PROGRAMACION DE TRABAJOS EN UNA MAQUINA UTILIZANDO UN MODELO DE PROGRAMACION LINEAL ENTERA

Works programming in one machine uses a model Integer linear programming

RESUMEN
En el presente artículo se presenta una aplicación de la Programación Lineal Entera en la solución de un problema de programación de un conjunto de operaciones necesarias para la realización de dos trabajos en una sola máquina. Se inicia con una descripción general del problema para n trabajos, para proseguir con la aplicación del modelo general a un caso de programación de dos productos, finalizando con la solución del problema usando al LINDO como herramienta informática. Este trabajo busca mostrar la importancia que posee las técnicas propias de la investigación de operaciones en la solución de problemas y la toma de decisión empresarial.

PALABRAS CLAVES: Investigación de Operaciones, Modelos Matemáticos Programación Lineal, Solución Optima, Toma de decisiones, Variable Auxiliar binaria.

ABSTRACT
In this paper presents an application of the Integer Linear Programming in solving a problem of scheduling a series of operations required to perform two works on a single machine. It begins with an overview of the problem for n work, to continue implementing the general model to a case of scheduling two products, ending with a solution to the problem using the computer tool LINDO. This paper aims to show the importance it holds own techniques of Operations Research in problem solving and decision-making business.

KEYWORDS: Operations Research, Mathematical Models, Linear Programming, Optimal Solution, decision-making business

PEDRO DANIEL MEDINA V.
Ingeniero Mecánico, Ms.C
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
pemedin@utp.edu.co

EDUARDO ARTURO CRUZ T
Ingeniero Industrial, Ms.C
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ecruz@utp.edu.co

JORGE HERNAN RESTREPO
Ingeniero Industrial, Ms.C
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jhrestrepoco@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

La Investigación de Operaciones (IO) es una herramienta fundamental para la toma de decisiones, el enfoque de esta ciencia en la solución de problemas a través de modelamiento matemático de la situación, plantea importantes retos que deben ser asumidos con responsabilidad por la industria nacional si desea hacer un uso más eficiente de sus escasos recursos, imponiendo un nuevo panorama competitivo.

La programación lineal entera, es una de muchas de las herramientas que proporciona la IO y que se enfoca a modelos lineales en los que una o más variables de decisión están restringidas al conjunto de los números enteros. En este artículo se muestra un ejemplo de la aplicación de esta técnica a la solución de un problema específico dentro de una instalación manufacturera.

2. EL PROBLEMA

Considere el caso en el que se deben programar n trabajos en una sola máquina y cada uno de los n trabajos esta compuesto de m operaciones, con tiempos de duración pi, además cada uno de los n trabajos posee una fecha de entrega d_n y tiene asociado una penalización por entrega tardía de t_n por cada unidad de tiempo de retrazo. Finalmente a cada trabajo se asocia una red de precedencias que representa el orden específico de las operaciones para cada uno de ellos. La situación se muestra gráficamente en la Figura1.

El objetivo del problema es determinar las fechas de inicio de cada una de las operaciones de tal manera que

Fecha de Recepción: 8 deSeptiembre de 2008.
Fecha de Aceptación: 16 de Noviembre de 2008.

se genere la menor penalización total por trabajos tardíos. Es necesario tener en cuenta que como se está programando en una sola máquina, el modelo no puede permitir el traslape en el periodo de realización de dos operaciones pues el recurso solo puede realizar una al tiempo. Por otro lado es indispensable respetar las relaciones de precedencia sobre las operaciones de cada uno de los productos, es así por ejemplo que para el producto 1 la tarea B no puede ser realizada antes de que termine la tarea A. Además las fechas de entrega de cada uno de los trabajos generan una restricción adicional al modelo.

