EXISTENCIA DE SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO APLICANDO EL METODO DE SUPER Y SUB-SOLUCIONES

Existence of solution of a boundary problem using the method of upper and lower-solutions

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Profesor de Planta (Asistente)
Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Licenciado en Matemáticas y Física
Especialista en Docencia Universitaria
Magíster en Matemáticas
Magíster en Instrumentación Física.
Profesor Asociado – Departamento de Matemáticas
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

JAIRO ALBERTO MENDOZA VARGAS.
Ingeniero Electricista. M.Sc.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira
jam@utp.edu.co

RESUMEN

En el presente artículo se muestra un resultado de existencia de solución para un problema de contorno usando el método de super y sub-soluciones. Bajo condiciones apropiadas, se prueba la existencia de solución de un problema periódico utilizando el teorema de punto fijo de Schauder.

PALABRAS CLAVES: Super-solución, sub-solución, punto fijo, Schauder.

ABSTRACT

In this paper we show a result of existence of solution for a boundary problem using the method of upper and lower solutions. Under apropiates conditions, we prove the existence of solutions of the periodic problem using the Schauder's fixed point theorem.

KEYWORDS: Upper-solution, lower-solution, fixed point, Schauder.

1. INTRODUCCIÓN

Se considera el siguiente problema periódico

$$\begin{cases} u'' = f(t,u) \\ u(0) = A,\ u(T) = B \end{cases} \tag{1.1}$$

donde por simplicidad se supone que *f* es continua y de clase C^1 respecto a la variable *u*.

Para ello se usarán resultados del teorema de punto fijo de Schauder aplicados a espacios de Banach.

2. TEOREMAS DE PUNTO FIJO

Es importante recordar que el teorema de punto fijo de Schauder es la generalización del teorema de punto fijo de Brouwer en dimensión infinita; por ello se recuerda dicho teorema importante de la topología.

Teorema 2.1. (Brouwer). Considérese *H Hilbert* de dimensión finita, $C \subset H$ un conjunto compacto, convexo no vacío. Si $f : C \to C$ es una función continua, entonces tiene un punto fijo. [1]

Teorema 2.2. (Schauder). Sea *C* un subconjunto convexo y compacto en *E*, espacio de Banach. Si $T : C \to C$ es continuo, entonces *T* tiene un punto fijo. [1]

Corolario 2.1. (Schauder). Sea *C* convexo, cerrado en *E* espacio de Banach, $T : C \to C$ continuo tal que *T(C)* es relativamente compacto, entonces *T* tiene un punto fijo. [1]

3. METODO DE SUPER Y SUB-SOLUCION

Una *Sub-solución* es cualquier función α que cumpla

Fecha de Recepción: 8 de Diciembre de 2008.
Fecha de Aceptación: 26 de Diciembre de 2008.

$$\begin{cases} \alpha'' \geq f(t,\alpha) \\ \alpha(0) \leq A, \ \ \alpha(T) \leq B \end{cases}$$

Una *Super-solución* es cualquier función β que cumpla

$$\begin{cases} \beta'' \leq f(t,\beta) \\ \beta(0) \geq A, \ \ \beta(T) \geq B \end{cases}$$

4. RESULTADOS DE EXISTENCIA DE SOLUCION

Se quiere probar la existencia de al menos una solución de

$$\begin{cases} u'' = f(t,u) \\ u(0) = A, \quad u(T) = B \end{cases}$$

donde por simplicidad se supone que *f* es continua y de clase C^1 respecto a la variable *u.*

Teorema 3.1. Supóngase que existen α y β sub-solución y super-solución respectivamente tales que $\alpha \leq \beta$.

Entonces existe al menos una solución *u* de (1.1) con la condición de que $\alpha \leq u \leq \beta$.

Demostración. Sea el conjunto (Banach)

$$C[0,T] = \{u: [0,T] \to \mathbb{R}, \quad continua\}$$

con

$$\|u\| = \sup_{0 \leq t \leq T} |u(t)|$$

Considérese además el con junto

$$E = \{u \in C[0,T]: \alpha(t) \leq u(t) \leq \beta(t), \ \ \forall t\}$$

Defínase el operador

$$T: E \to C[0,T]$$

compacto y puede verse que $T(E) \subset E$ (acá, *E* cerrado, convexo y acotado).

Siendo $\lambda \geq 0$, resulta que si

$$\begin{cases} u'' - \lambda u \geq 0 \\ u(0), \ \ u(T) \leq 0 \end{cases}$$

entonces, $u \leq 0$ en *[0,T]*. Esto puede justificarse de la siguiente manera:

Para $\lambda > 0$, si existe un t_0 tal que $u(t_0) > 0$, puede suponerse que $u(t_0)$ es máximo y entonces

$$u''(t_0) \geq \lambda u(t_0) > 0$$

lo cual es un absurdo.

Ahora, si $\lambda = 0$, entonces $u'' \geq 0$ y el resultado es trivial.

Elíjase $\lambda < 0$ tal que $\varphi(u) = f(t,u) - \lambda u$ (*t* fijo) sea decreciente en *u* para $\alpha(t) \leq u \leq \beta(t)$.

Se resuelve para $v > 0$ (fijo) el siguiente problema:

$$\begin{cases} u'' - \lambda u = f(t,v) - \lambda v \\ u(0) = A, \ \ u(T) = B \end{cases} \tag{4.1}$$

El operador $T: E \to C[0,T]$ es compacto (se requiere que sea compacto porque es una de las hipótesis del teorema de Schauder; debe recordarse que esto significa que para cualquier acotado *C,* la clausura de *T(C)* es compacta), y además $T(C) \subset E$, pues si $\alpha \leq v \leq \beta$, entonces

$$u'' - \lambda u = f(t,v) - \lambda v \leq f(t,\alpha) - \lambda\alpha \leq \alpha'' - \lambda\alpha$$

entonces,

$$(u-\alpha)'' - \lambda(u-\alpha) \leq 0$$

y

$$(u-\alpha)(0), \qquad (u-\alpha)(T) \geq 0$$

entonces, $(u-\alpha) \geq 0$.

Del mismo modo $(u-\beta) \leq 0$, entonces $\alpha \leq u \leq \beta$, luego por el teorema de Schauder, *T* tiene un punto fijo (que en este caso se obtiene dentro de *E*) que es solución de (4.1).

5. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando el teorema de Schauder , la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de un problema periódico no lineal.

Utilizando el teorema (2.2) y el corolario (2.1), se probó que el operador *T* definido para el problema (4.1) tenía un punto fijo, el cual dio solución a (1.1).

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.