

SIMULACIÓN DE UN SISTEMA MASA RESORTE AMORTIGUADOR CON CIRCUITOS ELECTRÓNICOS

Simulation of a Spring-Mass-Shock Absorber System with Electronic Circuits

RESUMEN

En este documento se muestran los resultados obtenidos al realizar la simulación de un sistema dinámico conformado por una masa, un resorte, y un amortiguador; mediante un circuito electrónico que contiene amplificadores operacionales. También se presenta la solución matemática del sistema con sus respectivas gráficas en *Matlab*®, la simulación del circuito diseñado en la herramienta *Proteus*®, y las imágenes del montaje realizado obtenidas en el osciloscopio.

PALABRAS CLAVES: Amplificador operacional, ecuaciones diferenciales, movimiento oscilatorio, sistemas dinámicos lineales.

ABSTRACT

This paper shows the results obtained when performing the simulation of a dynamic system composed of a mass, a spring and a shock absorber; by an electronic circuit containing operational amplifiers. It also presents the mathematical solution of the system with their respective graphs in Matlab®, the circuit simulation designed in the Proteus® tool, and images made from the assembly in the oscilloscope.

KEYWORDS: *Operational amplifier, differential equations, oscillatory movement, linear dynamic systems.*

WILLIAM ARDILA URUEÑA

Licenciado en Física
MSc. Física
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
williamar@utp.edu.co

JOSÉ ANDRÉS CHAVES OSORIO

Ingeniero Electricista
Especialista en Pedagogía
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jchaves@utp.edu.co

EDWIN ANDRÉS QUINTERO

Ingeniero Electrónico
Estudiante Maestría en
Instrumentación Física
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
equintero@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los temas de la física básica cruciales en la formación de ingenieros consiste en el análisis de sistemas dinámicos, los cuales en estas asignaturas se encuentran representados generalmente por el estudio del movimiento de una masa unida a un soporte a través de un resorte y de un amortiguador. La importancia de la comprensión de este tema por parte de los estudiantes es evidente, pues los sistemas dinámicos constituyen una parte activa de los contenidos en la gran mayoría de ingenierías. Por ejemplo, en ingeniería electrónica, los sistemas dinámicos lineales son la base para el estudio de las teorías de control y de señales, pues permiten modelar mediante ecuaciones diferenciales muchos de los procesos que se requieren controlar, o los sistemas por medio de los cuales se propaga una señal, permitiendo así predecir un posible comportamiento futuro de todo el fenómeno.

Sin embargo, en los cursos de física se evidencia una difícil comprensión de este tema por parte de los estudiantes, debido en mayor parte al desconocimiento del experimento real que origina este fenómeno físico, impidiendo que el estudiante realice una abstracción del problema en estudio, sin lo cual la construcción de un mapa mental se torna bastante complicada.

Otra posible causa de esta dificultad encuentra sus orígenes en la debilidad que presentan los estudiantes en cuanto a las bases matemáticas necesarias para describir este tipo de fenómenos, produciendo falta de atención del educando, pues su pobre formación inicial no le permite acercarse al fenómeno de una forma curiosa e interesada.

Una alternativa de solución a esta problemática presentada en la enseñanza de la física básica, consiste en crear experimentos que muestren al estudiante la importancia de la comprensión de este fenómeno, dada su semejanza con otros tipos de sistemas.

Este documento presenta la simulación de un sistema masa-resorte-amortiguador mediante un circuito electrónico compuesto de amplificadores operacionales, el cual permite observar en el osciloscopio el movimiento de la masa. La simulación permite obtener esta respuesta sin realizar ningún cálculo matemático asociado a la solución de ecuaciones diferenciales, por lo cual logra familiarizar al educando rápidamente.

Los resultados prácticos de este experimento son complementados con las gráficas de los resultados obtenidos matemáticamente, construidas en *Matlab*®, y la simulación del circuito electrónico final en el programa *Proteus*®.