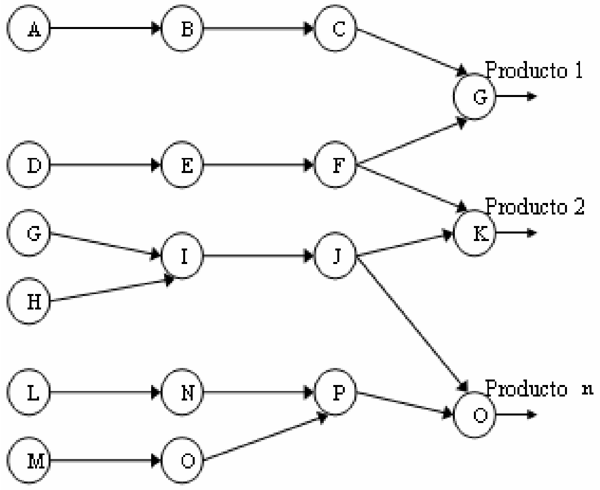

Figura 1. Red que representa el problema

Análisis de las restricciones de no traslape entre operaciones

Sea x_i la fecha de inicio de la operación i, el modelo debe determinar las correspondientes a las *mn* tareas de tal manera que la penalización total por trabajos tardíos sea mínima. Como se observa en la Figura 2, para las tareas *i* y *j* se debe cumplir que:

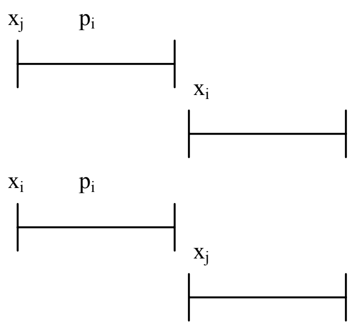

Figura 2. Condiciones para garantizar ningún traslape entre dos operaciones programadas consecutivamente.

$$x_i \geq xj + pj \qquad (1)$$

o

$$x_j \geq xi + pi \qquad (2)$$

Donde la relación (1) representa que la tarea i se realiza después de la tarea j y la (2) que la tarea j se realiza después de la tarea j. El modelo debe de estar en la capacidad de determinar cual de las dos alternativas anteriores debe de ser la restricción activa dejando la otra como restricción no activa. Para ello se define la variable binaria auxiliar y_{ij} que se definirá de la siguiente manera:

$$y_{ij} \rightarrow \begin{cases} 1 \quad si \quad i \; antes \; que \; j \\ 0 \quad si \quad j \; antes \; que \; i \end{cases} \qquad (3)$$

Involucrando esta variable dentro de las restricciones (1) y (2) estas quedarán expresadas de la siguiente manera:

$$x_i - x_j \geq p_j - My_{ij} \qquad (4)$$

$$x_j - x_i \geq p_i - M(1 - y_{ij}) \qquad (5)$$

Donde *M* representa un número muy grande para las condiciones del problema. Es de importancia definir que este tipo de restricción sólo sería aplicable a aquellas operaciones que no sean tengan ninguna relación de precedencia y que por lo tanto podrían llegar a programarse simultáneamente.

Análisis de las restricciones de precedencia

Sea x_i la fecha de inicio de la tarea i, se debe de cumplir para cualquier tarea j que sea precedente de i que:

$$x_j \geq x_i + p_i \qquad (6)$$

Está restricción solo debe de ser utilizada para relacionar aquellas operaciones j que son precedentes directas de alguna operación i, puesto que cualquier operación k precedente de j quedaría incluida.

Análisis de las restricciones de tiempo de entrega

Sea x_i la fecha de inicio de la última operación i del trabajo o producto k, la restricción que corresponde a la fecha de entrega estaría representada por:

$$x_i + p_i + s_k = d_k \qquad (7)$$

Donde s_k representa una variable de desviación que permite modelar la diferencia entre la fecha de entrega del trabajo k y su fecha de terminación. Esta variable tiene la característica de no estar restringida en signo, pues como se observa en la Figura 3, $s_k \geq 0$ representaría una terminación temprana del trabajo, mientras que una $s_k \leq 0$ representaría una terminación tardía del trabajo que generaría una multa t_k por cada día de retrazo.

