LA TEORÍA DE LA MICRODERMACIÓN PARA ANALIZAR TRAYECTORIAS COMPLEJAS

The study of complex loading by theory of microdeformation

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Matemático, Ph.D
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

RESUMEN

En este trabajo se pretende utilizar la teoría de la microdeformación para la solución de problemas con cargas complejas.

PALABRAS CLAVES: *Teoría de microeformación, carga compleja.*

ABSTRACT

In this paper the theory taking into account the microdeformation under complex loading is studied.

KEYWORDS: *Microdeformation, complex loading.*

1. INTRODUCCIÓN

La característica principal de las teorías de plasticidad basadas en la microestructura, consiste en que se representa el macro-volumen como algún conjunto de micropartículas intercomunicadas, en las cuales las cuales el modo de deformación es determinado por las microtensiones y las microdeformaciones. De este modo, se acepta la existencia de por lo menos dos niveles de dimensiones características: macrodimensión, determinado por las dimensiones del macrovolumen y el micronivel, de dimensión característica que se determina por las dimensiones de la micropartícula. Es de notar que en esta teoría la dimensión del microelemento no se asume fija. Debido a esta definición la "micropartícula" es simplemente una convención y refleja sólo el hecho de la existencia de dos diferentes niveles característicos para la construcción de las correlaciones constitutivas.

2. RELACIONES DE LA TEORÍA DE MICRODEFORMACIÓN

Para la construcción de la ley local de la deformación, el tensor de las velocidades de la microdeformación $\dot{\varepsilon}_{oij}$ se asume como la suma del elástico $\dot{\varepsilon}^{e}_{oij}$ y del plástico $\dot{\varepsilon}^{p}_{oij}$ de cada uno de sus componentes

$$\dot{\varepsilon}_{oij} = \dot{\varepsilon}^{e}_{oij} + \dot{\varepsilon}^{p}_{oij}\,. \tag{1}$$

Para la velocidad elástica de microdeformación se asume que se cumple la Hooke. Se considera además que la matriz elástica de dureza de la micropartícula coincide con la matriz elástica de dureza del macrovolumen correspondiente. Si además se supone que las deformaciones plásticas no influyen en la elasticidad del ambiente, la ley de la elasticidad se pone de la siguiente manera

$$\overset{\nabla}{\tau}{}^{ij} = E^{ijkl}\dot{\varepsilon}^{e}_{kl}\,, \tag{2}$$

donde $\overset{\nabla}{\tau}{}^{ij}$ son los componentes contravariantes de la derivada según Yaman del tensor de microtensiones de Kirchoff. Las expresiones para los componentes de la matriz E^{ijkl} se escriben como:

$$E^{ijkl} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{1}{2}\left(G^{ik}G^{jl} + G^{jk}G^{il}\right) + \frac{\nu}{1-2\nu}G^{ij}G^{kl}\right], \tag{3}$$

Fecha de Recepción: 23 de Agosto de 2007
Fecha de Aceptación: 12 de Diciembre de 2008.

donde E y ν son el módulo de Grumete y el coeficiente Poisson de la partícula. En calidad de la ley local de fluido se utiliza la teoría de plasticidad de fluido algunas simplificaciones. El deflector de las microtensiones $\mathbf{s}_o = s_o^{ij}\mathbf{G}_i\mathbf{G}_j = s_{oij}\mathbf{G}^i\mathbf{G}^j$, $\left(s_o^{ij} = \tau_o^{ij} - \frac{1}{3}G_{kl}\tau_o^{ij}G^{ij} \right)$, se presenta como disipativo τ_o y elástico p_o de los componentes de la resistencia de deformaciones plásticas [1]:

$$s_o^{ij} = t_o^{ij} + p_o^{ij}, \qquad \overset{\nabla ij}{s} = \overset{\nabla ij}{s_o} + \overset{\nabla ij}{p_o}. \tag{4}$$