2. FUNDAMENTOS DE LOS SISTEMAS MASA-RESORTE-AMORTIGUADOR

2.1 MOVIMIENTO OSCILATORIO

Sin duda alguna, uno de los fenómenos de la cinemática más frecuentes en la naturaleza consiste en el movimiento oscilatorio o de vibración. Ejemplos de ello son la esfera de un péndulo soltada desde un ángulo inicial, o la vibración de un resorte al ser liberado después de una acción de compresión o de estiramiento. Al observar estos fenómenos, pareciera que los cuerpos anteriormente descritos siguieran un desplazamiento repetitivo, bastante predecible, el cual recibe el nombre de oscilación.

Realizando un diagrama de cuerpo libre de este tipo de sistemas se obtiene la representación de la figura 1, en la cual se han etiquetado 3 posiciones básicas. La posición a) corresponde a la sujeción del resorte de una base, teniendo en cuenta que la masa de estos materiales es despreciable, por lo cual no se observa desplazamiento del resorte debido a su propio peso. La situación b) ilustra las fuerzas que aparecen al colocar la masa *m*. Se observa una fuerza *W* originada por el peso de la masa, la cual genera un desplazamiento *s* del resorte, creando una fuerza reconstitutiva *F_{RS}*. Como el sistema queda en equilibrio, es obvio que el peso y la fuerza reconstitutiva se contrarrestan. En c), el sistema es analizado una vez cierta fuerza externa no especificada ha llevado la masa *m* a una posición *y*. Allí, el sistema pierde el equilibrio y aparecen el peso *W*, una fuerza reconstitutiva *F_{RK}*, y la fuerza del movimiento dada por la expresión *f=m.a* [1].

Realizando una descripción matemática, para el caso b), se tendrá:

$$F_{RS} - W = 0 \tag{1}$$

$$ks - mg = 0 \tag{2}$$

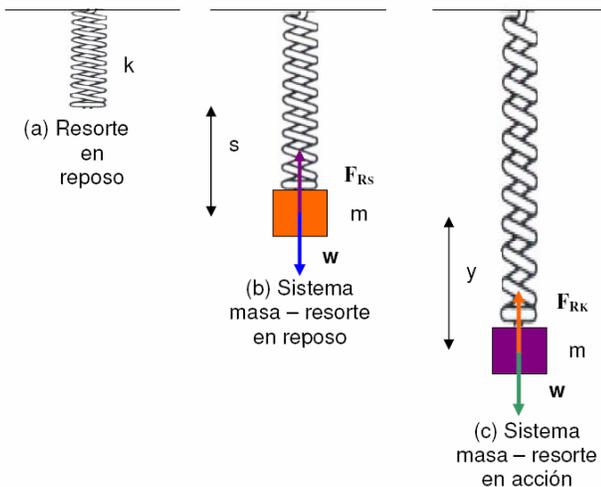


Figura 1. Análisis del sistema masa-resorte.

Para el sistema descrito en c):

$$F_{RK} - W = -ma \tag{3}$$

$$ks + ky - mg = -ma \tag{4}$$

$$(ks - mg) + ky = -ma \tag{5}$$

$$ky = -ma \tag{6}$$

$$ma + ky = 0 \tag{7}$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} + ky = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0 \tag{9}$$

La expresión (9) es una ecuación diferencial lineal homogénea de primer orden, cuya solución tiene la siguiente forma [2]:

$$y(t) = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{(k/m)}} \sin \left[\sqrt{\frac{k}{m}}t + \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{k/m}y_0}{v_0} \right) \right] \tag{10}$$

Donde *y₀* y *v₀* son las condiciones iniciales del sistema. De lo anterior se observa que la masa se moverá describiendo una onda senoidal cuya amplitud y desfase dependen de la posición y la velocidad inicial del sistema [1].