Como la variable s_k es no restringida en signo debe de ser reemplazada por la resta de dos variables restringidas en signo que no pueden ser consideradas básicas de manera simultánea en cualquier solución del modelo. De acuerdo a lo anterior la variable s_k deberá ser reemplazada en el modelo por:

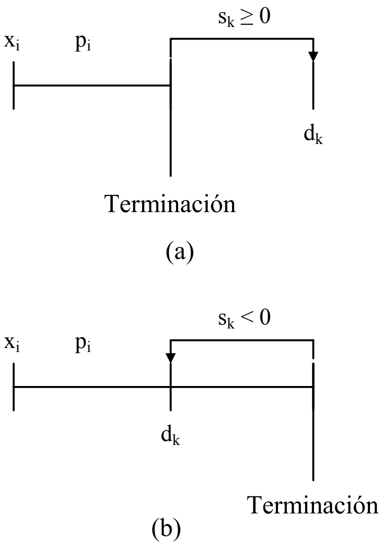

Figura No 3. Comportamiento variable de desviación s_k

$$s_k = s_{ka} - s_{kb} \tag{8}$$

De tal manera que s_{ka} y $s_{kb} \geq 0$. Debido a que estas variables son linealmente dependientes, no pueden ser simultáneamente en cualquier solución > 0. Lo que significa que solo una puede tener un valor >0, lo cual obligaría que la otra tomaría un valor de cero, pudiendo, si ocurrir que ambas sean iguales a cero. Cuando $s_{ka} > 0$ y $s_{kb} = 0$, se generaría un valor positivo para s_k siendo correspondiente al caso (a) de la Figura 3, mientras que si $s_{kb} > 0$ y $s_{ka} = 0$ se obtendría un valor negativo para s_k correspondiendo al caso (b) de la misma figura. Por lo tanto una expresión final para la restricción sería:

$$x_i + p_i + s_{ka} - s_{kb} = d_k \tag{10}$$

De la discusión anterior se infiere que la variable de desviación que modela los días de retrazo respecto a la fecha de entrega corresponde a s_{kb}. Por lo tanto, la función objetivo que representaría la meta de minimizar las multas por retrasos en la entrega estaría dada por:

$$\min \quad Z = \sum_{k=1}^{n} t_k s_{kb} \tag{11}$$

Por lo tanto el modelo final quedaría expresado de la siguiente manera:

$$\min \quad Z = \sum_{k=1}^{n} t_k s_{kb}$$

$$ST$$

$$x_i - x_j \geq p_j - My_{ij}$$

$$x_j - x_i \geq p_i - M(1 - y_{ij})$$

$$\mathrm{x}_j - \mathrm{x}_i \geq \mathrm{p}_i$$

$$x_i + s_{ka} - s_{kb} = d_k - p_i$$

$$x_i,\ s_{ka}\ y\ s_{kb} \in Z \ \ y \geq 0$$

$$y_{ij}\ \ 0\ o\ 1,\ M\ \ es\ un\ número\ muy\ grande$$

3. EL CASO

Considérese la programación de trabajo en un taller que fabrica dos productos finales usando una sola máquina. Los dos trabajos usan en su realización un total de 8 operaciones, cuyas relaciones de precedencia se muestran en la Figura 4. Las Tablas 1 y 2 proporcionan los datos básicos del problema. El objetivo es determinar un plan de producción que minimice la multa total por entrega tardía de los dos productos.

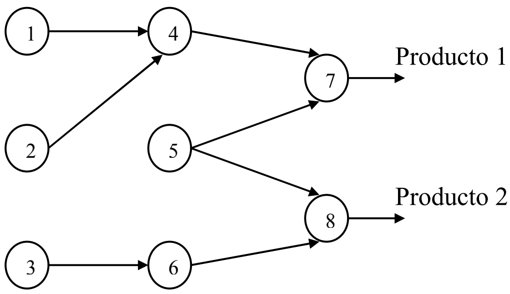

Figura 4. Red de precedencia de operaciones.

Operación	Tiempo de duración (días) (p_i)
1	5
2	7
3	4
4	3
5	6
6	7
7	5
8	8

Tabla 1. Duración de operaciones

Producto	Fechas de entrega (día) (d_k)	Multa \$/dia (t_k)
1	13	5
2	17	4

Tabla 2. Fechas de entrega y penalizaciones por entrega tardía.