El tensor de las fuerzas disipativas $\dot{\tau}_o$ se considera ligado con la deformación microplástica por las relaciones del tipo de la fricción seca. En los problemas en este trabajo realizados nos limitamos al caso de pequeñas deformaciones antes del punto crítico. Daremos en el estado no deformado el deflector singular dirigido α_{ij}, que determina la dirección de las deformaciones microplásticas de la micropartícula. Aceptaremos que esta dirección es fijada de manera que los términos de la ley local de fluidez las superficies locales de fluidez son planas y se trasladan junto con la carga activa, los incrementos de las deformaciones microplásticas son dirigidas en la dirección normal a estos planos de fluidez. Así el enlace entre el tensor de las fuerzas disipativas con las deformaciones microplásticas se representa como

$$\dot{\varepsilon}_{oij}^{p} = \dot{\varepsilon}_{oij}^{p}\alpha_{ij}, \; \dot{\tau}_{oij}^{p} = \dot{\tau}_{oij}^{p}\alpha^{ij}, \; \tau^{ij}\alpha_{ji} \le \dot{\tau}_o. \tag{5}$$

Aquí $\dot{\tau}_o$ es el límite local de fluidez, $\dot{\varepsilon}_o^p$ es la velocidad de las deformaciones microplásticas en la dirección de α_{ij}. Las ecuaciones antes escritas se cumplen para una deformación microplástica activa, las cuales tienen lugar si:

$$\tau_o = \sqrt{\tau_o^{ij}\tau_{oij}} \text{ y } \varepsilon_o^p > 0. \tag{6}$$

Cuando cualquiera de las condiciones escritas anteriormente no se cumplen, tiene lugar la descarga dada en (2).

Para el carácter cerrado de la ley local las ecuaciones escritas deben completadas con las relaciones que determinan el cambio del límite local de la fluidez τ_o y el deflector de las microtensiones internas p_o^{ij}.

Al igual que los trabajos realizados en [1,2] aceptaremos que al cambio del deflector de las microtensiones internas, en el caso general, influye la deformación microplástica de todas las micropartículas examinadas en el macrovolumen. La ecuación para p_o^{ij}, en vista de las observaciones analizadas, tenemos:

$$p_t^{kl}(\alpha_{kl},t) = \int_\Omega H_1(\alpha_{kl},\alpha'_{mn})\dot{\varepsilon}_o^{p}(\alpha'_{mn},t)\alpha^{ij}d\Omega',$$
$$p_i^{ij}(\alpha_o^{kl},0) = \mathbf{0}, \tag{7}$$

donde Ω es la esquina del “ángulo corporal” en dimensión espacial cinco del espacio deflector, que determina el conjunto de direcciones activas de las deformaciones microplásticas, $d\Omega$ es el incremento de esta “esquina”, H_1 es la función de influencia que caracteriza la relación de las deformaciones microplásticas.

Para las relaciones que poseen las leyes locales de la microdeformación y la deformación macroscópica, la relación de Krener en las velocidades, se describen como:

$$\overset{\nabla ij}{s} - \overset{\nabla ij}{s_o} = mg^{ik}(\dot{\varepsilon}_{okl}^{p} - \dot{\varepsilon}_{kl}^{p})g^{lj}. \tag{8}$$

Aquí m es constante.

Para la función conocida de la velocidad de microdeformación $\dot{\varepsilon}_o^p$ y la región de las direcciones activas de las deformaciones microplásticas Ω, la velocidad de las deformaciones microplásticas en la configuración actual corriente se determinada como la suma de todas las velocidades microplásticas de deformación

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{p} = \int_\Omega \dot{\varepsilon}_o^{p}(\alpha'_{kl},t)\alpha'_{ij}\, d\Omega'. \tag{9}$$

Todas las relaciones antes descritas representan un sistema cerrado de ecuaciones de la teoría de la plasticidad que tiene en cuenta las microdeformaciones.

