CARACTERIZACION DE LAS EVOLUTAS DE CURVAS PLANAS

Characterization of the evolutes of planes curves

RESUMEN
En este artículo se presentan tres formas de determinar la evoluta de una curva plana. La primera forma consiste en definir campos de Jacobi a lo largo de una recta normal a la curva plana y la evoluta será el lugar geométrico donde dichos campos se anulan. La segunda consiste en usar algunos resultados de la teoría de contacto y singularidades, es decir se verifica que el conjunto formado por los puntos que son centros de círculos que tiene contacto de orden 3 con la curva plana es la evoluta de dicha curva. Por último se determina la evoluta como la envolvente de la rectas normales a la curva plana.

PALABRAS CLAVES: Evoluta, contacto, singularidades, envolvente,punto focal.

ABSTRACT
In this article three forms appear to determine evolute of a plane curve. The first form consists of defining fields of Jacobi throughout a normal straight line to plane curve end evolute will be the geometric place where these fields are annulled. Second it consists of using some results of the contact theory and singularities, that is to say the set formed by the points is verified that are center of circles that contact of order 3 has with plane curve is the evolute of this curve. Finally evolute is determined of like the surrounding of normal straight lines the plane curve.

KEYWORDS: Evolute, contact, singularities,surrounding,focal point

CARLOS ARTURO ESCUDERO
Matemático, Ph.. D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
carlos10@utp.edu.co.

YURI ALEXANDER POVEDA
Matemático, Ph.. D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co.

LEONARDO PRIETO
Matemático, Ph.. D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
lprieto@utp.edu.co.

1. INTRODUCCIÓN

En la literatura de la geometría diferencial clásica, mirar [2], definen la evoluta de una curva plana $\alpha:[a,b]\to R^2$ parametrizada por la longitud de arco s como

$$\gamma(s)=\alpha(s)+\frac{1}{k(s)}n(s), \quad (1.1)$$

donde k(s) y n(s) son la curvatura y el normal de α en el instante s respectivamente.

El interés principal de este artículo es determinar la evoluta de α como (1.1) de tres maneras diferentes.

La primera forma consiste en definir campos de Jacobi a lo largo de una recta normal a α y la evoluta será el lugar geométrico donde dichos campos se anulan.

También se determinará la evoluta de α usando algunos resultados de la teoría de contacto y singularidades [1], es decir se verificará que el conjunto formado por los puntos que son centros de círculos que tiene contacto de orden 3 con α es la evoluta de dicha curva.

Por último se determinará la evoluta de α como la envolvente de la rectas normales a α.

2. PUNTOS FOCALES Y CAMPOS DE JACOBI

En esta sección se establece los campos de Jacobi a lo largo de una recta normal a α y se tiene que el tiempo que tarda en anularse dicho campo coincide con el radio de curvatura de α.

2.1 Observación. Si $\gamma:[a,b]\to R^2$ es la parametrización de una recta por la longitud del arco t y $\gamma(0)=x_0, \gamma'(0)=v_0$, entonces γ se puede expresar como

$$\gamma(t)=x_0+tv_0 \quad (1.2)$$

Fecha de Recepción: 8 de junio de 2009
Fecha de Aceptación: 23 de Agosto de 2009

Si $\alpha:[a,b]\to R^2$ es una curva regular, parametrizada por la longitud de arco s, definimos la variación de γ respecto a la curva α por la familia de curvas definidas así:

$$\gamma_s(t)=\alpha(s)+tn(s) \quad (1.3)$$

Observe que, para cada s_0 fijo $\gamma_{s_0}(t)$ es una recta normal a $\alpha(s)$ en el punto $\alpha(s_0)$. Por definición, mirar [2], el campo variacional

$$y(t)=\frac{\partial\gamma}{\partial s}(t,s_0) \quad (1.4)$$

es un campo de Jacobi a lo largo de la recta γ ortogonal a la curva α.

Definición. Sean $\alpha(s),\gamma_s(t),y(t)$ como antes, se dice que $\gamma_s(t)$ es un punto focal respecto a la curva α si $y(t)=0$.

Usando las formulas de Frenet-Serret se tiene que un punto focal de α es cuando,

$$t=\frac{1}{k(s)} \quad (1.5)$$

Se dice que el conjunto focal de α es el conjunto formado por los puntos focales.

De lo anterior se tiene el siguiente resultado.