Planteamiento del modelo

Las variables de decisión del modelo corresponden a:

x_i, Fecha de inicio de la operación i i = 1……..8
s_{ka}, Variable de desviación que representa terminación a tiempo del trabajo k. k = 1 y 2.
s_{kb}, Variable de desviación que representa terminación tardía del trabajo k. k = 1 y 2.
M[1],es un número muy grande

$$y_{ij} \rightarrow \begin{cases} 1 & si \quad operación\ i\ antes\ que\ j \\ 0 & si \quad operación\ j\ antes\ que\ i \end{cases}$$

Función objetivo:

$$\min \quad Z = 5s_{1b} + 4s_{2b}$$

ST

$$x_1 - x_2 \geq 7 - My_{12}$$
$$x_2 - x_1 \geq 5 - M(1 - y_{12})$$
$$x_1 - x_3 \geq 4 - My_{13}$$
$$x_3 - x_1 \geq 5 - M(1 - y_{13})$$
$$x_1 - x_5 \geq 6 - My_{15}$$
$$x_5 - x_1 \geq 5 - M(1 - y_{15})$$
$$x_1 - x_6 \geq 7 - My_{16}$$
$$x_6 - x_1 \geq 5 - M(1 - y_{16})$$
$$x_1 - x_8 \geq 8 - My_{18}$$
$$x_8 - x_1 \geq 5 - M(1 - y_{18})$$
$$x_2 - x_3 \geq 4 - My_{23}$$
$$x_3 - x_2 \geq 7 - M(1 - y_{23})$$
$$x_2 - x_5 \geq 6 - My_{25}$$
$$x_5 - x_2 \geq 7 - M(1 - y_{25})$$
$$x_2 - x_6 \geq 7 - My_{26}$$
$$x_6 - x_2 \geq 7 - M(1 - y_{26})$$
$$x_2 - x_8 \geq 8 - My_{28}$$
$$x_8 - x_2 \geq 7 - M(1 - y_{28})$$
$$x3 - x_4 \geq 3 - My_{34}$$
$$x_4 - x_3 \geq 4 - M(1 - y_{34})$$
$$x_3 - x_5 \geq 6 - My_{35}$$
$$x_5 - x3 \geq 4 - M(1 - y_{35})$$
$$x_3 - x_7 \geq 5 - My_{37}$$
$$x_7 - x_3 \geq 4 - M(1 - y_{37})$$
$$x_4 - x_5 \geq 6 - My_{45}$$
$$x_5 - x_4 \geq 3 - M(1 - y_{45})$$
$$x_4 - x_6 \geq 7 - My_{46}$$
$$x_6 - x_4 \geq 3 - M(1 - y_{46})$$
$$x_4 - x_8 \geq 8 - My_{48}$$
$$x_8 - x_4 \geq 3 - M(1 - y_{48})$$
$$x_5 - x_6 \geq 7 - My_{56}$$
$$x_6 - x_5 \geq 6 - M(1 - y_{56})$$
$$x_6 - x_7 \geq 5 - My_{67}$$
$$x_7 - x_6 \geq 7 - M(1 - y_{67})$$
$$x_7 - x_8 \geq 8 - My_{78}$$
$$x_8 - x_7 \geq 5 - M(1 - y_{78})$$
$$x4 \geq x1 + 5$$
$$x4 \geq x2 + 7$$
$$x7 \geq x4 + 3$$
$$x7 \geq x5 + 6$$
$$x6 \geq x3 + 4$$
$$x8 \geq x5 + 6$$
$$x8 \geq x6 + 7$$
$$x7 + s1a - s1b = 8$$
$$x8 + s2a - s2b = 9$$
$$x_i,\ s_{ka}\, y\ s_{kb} \in Z\ \ y \geq 0$$
$$y_{ij}\ \ 0\ o\ 1,\ M\ \ es\ un\ número\ muy\ grande$$

Una vez reordenado el modelo, por ejemplo, ubicando en el mismo lado de las desigualdades a todas las variables. Se obtuvo el siguiente modelo, que fue alimentado en el LINDO[2] (software especializado para la solución de modelos matemáticos de Investigación de Operaciones):

[1] Para este caso el valor de M se fijo en 100 pues representa un valor suficientemente grande para las condiciones del mercado.