2.2 SISTEMAS AMORTIGUADOS

Considérese el sistema mostrado en la figura 2, el cual es el mismo de la figura 1, solo que ahora se agrega un amortiguador de constante *b*. Realizando un análisis matemático similar al del numeral anterior:

$$F_R + F_b = ma \tag{11}$$

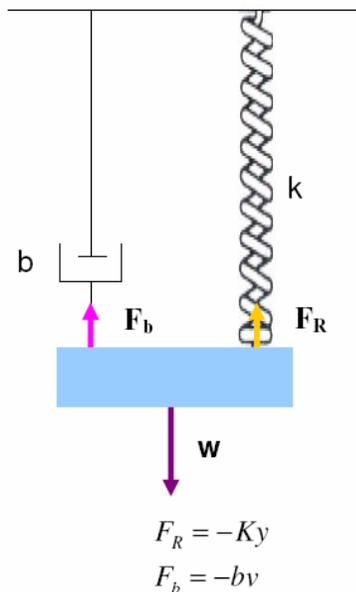


Figura 2. Sistema masa-resorte-amortiguador.

$$-ky - bv = ma \quad (12)$$

$$ma + ky + bv = 0 \quad (13)$$

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} + b \frac{dy}{dt} + ky = 0 \quad (14)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = 0 \quad (15)$$

La expresión anterior corresponde a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden, y su solución es conocida como *homogénea* o *natural* $y_n(t)$ [2], la cual depende de las raíces λ del polinomio conocido como *ecuación característica*. Se supone una solución de la forma:

$$y(t) = e^{\lambda t} \quad (16)$$

Evaluando dicha expresión en (15):

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{b}{m} \lambda e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} = 0 \quad (17)$$

$$\lambda^2 + \frac{b}{m} \lambda + \frac{k}{m} = 0 \quad (18)$$

$$\lambda_1 = \frac{-\frac{b}{m} + \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} \quad (19)$$

$$\lambda_2 = \frac{-\frac{b}{m} - \sqrt{\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m}}}{2} \quad (20)$$

$$Discriminante = \left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\frac{k}{m} \quad (21)$$

Si el discriminante es mayor que cero, la *ecuación característica* tendrá dos raíces reales distintas λ_1 y λ_2 , el sistema será *Sobreamortiguado*, y la expresión que describe el movimiento de la masa en función del tiempo es de la forma:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (22)$$

Si por el contrario, el discriminante es igual a cero, la *ecuación característica* tendrá una sola raíz real. En este caso el sistema se denomina *Críticamente Amortiguado*, y la expresión matemática para la masa es:

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} \quad (23)$$

Finalmente, si el discriminante es menor que cero, el movimiento de la masa tendrá un comportamiento *Subamortiguado*, y la expresión matemática queda:

$$y(t) = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta t + c_2 \sin \beta t) \quad (24)$$

Donde:

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \quad y \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta \quad (25)$$

En todas las expresiones anteriores c_1 y c_2 son constantes dadas por las condiciones iniciales. El análisis anterior solo determina la forma en la cual se moverá la masa cuando una fuerza externa inicial indeterminada y no incluida en el desarrollo, la desplaza cierta distancia y_0 y le imprime una velocidad v_0 . Si además de ello, sobre el sistema actúa una fuerza externa después de iniciado el movimiento, el sistema se convierte en un *Movimiento Amortiguado de Respuesta Forzada*, cuyo modelo matemático es:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k}{m} y = \frac{f(t)}{m} \quad (26)$$

Donde $f(t)$ es la fuerza externa aplicada. En este caso el sistema tendrá dos soluciones, una conocida como *homogénea* o *natural* $y_n(t)$, la cual ya se describió anteriormente, y otra llamada *particular* o *forzada* $y_f(t)$. Así, la respuesta general corresponderá a la suma de estas dos soluciones:

$$y(t) = y_n(t) + y_f(t) \quad (27)$$

$y_n(t)$ se obtiene aplicando el procedimiento descrito anteriormente, mientras que $y_f(t)$ depende de la forma de la fuerza externa $f(t)$ que se esté aplicando al sistema

