FUNCIONES Y VALORES PROPIOS PARA LA ECUACION DE ESTADO ESTACIONARIO DEL CALOR CON CONDICIONES MIXTAS

The eigen functions and eigen values of steady state heat equation with mixed boundary conditions

RESUMEN

En este trabajo se pretende hallar los valores y funciones propias para la ecuación del estado estacionario con condiciones mixtas dadas, sobre un dominio en forma de semi-toro.

PALABRAS CLAVES: *Ecuación estacionaria del calor, funciones propias, valores propios.*

ABSTRACT

In this work it the eigen values and eigen functions for the equation of the stationary state equation with mixed conditions are analyzed.

KEYWORDS: eigen functions, eigen values, stationary steady equation.

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Matemático, Ph.D
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. Introducción

Las coordenadas toroidales (α, β, ϕ) están definidas por las ecuaciones de transformación a coordenadas cartesianas [4]-[5]:

$$x = \frac{asenh\alpha \cos\phi}{\cosh\alpha - \cos\beta},\ y = \frac{asenh\alpha sen\phi}{\cosh\alpha - \cos\beta},$$
$$z = \frac{asen\beta}{\cosh\alpha - \cos\beta}. \tag{1}$$

La superficie $(\alpha = \alpha_o, \beta, \phi)$ corresponde a un toro con su corazón circular de radio a en el plano ecuatorial, $(\alpha, \beta = \beta_o, \phi)$ la superficie con esferas ortogonales y $(\alpha, \beta, \phi = \alpha_o)$ la superficie con semiplanos meridianos. Las secciones transversales de cada toro en los planos meridianos son círculos de radio $a\,\mathrm{csch}\,\alpha$ y centro en el plano ecuatorial a una distancia $a\coth\alpha$ del eje polar; $0 < \alpha < \alpha_o$ y $\alpha_o < \alpha < \infty$ describen la parte exterior e interior del toro respectivamente. Es de notar que $\alpha_o = 0$ es el eje polar y $\alpha_o = \infty$ el corazón. Las secciones transversales de las esferas para valores de la coordenada β en los planos del meridiano son círculos centrados en $\alpha_o = 0$ y de radio $a|\csc\beta|$ ubicados a una distancia $a\cot\beta$ del origen de coordenadas y con intersección común en $\alpha_o = \infty$. $\beta = 0$ y $\beta = \pi$ son los puntos internos y externos del plano ecuatorial con relación a $\alpha_o = \infty$. $0 < \beta < \pi$ y $\pi < \beta < 2\pi$ son los puntos superiores e inferiores del plano ecuatorial respectivamente.

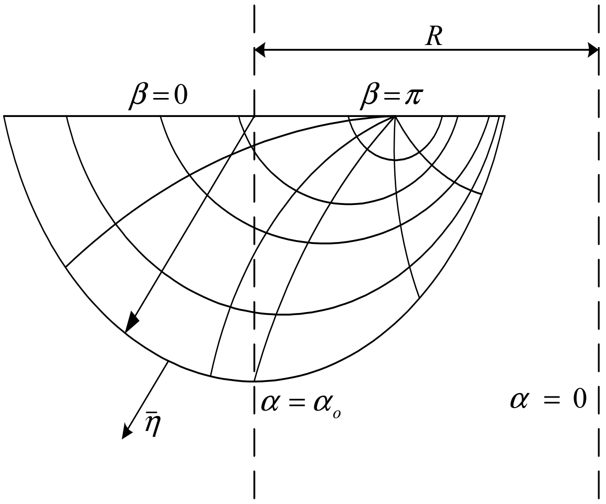
Así después de una sencilla manipulación y al utilizar (1) se obtiene el operador de Laplace en coordenadas toroidales

$$\frac{(\cosh\alpha - \cos\beta)^3}{a^2 senha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{senh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}\frac{\partial}{\partial\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{senh\alpha}{\cosh\alpha - \cos\beta}\frac{\partial}{\partial\beta} + \frac{1}{(\cosh\alpha - \cos\beta)senh\alpha}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right].$$

2. PLANTEAMIENTO Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Fecha de Recepción: 26 de enero de 2009
Fecha de Aceptación: 27 de mayo de 2009

Sea el problema de frontera homogéneo para la ecuación de Laplace en la región que posee forma de semi-toro (fig. 1) en el caso de simetría axial.