[2] LINDO (Linear, Interactive, and Discrete Optimizer) es una herramienta computacional para resolver modelos de programación entera, lineal y cuadrática.

```
min 5s1b+4s2b
st
x1-x2+100y12>=7
x2-x1-100y12>=-95
x1-x3+100y13>=4
x3-x1-100y13>=-95
x1-x5+100y15>=6
x5-x1-100y15>=-95
x1-x6+100y16>=7
x6-x1-100y16>=-95
x1-x8+100y18>=8
x8-x1-100y18>=-95
x2-x3+100y23>=4
x3-x2-100y23>=-93
x2-x5+100y25>=6
x5-x2-100y25>=-93
x2-x6+100y26>=7
x6-x2-100y26>=-93
x2-x8+100y28>=8
x8-x2-100y28>=-93
x3-x4+100y34>=3
x4-x3-100y34>=-96
x3-x5+100y35>=6
x5-x3-100y35>=-96
x3-x7+100y37>=5
x7-x3-100y37>=-96
x4-x5+100y45>=6
x5-x4-100y45>=-97
x4-x6+100y46>=7
x6-x4-100y46>=-97
x4-x8+100y48>=8
x8-x4-100y48>=-97
x5-x6+100y56>7
x6-x5-100y56>=-94
x6-x7+100y67>=5
x7-x6-100y67>=-93
x7-x8+100y78>=8
x8-x7-100y78>=-95
x4-x1>=5
x4-x2>=7
x7-x4>=3
x7-x6>=6
x6-x3>=4
x8-x5>=6
x8-x6>=7
x7+s1a-s1b=8
x8+s2a-s2b=9
end
gin[3] x1
gin x2
gin x3
gin x4
gin x5
gin x6
gin x7
gin x8
gin s1a
gin s1b
gin s2a
gin s2b
int y12
int y13
int y15
int y16
int y18
int y23
int y25
int y26
int y28
int y34
int y35
int y37
int y45
int y46
int y48
int y56
int y67
int[4] y78
```

La solución obtenida es:

```
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      177.0000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1        13.000000          0.000000
        X2         0.000000          0.000000
        X3        26.000000          0.000000
        X4        18.000000          0.000000
        X5         7.000000          0.000000
        X6        30.000000          0.000000
        X7        21.000000          0.000000
        X8        37.000000          0.000000
       S1A         0.000000          0.000000
       S1B        13.000000          5.000000
       S2A         0.000000          0.000000
       S2B        28.000000          4.000000
       Y12         0.000000          0.000000
       Y13         1.000000          0.000000
       Y15         0.000000          0.000000
       Y16         1.000000          0.000000
       Y18         1.000000          0.000000
       Y23         1.000000          0.000000
       Y25         1.000000          0.000000
       Y26         1.000000          0.000000
       Y28         1.000000          0.000000
       Y34         0.000000          0.000000
       Y35         0.000000          0.000000
       Y37         0.000000          0.000000
       Y45         0.000000          0.000000
       Y46         1.000000          0.000000
       Y48         1.000000          0.000000
       Y56         1.000000          0.000000
       Y67         0.000000          0.000000
       Y78         1.000000          0.000000
```

Según el reporte del LINDO, las fechas de inicio de cada una de las operaciones están dadas por:

Operación	Fecha de entrega (día)
1	13
2	0
3	26
4	18
5	7
6	30
7	21
8	37

Tabla 3. Fechas de inicio de cada una de las operaciones

En la Figura 4 se observa un gráfico de Gant en el que se muestran la relación de operaciones pertenecientes a la

[3] El comando GIN plantea que la variable correspondiente es de naturaleza binaria.

[4] El comando INT especifica que la variable correspondiente es de naturaleza entera.

red de precedencia de tareas del trabajo 1. En esta figura se puede observar que la diferencia entre el momento de terminación del trabajo y el momento en la que se debería ser la entrega alcanza los 13 días lo cual generaría una penalización por entrega tardía de $ 65.

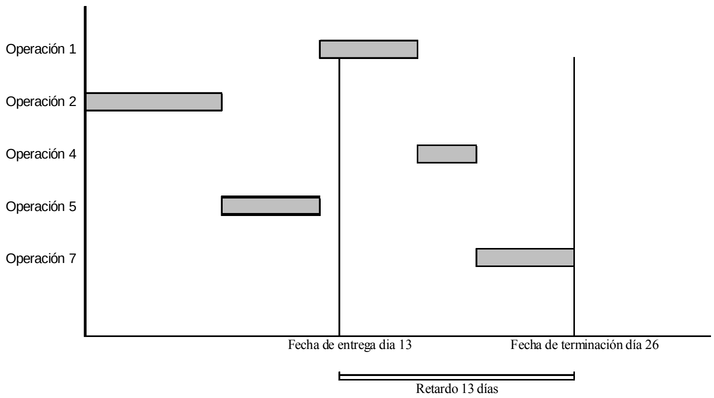

Figura 4. Grafico de gant para las operaciones del trabajo 1.