3. DESARROLLO DE LA SIMULACIÓN

Como se dijo anteriormente, este documento pretende simular el comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador, mediante un circuito electrónico conformado por amplificadores operacionales. Esta labor se desarrolla en 3 etapas. En la primera se resuelve matemáticamente el sistema elegido y se grafican las curvas de posición resultantes usando Matlab®. En la fase siguiente se diseña el circuito electrónico y se realiza la simulación de su comportamiento en la herramienta Proteus®. Finalmente, el circuito diseñado es montado en el laboratorio con el fin de observar su comportamiento en el osciloscopio y compararlo con los resultados obtenidos en las fases anteriores.

3.1 SOLUCIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

El sistema a simular es uno conformado por una masa, un resorte, y un amortiguador, cuyas constantes respectivas son $m=8 \text{ Kg}$, $k=20 \text{ N/m}$, $b=2 \text{ Ns/m}$. Reemplazando en (15) se obtiene la ecuación:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{4} \frac{dy}{dt} + \frac{5}{2} y = 0 \quad (28)$$

Primero se debe analizar el discriminante con el objetivo de determinar el tipo de amortiguamiento:

$$\left(\frac{b}{m}\right)^2 - 4\left(\frac{k}{m}\right) = \left(\frac{2\text{Kg} \frac{m}{s}}{8\text{Kg}}\right)^2 - 4\left(\frac{20\text{Kg} \frac{m}{s^2}}{8\text{Kg}}\right) = -\frac{159}{16} s^2 < 0$$

Dado lo anterior, se trata de un sistema *Subamortiguado*, por lo tanto, de (25):

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \quad \text{y} \quad \lambda_2 = \alpha - j\beta$$

Donde:

$$\alpha = -\frac{b/m}{2} = -\frac{b}{2m} = -\frac{2Kg\,m/s^2\,s/m}{2(8Kg)} = -\frac{1}{8}s^{-1}$$

$$\beta = \frac{\sqrt{4\left(\frac{k}{m}\right) - \left(\frac{b}{m}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4\left(\frac{20Kg\,m/s^2\,1/m}{8Kg}\right) - \left(\frac{2Kg\,m/s^2\,s/m}{8Kg}\right)^2}}{2} = 1,57s^{-1}$$

Entonces la expresión para la posición de la masa con condiciones iniciales $y(0)=2m$ y $v(0)=0m/s$ es:

$$y(t) = e^{-1/8t} [2 \cos(1,57t) + 0,159 \sin(1,57t)] \quad (29)$$

En la figura 3 se muestra la gráfica de la posición de la masa dada por la ecuación (29). Se observa que el sistema inicia en 2m y comienza a oscilar de forma amortiguada hasta los 30s, tiempo en el cual el movimiento se reduce debido al amortiguador.

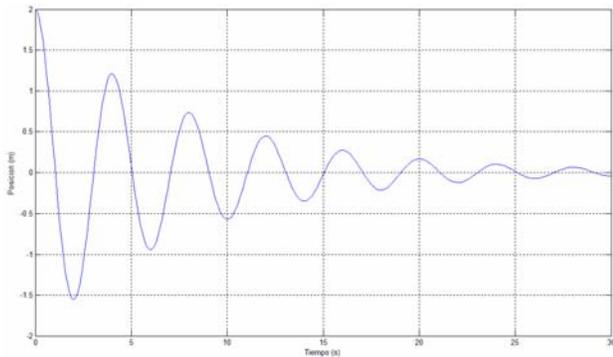


Figura 3. Comportamiento de la masa perteneciente al sistema en estudio obtenido en el programa *Matlab*©.

