \pounds^{m\times m}$.

PALABRAS CLAVES: Sistema de ecuaciones diferenciales parciales, series de fourier, norma logarítmica.

ABSTRACT
In this paper we construct an exact series solution of mixed problems of the type
$u_t(x,t) - A(t)u_{xx}(x,t) = 0$, $0 < x < p$, $t > 0$, $u(0,t) = u(p,t) = 0$,
$u(x,0) = f(x)$. Here, $u(x,t)$, $f(x) \in \pounds^{m}$ and $A(t) \in \pounds^{m\times m}$.

KEYWORDS: Partial differential equation system, fourier series, logarithmic norm.

ABEL E. POSSO AGUDELO
Matemático.
PhD. Ciencias Matemáticas
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

JOSÉ R. GONZALEZ GRANADA
Profesor Auxiliar, PhD
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

CARLOS ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil.
Mg. En Matemáticas
Profesor Auxiliar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

En este artículo se propone un procedimiento para obtener la solución en series del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales

$$u_t(x,t) - A(t)u_{xx}(x,t) = 0, \quad 0 < x < p, \quad t > 0, \qquad (1)$$
$$u(0,t) = u(p,t) = 0 \qquad t > 0, \qquad (2)$$
$$u(x,0) = f(x). \qquad 0 \le x \le p, \qquad (3)$$

donde $u = (u_1, u_2, K, u_m)^T$ y $f(x)$ son vectores en $\pounds^{m}$ y $A(t) \in \pounds^{m\times m}$ es una matriz con derivada de segundo orden continua.
Sistemas diferenciales de este tipo aparecen en algunos problemas de difusión.
Métodos numéricos para resolver sistemas diferenciales parciales han sido ampliamente estudiados, sin embargo, la solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales puede satisfacer propiedades físicas importantes que la solución numérica puede no satisfacer. Esto motiva la búsqueda de soluciones analíticas del sistema (1) - (3).

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2009

2. SOLUCIÓN EN SERIES

Siguiendo el procedimiento para hallar soluciones en series de ecuaciones diferenciales parciales escalares, se considera el problema de valor inicial

$$T_n'(t) + \left(\frac{n\pi}{p}\right)A(t)T_n(t) = 0, \ T_n(0) = c_n, \ t > 0, \qquad (4)$$

donde c_n es el enésimo coeficiente de la serie de fourier en senos de $f(x)$, dado por

$$c_n = \tfrac{2}{p}\int_0^p f(x)sen(\tfrac{n\pi x}{p})dx, \quad n \ge 1. \qquad (5)$$

Asumiendo que la matriz $A(t)$ satisface la condición

$$A(t_1)A(t_2) = A(t_2)A(t_1) \text{ para } t_1 \ge t_2 \ge 0, \qquad (6)$$

se tiene que la solución de (4) esta dada por

$$T_n(t) = \exp\left[-\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \int_0^t A(s)ds\right]c_n, \quad t \ge 0, \quad n \ge 1.$$

La sucesión de funciones

$$u_n(x,t) = \exp\left[-\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \int_0^t A(s)ds\right]c_n sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right), \qquad (7)$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} - A(t)\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad 0 < x < p,\ t > 0, \quad (8)$$

y la condición de frontera

$$u_n(0,t) = u_n(p,t) = 0, \quad t > 0, \quad (9)$$

Luego la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t)$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left[-\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \int_0^t A(s)ds \right] c_n sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right), \quad (10)$$

satisface formalmente las condiciones (1) y (2).

Puesto que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right),$$

la condición inicial (3) se satisface si la función f puede ser expresada como una serie de fourier de senos. De [3, pág. 57] y [8, pág. 46], si f es una función continua en $[0,\ p]$ tal que $f(0) = f(p) = 0$ y tal que cada función componentes f_j para $1 \le j \le m$ es suave a trozos entonces f satisface la condición (3).

Para probar que $u(x,t)$ definida por (10) es una solución rigurosa del problema (1)-(3) consideramos la norma logarítmica $\mu(A)$ de la matriz A definida en [4], pág. 111, por

$$\mu(A) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}, \quad (11)$$

donde $\|\cdot\|$ denota la 2-norma definida por

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}, \text{ siendo } \|\cdot\|_2 \text{ la norma euclideana.}$$

Puesto que

$\mu(\alpha A) = \mu(\alpha A)$ para todo $\alpha \ge 0$, entonces, por [4], se tiene que

$$\|T_n(t)\| \le \|c_n\| \exp\left[\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \int_0^t \mu(-A(s))ds \right], \quad t \ge 0. \quad (12)$$

Consideremos que $\sigma(A)$ es el conjunto de los valores propios de la matriz $A(t)$ y que $\Omega = [0,p]\times[t_0,t_1]$.