La función de la influencia se representamos de la siguiente manera

$$H_1 = a_1\delta\left(1-\alpha'_{ij}\alpha^{ij}\right) + a_2\alpha'_{ij}\alpha^{ij} + a_3\left[1+2h\left(\alpha'_{ij}\alpha^{ij}\right)\right] + a_4\delta\left(1+\alpha'_{ij}\alpha^{ij}\right).$$

Aquí $\delta(x)$ es la función delta de Dirac, a_i son las funciones universales del material que dependen de la macromedida de deformación plástica y de las cantidades de la región de las direcciones activas de la deformación microplástica, y $h\left(\alpha'_{ij}\alpha^{ij}\right)$ es la función análoga a la función de Heaviside($h\left(\alpha'_{ij}\,\alpha^{ij}\right)=1$) para $\alpha^{ij}\in\Omega$ y $h\left(\alpha'_{ij}\,\alpha^{ij}\right)=0$ en todos los demás casos). La función de la intensidad de las deformaciones macroplásticas es determinada de la solución de ecuación integral que corresponde y puede ser presentado como [6,8]:

$$\dot{\varepsilon}_o^p\left(\alpha_{kl},t\right)=\frac{1}{A_1}\left(\alpha_{ij}-\frac{A_3}{A_1+A_3\Omega}\mathbf{F}_{ij}\right)\dot{\mathbf{r}}^{ij}, \quad (10)$$

donde: $A_1=a_1+m$, $A_2=a_2-\mu$, $A_3=a_3$ son las funciones universales del material, $\dot{r}^{ij}=\overset{\nabla ij}{s}-A_2G^{ik}G^{jl}\dot{\varepsilon}_{kl}^p$ es el deflector de las tensiones activas y

$$\mathbf{F}_{ij}=\int_\Omega\alpha_{ij}d\Omega,\ \Omega=\int_\Omega d\Omega. \quad (11)$$

Evaluando la integral (10) teniendo en cuenta (9) encontramos la velocidad de las deformaciones macroplásticas

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p=\tilde{G}_{ijkl}\dot{r}^{kl}. \quad (12)$$

aquí

$$\tilde{G}_{ijkl}=\frac{1}{A_1}\left(\mathbf{A}_{ijkl}-\frac{A_3}{A_1+A_3\Omega}\mathbf{F}_{ij}\mathbf{F}_{kl}\right)\dot{\mathbf{r}}^{kl}, \quad (13)$$

donde $\mathbf{A}_{ijkl}=\int_\Omega\alpha_{ij}\alpha_{kl}d\Omega$. Resolviendo (37) con respecto a $\dot{\varepsilon}_{ij}^p(t)$ llegamos a que

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p=g_{ip}g_{jq}G_1^{pqkl}\dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (14)$$

donde

$$G_1^{ijkl}=\left(I^{ijpq}+A_2G_2^{ijpq}\right)^{-1}G_2^{pqkl},$$
$$G_2^{ijpq}=\frac{1}{A_1}\left(A^{ijkl}\frac{\mu}{1+\mu\Omega}F^{ij}F^{kl}\right).$$

Las relaciones constitutivas de la teoría de la plasticidad que tiene cuenta las microdeformaciones, para la región Ω conocida, de las direcciones activas de las deformaciones microplásticas se presentan de la manera siguiente:

$$\dot{s}^{ij}=2G\left(I^{ijkl}-G_1^{ijkl}\right)\dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (15)$$

Para la definición de la región de la deformaciones microplásticas activas, conociendo a Ω, es necesario hacer uso de las siguientes desigualdades

$$T(\alpha_{mn},t)\geq\dot{s}^{ij}\alpha_{mn},\ \dot{\varepsilon}_p(\alpha_{mn},t)>0, \quad (16)$$

donde a través de $T(\alpha_{mn},t)$ es designada la intensidad de las tensiones, que en vista de la forma sencilla que posee la función de influencia y de la fórmula (10) para la velocidad de cambio de la intensidad deformaciones microplásticas activas, pueden ser halladas como resultado de la integración de las relaciones siguientes [2]:

$$\dot{\mathrm{T}}(\alpha_{ij},t)=\begin{cases}\mathrm{A}_1\dot{\varepsilon}_o^p(\alpha_{ij},t)+\mathrm{A}_2\overset{\nabla kl}{s}\alpha_{kl}+A_3\int_\Omega\dot{\varepsilon}_o^p(\alpha'_{ij},t)d\Omega', & \alpha_{ij}=\alpha'_{ij}\\ \overset{\nabla kl}{s}\alpha_{kl}+A_3\int_\Omega\dot{\varepsilon}_o^p(\alpha'_{ij},t)d\Omega', & \alpha_{ij}\neq\alpha'_{ij}\\ \overset{\nabla kl}{s}\alpha_{ij}+A_3\int_\Omega\dot{\varepsilon}_o^p(\alpha'_{ij},t)d\Omega'+A_4\left[\dot{\varepsilon}_o^p(\alpha'_{ij},t)+\psi\right], & \alpha_{ij}=-\alpha'_{ij}\end{cases} \quad (17)$$

Introduciremos en nuestro análisis la base deflectora $\mathbf{p}^{(k)}=p_{ij}^{(k)}\mathbf{g}^i\mathbf{g}^j,\left(k=\overline{1,5}\right)$.