Si la masa es sometida a una fuerza externa de la forma $f(t) = 10\sin(4\pi t)$, el sistema se verá forzado a seguir esta nueva fuerza, por lo que al final del comportamiento natural se percibirá una oscilación sinusoidal simple. Este efecto se observa en la figura 4. La ecuación diferencial en este caso será:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{4} \frac{dy}{dt} + \frac{5}{2} y = \frac{10}{8} \sin(4\pi t) \quad (30)$$

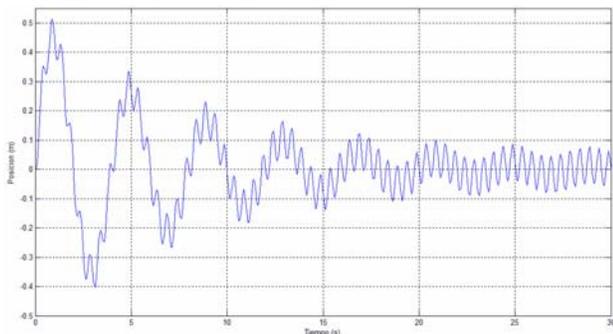


Figura 4. Movimiento de la masa del sistema amortiguado en presencia de una fuerza externa senoidal $f(t)$.

3.2 DISEÑO DEL CIRCUITO ELECTRÓNICO Y SIMULACIÓN EN EL PROGRAMA *PROTEUS*¹

Para la solución del sistema, en primer lugar se debe escribir la ecuación diferencial que lo modela en forma de ecuación de estados. Para lograr esta operación se introducen las siguientes equivalencias:

$$y = y_1; \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = \dot{y}_1 = y_2; \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = \ddot{y}_1 = \dot{y}_2 \quad (31)$$

Con lo cual y_1 y y_2 se definen como los estados del sistema. Así, rescribiendo (28) en términos de (31) se obtiene:

$$\dot{y}_2 + \frac{1}{4}y_2 + \frac{5}{2}y_1 = \mu(t) \quad (32)$$

Donde $\mu(t)$ puede ser cero como en la ecuación (28), o $f(t)/m$ como en (30). Esto no afecta el diseño del circuito ya que $f(t)$ es una fuerza externa que está siendo aplicada al sistema, la cual se puede simular circuitalmente incluyendo fuentes de alimentación en la entrada. Despejando la derivada de la segunda variable de estado:

$$\dot{y}_2 = \mu(t) - \frac{1}{4}y_2 - \frac{5}{2}y_1 \quad (33)$$

Gracias a que la derivada es una operación lineal, la ecuación en variables de estado descrita en (33) puede ser implementada mediante amplificadores operacionales. Para ello Primero se definen los coeficientes constantes:

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 0, \quad b_0 = -\frac{1}{4}, \quad b_1 = -\frac{5}{2}$$

Ahora se calcula la sumatoria de coeficientes positivos:

$$A = a_0 + a_1 = 1$$

De igual forma para los coeficientes negativos:

$$B = b_0 + b_1 = 11/4$$

Posteriormente se calcula la resistencia anti-estrés para el circuito por medio de la siguiente tabla [3]:

A_T	R_0	\bar{R}_0	R_j	\bar{R}_j	R_f
>0	∞	R_f/A_T	R_f/a_j	R_f/b_j	ΛZ_i
<0	$R_f/-A_T$	∞	R_f/a_j	R_f/b_j	ΛZ_i
0	∞	∞	R_f/a_j	R_f/b_j	ΛZ_i

Tabla 1. Parámetros de diseño para el circuito con Op-Amp.²

¹ Para más información acerca de la implementación de Op-Amp en la solución de sistemas lineales, véase Luis E. Avendaño, *Sistemas Electrónicos Analógicos: Un Enfoque Matricial*, Primera Edición, UTP, 2007, Pág. 101-112.

Donde:

$$A_T = A - B - 1$$

R_0 : Resistencia anti-estrés entre V^+ y tierra.

\bar{R}_0 : Resistencia anti-estrés entre V^- y tierra.

R_j : j-ésima resistencia por la cual ingresarán los voltajes correspondientes a los coeficientes positivos de la ecuación (a_j).