En coordenadas toroidales (α,β) la ecuación de Laplace $\Delta u = div(\nabla u) = 0$ se puede escribir como

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{senh\alpha}{\cos h\alpha-\cosh\beta}\frac{\partial u}{\partial\alpha}\right)+$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{senh\alpha}{\cos h\alpha-\cosh\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)=0. \qquad (2)$$

Las condiciones de frontera del problema del movimiento de ondas libres de un fluido ideal en el semi-toro, se describe de la siguiente forma

$$\left.\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}-\sigma u\right)\right|_{\beta=0,\pi}=0,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\alpha=a_o}=0, \qquad (3)$$

donde η es la normal exterior a la frontera.

3. CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE FUCIONES Y VALORES PROPIOS

Veamos el método para la construcción del sistema de funciones y valores propios a partir de (2) y (3).

Utilizando la sustitución dada en [2]

$$u=\sqrt{2\cosh\alpha-2\cos\beta}\quad v, \qquad (4)$$

la ecuación (2) se puede escribir de la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 v}{\partial\beta^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial\alpha^2}+\frac{\partial v}{\partial\alpha}\coth\alpha+\frac{1}{4}v=0. \qquad (5)$$

Utilizando separación de variables $v=A(\alpha)B(\beta)$, de (4) se desprenden las siguientes dos ecuaciones

$$\begin{cases} B''+Bn^2=0, \quad 0\le\beta\le 2\pi, \\ A''+A'\coth\alpha-A\left(n^2-\frac{1}{4}\right)=0, \quad 0\le\alpha\le 2\pi, \end{cases} \qquad (6)$$

donde n^2 es la constante de la división de las variables. Ya que la solución en términos de la coordenada β es 2π periódica, escogemos $n=0,1,2,\ldots$

Teniendo en cuenta que la solución de la segunda ecuación de (6) son funciones esféricas de Legendre de primero y segundo orden $\Phi_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\alpha)$ y $Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\alpha)$, la solución para $\alpha\to\infty$ de (1) la representamos en la forma

$$u=\sqrt{2\cosh\alpha-2\cos\beta}\sum_{n=0}^{\infty}\big(M_n\cos n\beta+$$

$$N_n senn\beta\big)Q_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\alpha) \qquad (7)$$

Al reemplazar la solución (7) en las condiciones de frontera (3) se obtienen los coeficientes M_n y N_n. Las condiciones (3) las transformamos de tal forma que los coeficientes de Lamé [1] en coordenadas toroidales sean iguales a:

$$H_\alpha=H_\beta=\frac{c}{\cosh\alpha-\cos\beta},$$

por esto en el plano $\beta=0,\pi$,

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\beta=0}=-\left(\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)_{\beta=0},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\eta}\right|_{\beta=\pi}=\left(\frac{1}{H_\beta}\frac{\partial u}{\partial\beta}\right)_{\beta=\pi}.$$

Analizando las condiciones en la frontera (3) en el plano $\beta=0$, se llega a la ecuación

$$-\left(\frac{\cosh\alpha-1}{c}\right)\sum_{n=1}^{\infty}nN_nQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\alpha)=$$

$$\sigma\sum_{n=0}^{\infty}M_nQ_{n-\frac{1}{2}}(\cosh\alpha).$$

Para simplicar esta última expresión realizamos los siguientes cambios de variables $x=\cos\alpha$ y $s\sigma=\lambda$, obteniendo

$$(x-1)\sum_{n=1}^{\infty} nN_n Q_{n-\frac{1}{2}}(x)+$$

$$\lambda\sum_{n=1}^{\infty} M_n Q_{n-\frac{1}{2}}(x)=0\,. \tag{8}$$

Utilizando las relaciones de recurrencia de la función de Legendre, se tiene

$$(v+1)Q_{n+1}(x)+vQ_{n-1}(x)=(2v+1)xQ_n(x)\,.$$

Reorganizando la condición de frontera (8) se obtiene

$$\lambda M_o Q_{-\frac{1}{2}}(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda M_n-nN_n)Q_{n-\frac{1}{2}}(x)+$$

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{\infty}N_k\left(k-\frac{1}{2}\right)Q_{k-\frac{3}{2}}(x)+\sum_{i=1}^{\infty}N_i\left(i+\frac{1}{2}\right)Q_{i+\frac{1}{2}}(x)\right).$$

Para unificar la suma en los índices $n-\frac{1}{2}$ a la función $Q_{n-\frac{1}{2}}(x)$ efectuamos el cambio en el orden de la suma en los dos últimos sumandos, primero introduciendo $k-1=n$ y segundo $i+1=n$, al separar los miembros para $n=0$, así

$$\left(\lambda M_o-\frac{1}{4}N_1\right)Q_{-\frac{1}{2}}(x)+\frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(n-\frac{1}{2}\right)N_{n-1}Q_{n-\frac{1}{2}}(x)+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda M_n-nN_n+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)N_{n+1}\right)Q_{n-\frac{1}{2}}(x)=0\,.$$