Teorema. Sea $\alpha:[a,b]\to R^2$ una curva regular parametrizada por la longitud del arco s. Entonces el conjunto focal de α es la evoluta de α.

3 ORDEN DE CONTACTO Y SINGULARIDADES

En esta sección exponemos algunos resultados clásicos de la teoría de singularidades y de contacto. Aunque se utilizará estos resultados sólo para $n=2$ y $n=3$, se exponen en general ya que implica la misma dificultad.

3.1 Definición. Sea $F:U\subset R^n\to R$, U un abierto de R^n, una función diferenciable. Diremos que $x\in R^n$ es un punto regular de F, si $DF(x)\neq 0$.

Un valor regular de una función F es un punto $c\in R$ tal que todo x de F con $F(x)=c$ es un punto regular.

3.2 Definición. Sean $\alpha:[a,b]\to R^n$ una curva regular parametrizada por la longitud del arco s y 0 un valor regular de una función F. Se dice que α y $F^{-1}(0)$ tiene un punto de contacto de orden k en $\alpha(s_0)$ si la función f definida por

$$f(s)=F(\alpha_1(S),\alpha_2(S),...\alpha_n(S))=F(\alpha(S)),$$

satisface

$$f(s_0)=f'(s_0)=...f^{(k-1)}(s_0)=0,\ f^{(k)}(s_0)\neq 0.$$

3.3 Definición. Un vértice de una curva plana $\alpha(s)$ es un punto $\alpha(s_0)$ para el cual existe un círculo, cuyo contacto en dicho punto es de orden 4.

3.4 Observación. Observe que el círculo a que hace referencia la definición anterior se puede pensar como $F^{-1}(0)$, tomando $F(x)=d^2(x,u)-r^2$, donde $d(x,u)$ es la distancia del punto x al punto u. Este punto u es el centro y r el radio. Por lo tanto, α tiene un vértice en $\alpha(s_0)$ si y sólo si,

$$f^{(i)}(s_0)=0, i=1,2,3,\ f^{(4)}(s_0)\neq 0,$$

donde $f(s)=F(\alpha(s))$.

3.5 Teorema. Sean $\alpha:[a,b]\to R^2$ una curva regular parametrizada por la longitud del arco s y $k(s)$ la curvatura de α en el instante s. Si $k(s)\neq 0$ entonces existe un círculo que tiene contacto de orden 3 con α en el instante s y cuyo centro es un punto focal.

Demostración. Suponga que $T(s)$ y $n(s)$ son los vectores tangente y normal unitarios de α. Consideremos la función distancia al cuadrado de un punto $u\in R^2$ a la curva α.

$f(s) = \langle \alpha(s) - u, \alpha(s) - u \rangle.$

Usando las fórmulas de Frenet-Serret tenemos que:

$f'(s) = 2\langle \alpha(s) - u, T(s) \rangle$

$f''(s) = 2 + 2\langle \alpha(s) - u, k(s)n(s) \rangle$

$f''(s) = 2\langle \alpha(s) - u, k'(s)n(s) \rangle - 2\langle \alpha(s) - u, k^2(s)T(s) \rangle,$

con un calculo directo se obtiene que:

$$f^4(s) = \frac{-2k''(s)}{k(s)}.$$

Por tanto,

$f'(s) = 0 \Leftrightarrow \alpha(s) - u = \lambda(s)n(s),$ para $\lambda(s) \in R.$

$f'(s) = f''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \alpha(s) + \dfrac{1}{k(s)}n(s),$ con $k(s) \neq 0.$

$f'(s) = f''(s) = f'''(s) = 0 \Leftrightarrow u = \alpha(s) + \dfrac{1}{k(s)}n(s),$ con $k(s) \neq 0,$ y $k'(s) = 0.$w

3.6 Observación. Se puede hacer varios comentarios del resultado anterior:

i) Si $k(s) \neq 0,$ entonces existe un círculo que tienes al menos un punto de contacto de orden 3 con $\alpha(s)$; este círculo es llamado **círculo osculador** de α ; su centro es $\alpha(s) + \dfrac{1}{k(s)}n(s),$ es llamado **centros de curvatura o punto focal** de α y su radio $\rho(s) = \dfrac{1}{k(s)}$ es se conoce como el **radio de curvatura.**

ii) Una condición necesaria y suficiente para que el punto $\alpha(s)$ sea un vértice, es que $k(s) \neq 0$ y $k'(s) = 0.$

iii) Un vértice ocurre precisamente en un máximo o mínimo de la curvatura, ya que $f^4(s) = \dfrac{-2k''(s)}{k(s)}.$