\bar{R}_j : j-ésima resistencia por la cual ingresarán los voltajes correspondientes a los coeficientes negativos de la ecuación (b_j).

R_f : Resistencia de realimentación del circuito.

a_j : Coeficientes positivos.

b_j : Coeficientes negativos presentes en la ecuación.

Λ : Operador constante, $\Lambda = \sup(A, B + 1, \|A_T\|)$

Z_i : Impedancia de entrada del circuito.

Calculando A_T :

$$A_T = A - B - 1 = 1 - \frac{11}{4} - 1 = -\frac{11}{4} < 0$$

Como A_T es menor que cero, entonces según la tabla 1:

$$R_0 = \frac{R_f}{-A_T}, \quad \bar{R}_0 \rightarrow \infty, \quad R_j = \frac{R_f}{a_j}, \quad \bar{R}_j = \frac{R_f}{b_j}$$

$$R_f = \Lambda Z_i, \quad \Lambda = \sup(A, B + 1, \|A_T\|)$$

Con un valor típico de $20 \text{ k}\Omega$ para Z_i :

$$\Lambda = \sup\left(1, \frac{11}{4} + 1, \left\|\frac{11}{4}\right\|\right) = \frac{15}{4}, \quad R_f = \frac{15}{4} 20 \text{ k}\Omega = 75 \text{ k}\Omega$$

$$R_0 = \frac{75 \text{ k}\Omega}{-11/4} = 27 \text{ k}\Omega, \quad R_\mu = \frac{75 \text{ k}\Omega}{1} = 75 \text{ k}\Omega$$

$$R_{y_1} = \frac{75 \text{ k}\Omega}{5/2} = 30 \text{ k}\Omega, \quad R_{y_2} = \frac{75 \text{ k}\Omega}{1/4} = 300 \text{ k}\Omega$$

El circuito desarrollado se muestra en la figura 5. Las figuras 6 y 7, presentan los resultados de la simulación en *Proteus*®, con una condición inicial de 2m sin fuerza externa, y con condiciones iniciales nulas ante una fuerza aplicada $f(t) = 10 \sin(4\pi t)$, respectivamente.

3.3 MONTAJE DEL CIRCUITO DISEÑADO

En la imagen de la figura 8 se presenta en montaje del circuito diseñado. La figura 9 presenta la imagen obtenida en el osciloscopio al montar el circuito

diseñado, en ausencia de fuerza externa y con condiciones iniciales $y(0)=2m$ y $v(0)=0m/s$.

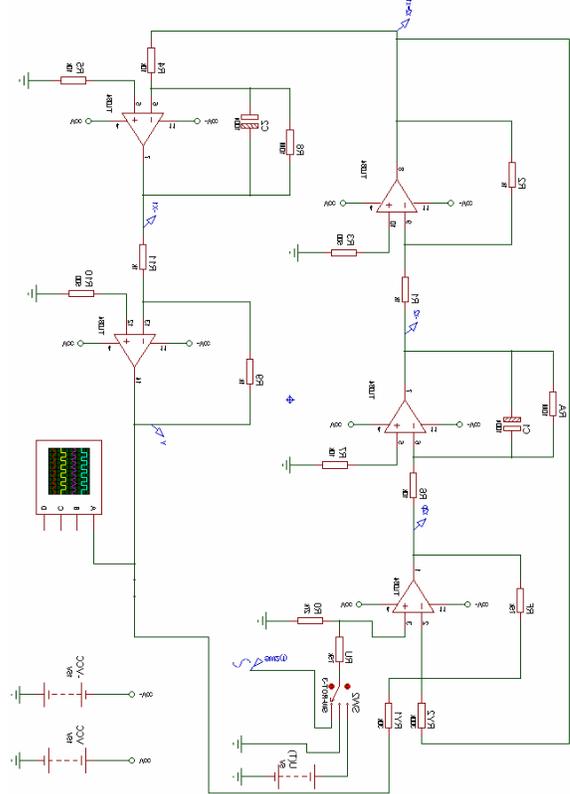


Figura 5. Circuito implementado en el programa *Proteus*®.