Igualando a cero los coeficientes para las funciones linealmente independientes $Q_{n-\frac{1}{2}}(x)$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\lambda M_O-\frac{1}{4}N_1=0\,,$$

$$\lambda M_1-N_1+\frac{3}{4}N_2=0\,,$$

$$\vdots \tag{9}$$

$$\lambda M_n+\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)N_{n-1}-nN_n+\frac{1}{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)N_{n+1}=0,$$

$n=2,3,5,\ldots$.

Procediendo de manera análoga, las condiciones (2) para $\beta=\pi$, llegamos al sistema (9) con respecto a M_n y N_n.

Si tenemos en cuenta la condición de frontera para $\alpha=\alpha_o$. Diferenciando la solución (7) con respecto a α al sustituir en (3), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty}(M_n\cos n\beta+N_n sen n\beta)\left[Q_{n-\frac{1}{2}}(x)+2(x_o-\cos\beta)Q'_{n-\frac{1}{2}}(x_o)\right].$$

Para representar esta última expresión en una serie de Fourier, utilizamos las siguientes identidades elementales

$$\cos n\beta\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(n+1)\beta+\cos(n-1)\beta\big),$$

$$sen n\beta\cos\beta=\frac{1}{2}\big(sen(n+1)\beta+sen(n-1)\beta\big),$$

así

$$M_o\left[Q_{-\frac{1}{2}}(x_o)+2x_oQ'_{-\frac{1}{2}}\right]-2M_oQ'_{-\frac{1}{2}}(x_o)\cos\beta+$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(M_n\cos n\beta+N_n sen n\beta)\left[Q_{n-\frac{1}{2}}(x)+2x_oQ'_{n-\frac{1}{2}}(x_o)\right]-$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(M_{n+1}\cos n\beta+N_{n+1}sen n\beta)Q'_{n+\frac{1}{2}}(x_o)-M_1Q'_{\frac{1}{2}}(x_o)-$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}(M_{n-1}\cos n\beta+N_{n-1}sen n\beta)Q'_{n-\frac{3}{2}}(x_o)=0.$$

Igualando a cero los coeficientes para diferentes armónicos, obtenemos otro sistema de ecuaciones como complemento al sistema (9)

$$\mu_oM_o-Q'_{\frac{1}{2}}(x_o)M_1=0\,,$$

$$-2Q'_{-\frac{1}{2}}(x_o)M_o+\mu_1M_1-Q'_{\frac{3}{2}}(x_o)M_2=0\,,$$

$$-Q'_{n-\frac{3}{2}}(x_o)M_{n-1}+\mu_nM_n-Q'_{n+\frac{1}{2}}(x_o)M_{n+1}=0\,,$$

$$\mu_1N_1-Q'_{\frac{3}{2}}(x_o)N_2=0\,, \tag{10}$$

$$-Q'_{k-\frac{3}{2}}(x_o)N_{k-1}+\mu_kN_k-Q'_{k+\frac{1}{2}}(x_o)N_{k+1}=0\,,$$

donde $n=2,3,4,\ldots$, donde

$\mu_n = Q_{n-\frac{1}{2}}(x_o) + 2x_o Q'_{n-\frac{1}{2}}(x_o)$, con $n = 0,1,2,\ldots$.

4. CONCLUSIÓN GENERAL

Partiendo del problema (2)-(3) se llegó al sistema (9), (10) de ecuaciones lineales con respecto a M_n y N_n. Con la condición de semi-regularidad dada en [3] este último se puede resolver utilizando el método de reducción a un sistema finito. La existencia de soluciones no-triviales para los coeficientes M_n y N_n nos da una ecuación de la forma $\Delta(\lambda) = 0$, de la cual se obtienen los valores propios λ para el problema (2)-(3).

3. BIBLIOGRAFÍA

[1] Feshenko S. F. *Metodos para la determinación de la masa en planos en movimiento*. Kiev, Naukova-Dumka, 1969.

[2] *Theory and Applications of Special Functions*, Vol. 13, 2005.

[3] G. Evans, J. Blackledge, P. Yardley *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, Springer, 2000.

[4] N.N. Lebedev, Special Functions and their Applications, Daver, NewYork (1972) Cap. 8.

[5]. G. Arfken, Mathematical Methods for Physicists, 2nd edition, Academic Press, New York (1970)Cap. 2.