Para comodidad supongamos que la base de tensores son normados y ortogonales.. Las direcciones α_{oij} de las microdeformaciones pláticas activas en la base deflectora $\mathbf{p}^{(k)}$ se representan como:

$$\alpha_{oij}=\lambda_k\mathbf{p}_{ij}^{(k)},$$

Después de la elección de la base deflectora se introduce el sistema de coordenadas hiperesférico [1]:

$$\lambda_1=Cos\theta_1;$$
$$\lambda_2=Sen\theta_1Cos\theta_2;$$
$$\lambda_3=Sen\theta_1Sen\theta_2Cos\theta_3, \quad (18)$$

$$\lambda_4 = Sen\theta_1 Sen\theta_2 Sen\theta_3 Cos\theta_4;$$
$$\lambda_5 = Sen\theta_1 Sen\theta_2 Sen\theta_3 Sin\theta_4.$$

Las expresiones para la matriz de durabilidad $\mathbf{G}^{ijkl}$, las matrices $\mathbf{F}_{ij}$ y la forma diferencial $d\Omega$ teniendo en cuenta las anotaciones antes hechas, llegamos a:

$$G_{kl} = \int_\Omega \lambda_k \lambda_l d\Omega\,,\ F_k = \int_\Omega \lambda_k d\Omega\,,$$

$$d\Omega = Sen^3\theta_1 Sen^2\theta_2 Sen\theta_3 d\theta_1 d\theta_2 d\theta_3 d\theta_4\,. \quad (19)$$

Para la definición de la región Ω de las direcciones microplásticas activas aprovecharemos las deformaciones del proceso de microdeformación en la dirección α_{ij} (11), que teniendo en cuenta (35) poseen el siguiente aspecto:

$$\lambda_k \dot{r}^k - \frac{\mu}{1+\mu\Omega} F_k \dot{r}^k > 0\,,$$

$$\dot{r}^k = \overset{\nabla k}{s} - A_2\, \dot{\ni}_k^p\,. \quad (20)$$

Las relaciones constitutivas de la teoría de la microdeformación las presentaremos como

$$\dot{S}_k = A^{kl}\, \dot{\ni}_l\,. \quad (21)$$

Para la trayectoria tridimensional de la carga es posible escribir

$$\dot{S}_1 = A_{11}\, \dot{\ni}_1 + A_{12}\, \dot{\ni}_2 + A_{13}\, \dot{\ni}_3\,,$$
$$\dot{S}_2 = A_{21}\, \dot{\ni}_1 + A_{22}\, \dot{\ni}_2 + A_{23}\, \dot{\ni}_3\,, \quad (22)$$

$$\dot{S}_3 = A_{31}\, \dot{\ni}_1 + A_{32}\, \dot{\ni}_2 + A_{33}\, \dot{\ni}_3\,,\ \dot{S}_4 = A_{44}\, \dot{\ni}_4\,,$$
$$\dot{S}_5 = A_{44}\, \dot{\ni}_5\,.$$

con los coeficientes A_{ij} dados como

$$A_{ij} = 2G\left(\delta^{ij} G_{ij}^{(1)}\right),$$

donde

$$G_{ij}^{(1)} = \left(\delta^{ik} + A_2 G_{ik}^{(2)}\right)^{-1} G_{kj}^{(2)}\,,$$
$$G_{ij}^{(2)} = \frac{1}{A_1}\left(G_{ij} - \frac{\mu}{1+\mu\Omega} F_i F_j\right),$$