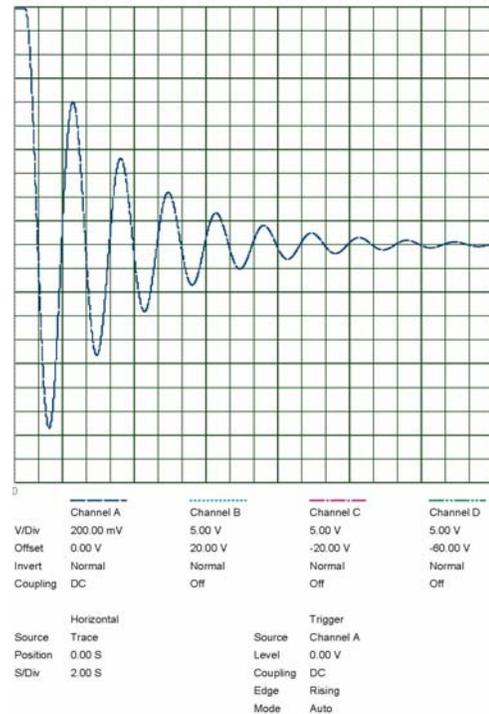


Figura 6. Simulación del circuito diseñado sin fuerza externa, ante condiciones iniciales $y(0)=2m$ y $v(0)=0m/s$.

En la imagen presentada en la figura 10 se observa el comportamiento del circuito montado ante una fuerza

² Luis E. Avendaño, *Sistemas Electrónicos Analógicos: Un Enfoque Matricial*, Primera Edición, UTP, 2007, Pág. 100.

externa $f(t) = 10\sin(4\pi t)$, aplicada mediante una fuente senoidal, bajo condiciones iniciales nulas. Para el montaje se utilizaron amplificadores operacionales referencia TL084 [4].

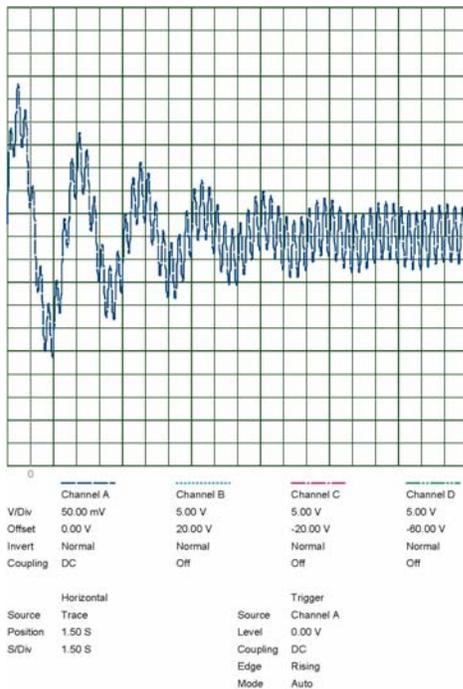


Figura 7. Simulación del circuito diseñado con una fuerza externa $f(t) = 10\sin(4\pi t)$, donde $y(0) = 0m$ y $v(0) = 0m/s$.

