UNA APLICACIÓN DEL GRADO DE COINCIDENCIA A UN PROBLEMA PERIÓDICO

An application of the degree of coincidence to a periodic problem

RESUMEN

En el presente artículo se muestra un resultado de existencia de solución para un problema periódico usando el grado de coincidencia. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia de solución de un problema periódico en ecuaciones diferenciales ordinarias.

PALABRAS CLAVES: Grado de coincidencia, problema periódico, condiciones de Landesman-Lazer.

ABSTRACT

In the present article there appears a result of existence of solution for a periodic problem using the degree of coincidence. Under appropriate conditions, there is proved the existence of solution of a periodic problem in ordinary differential equations.

KEYWORDS: Degree of coincidence, periodic problem, Landesman-Lazer's conditions.

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor Asistente - Departamento de Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co
www.ppablo.com

ALEXANDER GUTIERREZ G.
Matemático.
M.Sc. Matemáticas.
Profesor Asistente – Departamento de Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira.
alexguti@utp.edu.co

EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO
Matemático.
M.Sc. Matemáticas.
Profesor Auxiliar – Departamento de Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira.
evalencia@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Se quiere resolver el problema

$$\begin{cases} u'' + g(u) = p(t) \\ u, T - periódica \end{cases} \tag{1.1}$$

donde g es continua y acotada y p continua.

La idea acá es entonces aplicar las condiciones de Landesman-Lazer para aproximar la solución y así garantizar la existencia de solución al problema (1.1).

2. CONDICIONES DE LANDESMAN-LAZER

Supóngase que existen los siguientes límites:

$$\lim_{u\to\infty} g(u) = g^+, \quad \lim_{u\to-\infty} g(u) = g^-$$

entonces se tiene el siguiente teorema:

Fecha Recepción: 9 de Septiembre de 2010
Fecha aceptación: 15 de Noviembre de 2010

Teorema 2.1. Si

$$g^- < \frac{1}{T}\int_0^T p < g^+ \text{ ó } g^+ < \frac{1}{T}\int_0^T p < g^-$$

entonces existe solución del problema (1.1).

A estas condiciones se les conoce como *condiciones de Landesman-Lazer.*

Observación. Si por ejemplo $g^- < g(u) < g^+$ para todo $u \in \mathbb{R}$ ó $g^+ < g(u) < g^-$, entonces las condiciones de Landesman-Lazer son necesarias.

Para ver esto, sea u solución de la ecuación diferencial

$$u'' + g(u) = p(t)$$

con T periódica, entonces

$$\int_0^T u'' + \int_0^T g(u) = \int_0^T p(t)$$

entonces

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t) = \frac{1}{T}\int_0^T g(u) < g^+$$

y

$$\frac{1}{T}\int_0^T p(t) = \frac{1}{T}\int_0^T g(u) > g^-$$

Demostración. Se procede a demostrar el teorema anterior. Considérese el siguiente conjunto:

$$\begin{cases} X = C_{per}[0,T] = \{u \in C[0,T]:\ u(0) = u(T)\} \\ Y = C[0,T] \\ D = \{u \in C^2[0,T]:\ u(0) = u(T),\ u'(0) = u'(T)\} \end{cases}$$

Sea el operador $L: D \to Y$ con $Lu = u''$ (lineal), $N: X \to Y$ con $Nu(t) = p(t) - g\big(u(t)\big)$ (continuo). Ahora, si $Lu = 0$, entonces $u = cte$ y de aquí $Ker\ L = \mathbb{R}$. Además

$$Im(L) = \left\{\varphi \in C[0,T]:\ \int_0^T \varphi = 0\right\}$$

En efecto, si $\varphi \in Im(L), u'' = \varphi$ para $u \in D$, entonces

$$0 = \int_0^T u'' = \int_0^T \varphi$$

Por otro lado, si $\int_0^T \varphi = 0$, entonces se resuelve el problema

$$u'' = \varphi$$

Así,

$$u'(t) = c + \int_0^T \varphi$$

con $u'(T) = c = u'(0)$ y luego

$$u(t) = d + ct + \int_0^T \int_0^s \varphi$$

Como $u(0) = d$, se tiene que

$$u(T) = d + cT + \int_0^T \left(\int_0^s \varphi\right) ds$$

entonces se elige c tal que

$$cT + \int_0^T \left(\int_0^s \varphi\right) ds = 0$$

Se puede elegir

$$P: X \to X, \qquad Q: y \to Y$$

tal que

$$Pu = \bar{u} := \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt \qquad (promedio)$$

y

$$Q\varphi = \bar{\varphi}$$

Es inmediato que $P^2 = P,\ Q^2 = Q$ y además

$$Im(P) = \mathbb{R}, Ker(Q) = \{\varphi:\ \bar{\varphi} = 0\} = Im(L)$$

De esta forma

$$L: D \cap Ker(P) \to Im(L)$$

es biyectiva.

Para $\varphi \in Im\, L,\ K\varphi = u$ es la única solución del problema

$$\begin{cases} u'' = \varphi \\ u(0) = u(T), u'(0) = u'(T) \\ \bar{u} = 0 \end{cases}$$

■

3. COMPACIDAD DEL OPERADOR N

Se verifica ahora que el operador *N* es *L-compacto.*

Proposición 3.1. (Wirtinger). Sea el conjunto

$$A = \{u \in C^1[0,T]:\ u(0) = u(T), \bar{u} = 0\}$$

Entonces, existe una constante *c* tal que

$$\|u\|_{C[0,T]} \leq c\|u'\|_{C[o,T]}$$

Para toda $u \in A$.