$$G_{11} = 2\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Cos^2\theta_1 Sen^3\theta_1 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,,$$
$$G_{22} = 2\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Cos^5\theta_1 Sen^2\theta_1 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,,$$
$$G_{12} = G_{21} = \pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Cos\theta_1 Sen^4\theta_1 Cos\theta_2 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,,$$

$$G_{33} = G_{44} = G_{55} = \frac{4}{3}\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Sen^5\theta_1 Sen^4\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,,$$

$$F_1 = 4\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Cos\theta_1 Sen^3\theta_1 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,,$$

$$F_2 = 4\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Sen^4\theta_1 Cos\theta_2 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,, \quad (23)$$
$$\Omega = 4\pi \int_o^{\alpha_1} \int_o^{\alpha_2(\theta_1)} Sen^3\theta_1 Sen^2\theta_2 d\theta_1 d\theta_2\,.$$

Los demás G_{kl} y F_k son iguales al cero.

Hallemos las relaciones necesarias para trayectorias concretas en dos y en tres dimensiones, pasando de las representaciones dadas en (21) a su representación en el espacio tensorial. Para éste fin aprovecharemos las representaciones dadas general como:

$$\dot{S}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_0\right),$$
$$\dot{S}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_0\right) + 2\left(\dot{\sigma}_{22} - \dot{\sigma}_0\right)\right),$$

$$\dot{S}_3 = \sqrt{2}\dot{\sigma}_{12}\,,\ \dot{\text{э}}_1 = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_0\right), \qquad (24)$$

$$\dot{\text{э}}_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\left(\dot{\varepsilon}_{11} - \dot{\varepsilon}_0\right) + 2\left(\dot{\varepsilon}_{22} - \dot{\varepsilon}_0\right)\right),$$

$$\dot{\text{э}}_3 = \sqrt{2}\dot{\varepsilon}_{12}\,,$$

donde

$$\dot{\sigma}_0 = \left(\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22}\right)/3\,,\ \dot{\varepsilon}_0 = \left(\dot{\varepsilon}_{11} + \dot{\varepsilon}_{22} + \dot{\varepsilon}_{33}\right)/3\,.$$

Sustituyendo estas fórmulas en (21) y teniendo en cuenta que $\dot{\sigma}_{\hat{\imath}} = 3K\dot{\varepsilon}$ encontramos

$$\sigma^{\nabla}{}_{11} = a_{11}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{12}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{13}\dot{\varepsilon}_{12}\,,$$

$$\sigma^{\nabla}{}_{22} = a_{21}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{22}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{23}\dot{\varepsilon}_{12}\,, \qquad (25)$$

$$\sigma^{\nabla}{}_{12} = a_{31}\dot{\varepsilon}_{11} + a_{32}\dot{\varepsilon}_{22} + a_{33}\dot{\varepsilon}_{12}\,.$$

Las constantes a_{ij}, A_{ij} se determinan de la forma [4].

4. CONCLUSIÓN GENERAL

Como se sigue de la teoría antes expuesta, la teoría que tiene en cuenta la microdeformación permite, describir cargas con trayectorias complicadas y cíclicas, lo que no es posible en la teoría tradicional de plasticidad.

3. BIBLIOGRAFÍA

1. Novozhilov V.V, Kadashevish Yu.I., Chernyakov Yu.A. La teoría de plasticidad teniendo en cuenta la microdeformación // Doblad Ademia de ciencias USSR. 1985. T.4. P.821-823.

1. Hutchinson J. W. Post−bifurcations behavior in the plastic range // J. Mech. Phys. Solids. 1973. Vol.21.
2. Kadashevich Yu.I., Chernyakov Yu.A.Theory of plasticity taking into account micro-stresses, Adv. Mech. 1992. V. 15, № 3-4. P. 3-39.
3. Gonzalez J. R. The bifurcation and postbifurcation behavior of elasticplastic plates under complex loading // GAMM – Jahrestagung – 2002 – Augsburg (Germany) Pp. 52-53.
4. Gonzalez J. R., Chernyakov Yu. A., Teslenko D. K., La teoría de la microdeformación y su utilización en la investigación de estabilidad de envolturas y láminas delgadas frente a una carga compleja // Lvov – 2000 – T.2 –P 216-218.