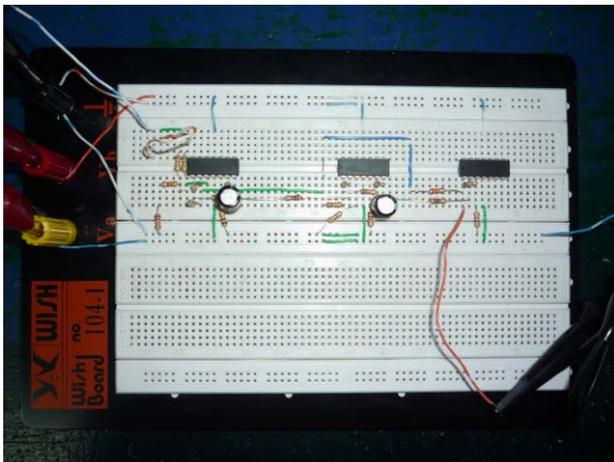


Figura 8. Montaje del circuito diseñado.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El ejercicio desarrollado demuestra la versatilidad de los amplificadores operacionales en cuanto a la solución de sistemas dinámicos lineales se refiere. Por otra parte, este tipo de experiencias permiten al estudiante una mayor comprensión del fenómeno en estudio, y proporcionan a los docentes una poderosa herramienta que les posibilita integrar una gran cantidad de conceptos, fenómenos y definiciones en un solo experimento fácil de realizar con un puñado de componentes y conocimientos mínimos de electrónica.

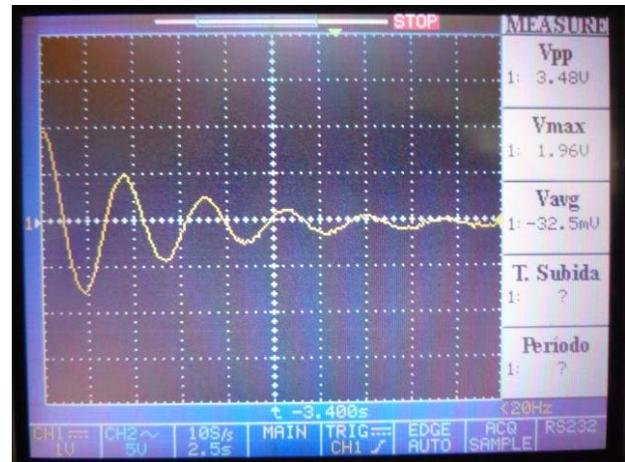


Figura 9. Imagen obtenida en el osciloscopio sin fuente externa. Obsérvese la similitud con la respuesta mostrada en las figuras 3 y 6 (gráfica de la función matemática en *Matlab*© y simulación en *Proteus*©, respectivamente).

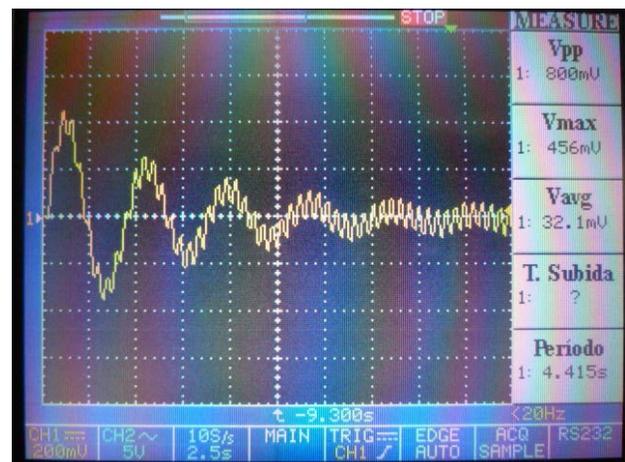


Figura 10. Imagen obtenida en el osciloscopio bajo una fuente de excitación senoidal. Obsérvese la similitud con la respuesta mostrada en las figuras 4 y 7 (gráfica de la función matemática en *Matlab*© y simulación en *Proteus*©, respectivamente).

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Francis W. Sears, *Física Universitaria*, XI Edición, Volumen I, Pearson Edison Wesley, 2000.
- [2] Dennis G. Zill, *Ecuaciones Diferenciales con Aplicaciones de Modelado*, VIII Edición, International Thomson, 2005.
- [3] Luis E. Avendaño, *Sistemas Electrónicos Analógicos: Un Enfoque Matricial*, Primera Edición, Centro de Publicaciones UTP, 2007.
- [4] Texas Instruments Incorporated, TL084 Operational Amplifier Data Sheet, Texas Instruments Incorporated, 1999.