Demostración. Si $\bar{u} = 0$, entonces existe t_0 tal que $u(t_0) = 0$. Luego, $u(t) = \int_{t_0}^t u'$ cumpliéndose que

$$|u| \leq T\|u'\|_{C[o,T]}$$

Así que,

$$\|u\|_{C[0,T]} \leq T\|u'\|_{C[0,T]}$$

Como una consecuencia de lo anterior, puede verse que existe c tal que

$$\|u\|_{C^2[0,T]} \leq c\|u''\|_{C[0,T]}$$

para toda $u \in A \cap C^2[0,T]$.

Para mostrar esto, puede verse también que si $u(0) = u(T)$, entonces existe t_0 tal que $u'(t_0) = 0$, entonces $u'(t) = \int_{t_0}^{t} u''$, donde $\|u'\|_c \leq T\|u''\|_c$ y luego el resultado es trivial, pues

$$\|u\|_{C^2} = \|u\|_C + \|u'\|_C + \|u''\|_C$$

Ahora, sea

$$K(I-Q)N\colon \Omega \to X,$$

de donde Ω se define como el conjunto $\{v\colon \ \|v\|_C \leq R\}$.

Para $v \in \Omega(\|v\|_C) \leq R$ se tiene

$$\varphi = (I-Q)Nv = Nv - \overline{Nv}$$

entonces $\|\varphi\|_C < M$, para cierta constante M independiente de v (depende sólo de R).

Ahora, si $u = K\varphi$, entonces

$$u'' = \varphi, \bar{u} = 0, u(0) = u(T), u'(0) = u'(T)$$

entonces,

$$\|u\|_{C^2} \leq \|u''\| = c\|\varphi\| < cM$$

Esto prueba que $K(I-Q)N(\Omega)$ es acotado para $\| \ \ \|_{C^2}$ y entonces es compacto para $\| \ \ \|_C$. (La inclusión $C^2 \hookrightarrow C$ es compacta) .

Teorema 3.1. (Continuación). Sean Ω un abierto acotado y L un operador de Fredholm de índice cero, N L-compacto con las siguientes propiedades:

1. $L(u) \neq \lambda N(u)$ para $u \in dom(L) \cap \partial\Omega$ y para todo $\lambda \in (0,1]$.
2. $QN(u) \neq 0$ para todo $u \in Ker(L) \cap \partial\Omega$.
3. $deg_{LS}[JQN;\ \Omega \cap Ker(L), 0] \neq 0$

donde $JQN\colon Ker(L) \to Ker(L)$, entonces $L(u) = N(u)$ tiene al menos una solución en $dom(L) \cap \overline{\Omega}$.

Se verifican a continuación las condiciones del teorema 3.1 para el problema en cuestión.

Eligiendo $\Omega = B_R(0)$, R apropiado, se ve que las soluciones de $Lu = \lambda Nu$ con $\lambda \in (0,1]$ están acotadas. Si no, existe $\lambda_n \in (0,1], u_n \in D$ tales que

$$Lu_n = \lambda_n Nu_n, \qquad \|u_n\|_C \to \infty$$

En este caso, llámese $v_n = u_n - \overline{u_n}$. Entonces

$$\|v_n\|_{C^2} = c\|v''_n\|_C = c\|u''_n\|_C = c\lambda_n\|Nu_n\|_C$$

Como $\|Nu_n\|_C \leq M$, entonces $\{v_n\}$ es acotada para $\|.\|_{C^2}$, luego $\overline{u_n} \to \infty$.

Tomando una subsucesión, supóngase por ejemplo que $\overline{u_n} \to \infty$, entonces

$$\begin{cases} u''_n = \lambda_n(p - g(u_n)) \\ \quad u_n \quad {}_{T-periódica} \end{cases}$$

Se tiene entonces

$$0 = \int_0^T u''_n = \lambda_n \int_0^T (p - g(u_n))$$

obteniendo

$$\int_0^T p = \int_0^T g(u_n)$$

pero, $u_n = \overline{u_n} + v_n$ ($v_n$acotada), entonces $g(u_n) \to g^+$, llegando a

$$\int_0^T p = T \cdot g^+$$

que es igual a

$$\frac{1}{T}\int_0^T p = g^+$$

lo cual es un absurdo.

Considérese el operador $J\colon Im\ Q \to Ker\ L$ y $J = Identidad$, luego $JQN = QN$.

Como $Ker(L) = \mathbb{R}$, se tiene que JQN restringida al núcleo de L es simplemente la función de una variable

$$JQN(c) = \frac{1}{T}\int_0^T \big(p(t) - g(c)\big)dt = \bar{p} - g(c)$$

Para $c > 0$, se tiene que $JQN(c) > 0 > JQN(-c)$ o viceversa, dependiendo de cuál de las hipótesis del teorema 2.1 valga (porque $g(c) \to g^+ \ y \ g(-c) \to g^-$), entonces claramente para $\Omega = B_c(0)$ con c suficientemente grande, $\Omega \cap Ker(L) = (-c, c)$. Luego, JQN no se anula en el borde y como hay un cambio de signo, el grado vale 1 o -1. Esto puede verse ya que dada

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ continua tal que $f(a) < 0 < f(b)$ (o viceversa) , se define

$$\varphi(t) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

y entonces la función

$$h_\lambda(t) = \lambda f(t) + (1 - \lambda)\varphi(t)$$

no se anula en a ni en b . Se deduce que

$$\deg(f, (a, b), 0) = \deg(\varphi, (a, b), 0) = \pm 1$$

4. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando las condiciones de Landesman-Lazer, la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema periódico no lineal.

Utilizando el teorema (2.1) y(3.1), se probó que el operador N definido para el problema (1.1) era L-compacto.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.