4. ENVOLVENTE.

En esta sección se estudiará una técnica para determinar la envolvente de una familia de curvas. En particular se aplicará cuando la familia de de curvas son rectas normales a una curva plana $\alpha.$

Sea $F : D \subset R \times R^n \to R$ una función diferenciable en un dominio abierto D de $R \times R^n$. Se denota las coordenadas de este dominio por $(s, x_1, x_2, \ldots x_n)$ y se considera $F_s(x) = F(s, x)$ una familia de funciones de parámetro s, donde $x = (s, x_1, x_2, \ldots x_n)$.
Suponga que para cada s, 0 es un valor regular de F_s, es decir, $F_s(x) = 0$ y $\dfrac{\partial F_s}{\partial x_i}(s, x) \neq 0$ para algún i. Por lo tanto $M_s = F_s^{-1}(0)$ es una subvariedad de dimensión n-1 en R^n, por ejemplo, para $n = 2$ es una curva y para $n = 3$ es una superficie.

Es claro que si 0 es un valor regular de F_s, para todo s, entonces 0 es un valor regular de F. Por lo tanto $F^{-1}(0)$ es una subvariedad de R^{n+1}.
Para $n = 2$ es una superficie, que se obtiene al separar cada curva M_s del plano y moverla a un nivel s en la tercera dimensión, ya que

$$F^{-1}(0) = \{(s, x_1, x_2); F(s, x_1, x_2) = 0\},$$
$$M_{s_0} = F_{s_0}^{-1}(0) = \{(s, x_1, x_2); F(s, x_1, x_2) = 0\},$$

y $\quad M^*_{s_0} = \{(s, x_1, x_2); F(s, x_1, x_2) = 0\},$

por lo tanto M_{s_0} es una curva en el plano $s = 0$, $M^*_{s_0}$ es una curva en el plano $s = s_0$ y podemos pensar la superficie $F^{-1}(0)$ como la unión de las curvas $M^*_{s_0}$.

Note que si v_p es un vector que pertenece al espacio tangente de $F^{-1}(0)$ en el punto $p = (s, x)$, entonces
$\langle \nabla F(p), v_p \rangle = 0,$
donde $\nabla F(p)$ es el gradiente de F en el punto p.
Este espacio tangente es vertical, es decir paralelo al eje s, si y sólo si $\dfrac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0$.

En general se tiene que la siguiente definición de envolvente.

4.1 Definición. Dados F y M_s como antes, se define la envolvente ξ_F de la familia $\{M_s = F^{-1}{}_s(0)\}$, como el conjunto:

$$\xi_F = \left\{ x \in R^n; x \in M_s, \frac{\partial F}{\partial s}(s, x) = 0 \right\}.$$

4.2 Teorema. Si $\beta:[a,b]\to R^2$ es una curva regular, que es la envolvente de una familia de curvas $\{M_s = F^{-1}{}_s(0)\}$, entonces en el punto donde $\beta(s)\in M_{s,}$ las dos curvas son tangentes.

Demostración. Se denota $\beta(s)=(x_1(s),x_2(s))$. Como $F(s,\beta(s))=0$; entonces al derivar a ambos lados la anterior expresión con respecto s tenemos que:

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,x_1(s),x_2(s))+\frac{\partial F}{\partial x_1}(s,x_1(s),x_2(s))x_1^{'}(s)$$
$$+\frac{\partial F}{\partial x_2}(s,x_1(s),x_2(s))x_2^{'}(s)=0,$$

pero $\frac{\partial F}{\partial s}(s,x_1(s),x_2(s))=0;$ por lo tanto $\langle\nabla F(s,\beta(s)),\beta'(s)\rangle=0.$

En particular cuando M_s son rectas. Entonce se tiene el siguiente corolario del Teorema anterior.

4.3 Corolario. La envolvente de una familia de rectas es una curva tal que la tangente en cada uno de sus puntos es una recta de la familia dada.

Ahora se expone una técnica para determinar la envolvente de una familia de curvas.

4.4 Teorema. Sea $F:D\subset R\times R^2\to R$ una función diferenciable en un dominio abierto D de $R\times R^2$. Tal que 0 es un valor regular de la función $F_s(x_1,x_2)$ y de la función $F(s,x_1,x_2)$. Sea $\pi:F^{-1}(0)\to R^2$ la proyección definida por $\pi(s,x_1,x_2)=(x_1,x_2)$. Entonces el conjunto de valores críticos valores críticos de la proyección es la envolvente de la familia de curvas $\{M_s = F^{-1}{}_s(0)\}$.