Suponiendo que $q > 0$ es una cota inferior del conjunto $\sigma\left(\frac{A(t)+A^H(t)}{2}\right)$, donde $A^H(t)$ denota la transpuesta conjugada de $A(t)$, sea

$$d[t_0,t_1] = \min_{t_0\le t\le t_1} \left\{ v : v \in \sigma\left(\tfrac{A(t)+A^H(t)}{2}\right) \right\}.$$

Por propiedades de la norma logarítmica se tiene que $\mu(A(t)) \ge \mathrm{Re}(v)$ para cada $v \in \sigma(A(t))$, y por el teorema de Bendixson (ver [9] pág. 395) se tiene que

$$\mu(A(t)) \ge d[t_0,t_1] \ge q \text{ para } t_0 \le t \le t_1. \quad (13)$$

De (12) y (13) se tiene que

$$\|T_n(t)\| \le \|c_n\| \exp\left[-t\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 q \right], \quad t \ge 0. \quad (14)$$

Por el lema de Riemann-Lebesgue la sucesión $\|c_n\|$ es acotada lo cual implica la serie $u(x,t)$ definida por (10) es absolutamente convergente en Ω.

Derivando término a término con respecto a t la serie $u(x,t)$ y considerando que

$$T_n'(t) = -\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 A(t)T_n(t), \quad t \ge 0, \quad n \ge 1,$$

se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(t) sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right)$$
$$= -A(t)\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 T_n(t) sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right).$$

Sea $\beta = \max_{t_0\le t\le t_1} \|A(t)\|$. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} \right\| \le \beta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \|c_n\| \exp\left[-t\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 q \right].$$

Derivando dos veces la serie $u(x,t)$ con respecto a x se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 T_n(t) sen\left(\tfrac{n\pi x}{p}\right) c_n.$$

Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\| \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} \right\| \le \|c_n\| \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 \exp\left[-t_0\left(\tfrac{n\pi}{p}\right)^2 q \right].$$

Por [2] se tiene que la serie $u(x,t)$ definida por (10) es continua, dos veces diferenciable con respecto a x y una vez con respecto a t, lo cual implica que dicha serie es una solución rigurosa del problema diferencial (1)-(3) para cualquier función f continua en $[0,\ p]$ tal que $f(0) = f(p) = 0$ y tal que cada una de sus componentes f_j es una función suave a trozos.

3. CONCLUSIONES

Muchos sistemas físicos no pueden ser descritos mediante una ecuación diferencial simple sino que deben ser modelados por un sistema de ecuaciones diferenciales parciales. Tal situación aparece, por ejemplo, en problemas de difusión del calor. La solución analítica de un sistema de ecuaciones diferenciales parciales puede mostrar propiedades físicas importantes que la solución numérica no exhibe, lo cual motiva la búsqueda de soluciones analíticas de tales sistemas.

En este artículo se propone una solución formal en series del sistema (1)-(3) la cual, bajo las condiciones impuestas tanto a la matriz $A(t)$ como a la función $f(x)$, constituye una solución analítica de dicho sistema.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] W. F. Ames. *Numerical methods for Partial Differential Equations,* Academic Press, New York. 1997.

[2] T. M. Apostol. *Mathematical analysis.* Addison Wesley. 1977.

[3] R. V. Churchill and J. W. Brown. *Fourier series and Boundary Value problems.* McGraw-Hill. New York. 1978.

[4] T. M. Flett. *Differential analysis. Cambridge University Press. 1980.*

[5] L. Jódar, A. E. Posso A., *Analytic numerical approximation with a priori error bound for the wave equation with time dependent coefficient.* Mathematical and computer modeling.Vol. 29, 2002, pág. 1-14.

[6] L. Jódar, M. J. Rodríguez-Alvarez, G. Rubio, A. E. Posso. A *Exact solution of variable coefficient mixed hyperbolic partial differential problems.* Applied Mathematics Letters. Vol. 16, 2003, pág. 309-312.

[7] L. Jódar. E. Ponsoda. *Anayitic approximate solutions and error bounds for linear matrix differential equations appearing in control.* Control and Cybernetics 21 (3/4) 21-34 (1992).

[8] M. A. Pinsky. *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems with Applications.* 3rd ed. McGraw Hill.1998.

[9] J. Stoer, R. Burlirsch. *Introduction to Numerical Analysis.* Springer-Verlag, New York. 1980.

1. Las notas de pie de página deberán estar en la página donde se citan. Letra Times New Roman de 8 puntos