En la Figura 5 se observa un gráfico de Gant en el que se muestran la relación de operaciones pertenecientes a la red de precedencia de tareas del trabajo 2. En esta figura se puede observar que la diferencia entre el momento de terminación del trabajo y el momento en la que se debería ser la entrega alcanza los 28 días lo cual generaría una penalización por entrega tardía de $ 112.

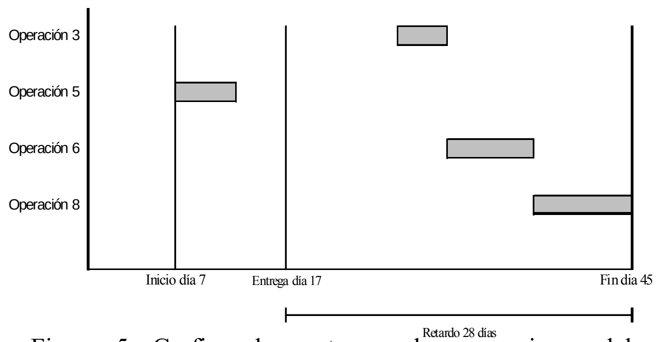

Figura 5. Grafico de gant para las operaciones del trabajo 2.

La penalización total por entregas tardías corresponde a un valor total de $177, referidos a 13 días de tardanza del trabajo 1 y 28 días de tardanza del trabajo 2. Los valores observados en las variables auxiliares binarias por ejemplo, $y_{16} = 1$, significa que la operación 1 se realizará antes que operación 6. A diferencia de lo anterior, el valor $y_{15} = 0$, corresponde al hecho de que la operación 7 se realizaría antes que la tarea 1.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este artículo queda en evidencia la importancia del modelamiento matemático en la solución de problemas empresariales. En este caso se llegó rápidamente a una solución asistida por el LINDO como herramienta informática. Este problema tendría como característica principal la necesidad de evaluar 8! = 80640 alternativas diferentes para la secuenciación de las tareas necesarias para la realización de los 2 trabajos. Este gran número de diferentes formas de ordenación impone una fuerte restricción a la solución de problema por revisión exhaustiva las posibles alternativas.

El uso de variables binarias es importante para el modelamiento de situación en los que se tienen alternativas del tipo si o no, como es el caso de la elección de restricciones del tipo el uno el otro, en las que se debe seleccionar cual de ellas deberá ser efectivamente restrictiva. A través del uso de este tipo de variable fue posible modelar una condición importante del problema que radicaba en la necesidad de no permitir que dos operaciones se programaran simultáneamente.

5. BIBLIOGRAFÍA

(1) ASKIN, Ronald G. y GOLDBERG, Jeffrey B. Design and Analysis of Lean Production Systems. Jhon Wiley & Sons. 2001.

(2) ASKIN, Ronal G. y STANDRIDGE, Charles R. Modeling and Analisis of Manufacturing Systems. Jhon Wiley & Sons. 1998.

(3) HILLIER, Frederick S y LIEBERMAN, Gerald J. Introduction to Operations Research. Sexta edición. MacGraw Hill. 1995.

(4) IRANI, Shahruk. Hanbook of Cellular Manufacturing Systems. Jhon Wiley & Sons. 2002.

(5) KARLOF, John K. Integer Programming: Theory and Practice. Taylor & Francis Group. 2006.

(6) POCHET, Yves y WOLSEY, Laurence A. Production Planning by Mixed Integer Programming. Springer. 2006.

(7) TAHA, Hamdy. Investigación de Operaciones: Una Introducción. Prentice Hall. Sexta edición. 1998.

(8) VOLLMANN, Thomas E; BERRY, William L. y WHYBARK, D Clay. Manufacturing Planning and Control for Supply Chain Management. Mac Graw Hill. 1997.

(9) WOLSEY, Laurence A y NEMHAUSER, George L. Integer and Combinatorial Optimization. John Wiley & Sons. 1999.