Demostración. Se denota

$$\Sigma=F^{-1}(0)=\{(s,x_1,x_2);F(s,x_1,x_2)=0\}$$

y parametricemos Σ locamente por

$X(s,u)=(s,x_1(s,u),x_2(s,u)),$ donde
$(s,u)\in[a,b]\times[c,d]\subset R^2.$

Luego

$$X_s=\frac{\partial X}{\partial s}=(1,\frac{\partial x_1}{\partial s},\frac{\partial x_2}{\partial s}) \text{ y}$$
$$X_u=\frac{\partial X}{\partial u}=(0,\frac{\partial x_1}{\partial u},\frac{\partial x_2}{\partial u}),$$

es una base del plano tangente $T_p\,\Sigma,$ donde $p=(s,x_1,x_2)\in\Sigma.$

Como la proyección es lineal en la variable que se proyecta entonces

$$d\pi_p(X_s)=0\Leftrightarrow\frac{\partial x_1}{\partial s}=0 \text{ y } \frac{\partial x_2}{\partial s}=0,$$

$$d\pi_p(X_u)=0\Leftrightarrow\frac{\partial x_1}{\partial u}=0 \text{ y } \frac{\partial x_2}{\partial u}=0,$$

pero $X_u\neq 0$, luego los puntos críticos de π sastisfacen que $X_s(p)=(1,0,0).$
Como $X_s(p)\in T_p\,\Sigma,$ entonces

$$\langle\nabla F(p),(1,0,0)\rangle=\frac{\partial F}{\partial s}(p)=0.$$

Por tanto la proyección de los puntos $p\in\Sigma=F^{-1}(0)$ tales que $\frac{\partial F}{\partial s}(p)=0$ es el conjunto

$$\left\{x\in R^2; x\in M_s, \frac{\partial F}{\partial s}(s,x)=0\right\}$$

el cual coincide con la envolvente ξ_F de la familia de curvas $\{M_s = F^{-1}{}_s(0)\}$ .w

Se aplicará dicha técnica para determinar los puntos focales de $\alpha.$

4.5 Teorema. $\alpha:[a,b]\to R^2$ una curva plana parametrizada por la longitud del arco s. Entonces la envolvente de la familia de normales a α, es el lugar geométrico de los puntos focales de la curva.

Demostración. La ecuación lineal normal a α y que pasa por $\alpha(s)$ es:

$$\langle u-\alpha(s),\alpha'(s)\rangle=0,$$

donde u es un punto de R^2 que está en la línea normal. Luego la familia de líneas normales a la curva α la podemos expresar por la siguiente ecuación:

$$F(s,u) = \langle u - \alpha(s), \alpha'(s) \rangle = 0. \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial s}(s,u) = \langle u - \alpha(s), \alpha''(s) \rangle - \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle$$

Ahora se aplica la definición de envolvente para la función F.

Para ello se calcula $\frac{\partial F}{\partial s}$ y se usa las fórmulas de Frenet-Serret.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial s}(s,u) &= \langle u - \alpha(s), \alpha''(s) \rangle - \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle \\ &= \langle u - \alpha(s), k(s)n(s) \rangle - 1 = 0. \end{aligned}$$

Pero (4.1) se tiene que $u - \alpha(s) = \lambda(s)n(s)$ para algún $\lambda(s) \in R.$ Por tanto

$$\gamma(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}n(s). \text{W}$$

5. CONCLUSIONES.

La evoluta de una curva plana se pueden determinar de una manera fácil usando campos de Jacobi, o algunos resultados de la teoría de contacto. o usando la envolvente de una familia de rectas. También es natural preguntarse como son las evolutas en espacios parecidos a nuestro, es decir, en espacios de curvatura constante. ¿Será que en dichos espacios las técnicas anteriores funcionaran, para determinar las evolutas de curvas en espacios de forma?.

6. BIBLIOGRAFÍA.

[1] M. Do Carmo, Differential geometry of curves and surface. Prentice Hall, 1976.

[2] S.Bruce and D.Giblin, Curves and singularities.Cambridge University Press, 1992.

[3] C.A Escudero, Conjuntos focales en variedades de Riemann de curvatura acotada. Tesis Doctoral, universidad Autónoma de Barcelona. 2006.