

HERRAMIENTAS PEDAGÓGICAS APLICADAS EN LA ENSEÑANZA DE LAS FIGURAS DE LISSAJOUS**Pedagogical tool applied in the Lissajous Figures teaching****RESUMEN**

Las figuras de Lissajous han sido una herramienta muy importante de la física y la ingeniería; estas permiten de forma gráfica analizar e interpretar la interacción sobre una partícula de dos movimientos perpendiculares, proceso, que de otra forma sería más complejo de comprender. En el presente artículo (que puede considerarse el primero de dos sobre el tema) se pretende mostrar al lector algunas estrategias pedagógicas que favorecen el proceso Enseñanza Aprendizaje al complementar el estudio tradicional de las figuras de Lissajous a través de la implementación de diferentes herramientas (incluso de hardware), resaltando que la vigencia de las figuras aún no se ha perdido, pero se han facilitado su construcción, representación y lectura.

PALABRAS CLAVES: Figura, Lissajous, Seno, Coseno, Perpendicular.

ABSTRACT

Lissajous figures have been a very important tool in physics and engineering, these let us analyze and interpret graphically the interaction on a particle of two perpendicular movements, a process that otherwise would be more complex to understand. This paper (which can be considered the first of two on this topic) is intended to implement a strategy that promotes the teaching-learning process to complement the traditional study of Lissajous figures through the implementation of different tools (including hardware), emphasizing that the validity of the figures has not yet been lost, but its construction, representation and reading have been facilitated.

KEYWORDS: Figure, Lissajous, Sine, Cosine, Perpendicular.

1. INTRODUCCIÓN

El proceso de enseñanza aprendizaje ha de ser reevaluado día a día para que evolucione a la par con las necesidades, motivaciones y emociones de los estudiantes contemporáneos, quienes en la mayoría de los casos aún se enfrentan a sesiones de clase magistral tradicional en donde no se recurre suficientemente a la utilización de estrategias pedagógicas, ni se aprovechan las herramientas que se encuentran al alcance de los estudiantes.

Aunque existen diferentes estrategias que los docentes siguen para garantizar la comprensión de los temas que orientan, muchas veces se mantiene un rumbo descontextualizado de la realidad del estudiante de hoy, por tal motivo se desaprovechan algunas de las potencialidades humanas, científicas y tecnológicas que hacen parte de la cotidianidad de los aprendientes. Por tal razón los autores del presente artículo buscan poner de

JIMMY ALEXANDER CORTÉS OSORIO.

Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jcortes@utp.edu.co

NESTOR FABIO MONTOYA.

Licenciado en Matemáticas y Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Especialista en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Auxiliar.
Universidad Tecnológica de Pereira.
nestormontoya@hotmail.com

JOSÉ ANDRÉS CHAVES OSORIO.

Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Especialista en Pedagogía.
Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jachaves@utp.edu.co

manifiesto y fortalecer un movimiento, aplicable en el aula, en donde se utilicen más y mejor estrategias que apoyen los procesos de Enseñanza Aprendizaje dentro y fuera del aula de clase.

2. PEDAGOGÍA**2.1 Significado etimológico**

El significado etimológico está relacionado con el arte o ciencia de enseñar. La palabra proviene del griego antiguo παιδαγωγός (paidagogós), el esclavo que traía y llevaba niños a la escuela; de las raíces "paidos" que es niño y "gogía" que es llevar o conducir. La pedagogía no correspondía a la palabra que representaba a una ciencia, se usaba sólo como denominación de un trabajo: el del pedagogo que consistía en la guía del niño (ha de señalarse que relacionada con este campo disciplinar se considera a la Androgogía).

Cuando la Ilustración europea de fines del siglo XVIII y comienzos del XIX, desde Francia, Alemania, Inglaterra, a través de personajes como el Marqués de Condorcet, Rousseau, Herbart, Pestalozzi, Fröbel, plantean el interés "ilustrado" por el progreso humano y retoman el significado griego; aparecen otros significados que, por otra parte, ya estaban anclados en las mismas raíces y que ya han sido señaladas.

De un lado, la palabra "paidos", niño, comienza a expandirse brindando un significado de lo humano, relacionándose con todas las etapas de la vida de hombres y mujeres, no sólo referenciándolas con la niñez. El verbo, igualmente, deja de ser el significado base de la "guía" física/psíquica para pasar a significar "conducción", "apoyo", "personal", "vivencial"; por eso, reiteradas veces se ha explicitado "pedagogía" como "androgogía", significante que no ha llegado a tener la misma fortuna; tal vez porque "pedagogía", además de la tradición, tenía a su favor la insistencia en la infancia como en el tiempo crucial para construir la persona a perfeccionar, además de evitar las preocupaciones del lenguaje sexista actual que requeriría "androgogía" y "ginegogía".

2.2 Concepto de pedagogía

La pedagogía es un conjunto de saberes que se aplican a la educación como fenómeno típicamente social y específicamente humano. Es por tanto una ciencia de carácter psicosocial que tiene por objeto el estudio de la educación con el fin de conocerla, analizarla y perfeccionarla. La pedagogía es una ciencia aplicada que se nutre de disciplinas como la sociología, la economía, la antropología, la psicología, la historia, la filosofía o la medicina¹ y sobre la que hoy en día tiene gran influencia el avance técnico científico de la humanidad.

3. DIDÁCTICA

3.1 Significado etimológico

La palabra didáctica deriva del griego didaktikè ("enseñar")

3.2 Concepto de Didáctica

Se define como la disciplina científico-pedagógica que tiene como objeto de estudio los procesos y elementos existentes en la materia en sí y el aprendizaje. Es, por tanto, la parte de la pedagogía que se ocupa de los sistemas y métodos prácticos de enseñanza destinados a plasmar en la realidad las directrices de las teorías pedagógicas. La Didáctica se asocia con otras disciplinas pedagógicas como, por ejemplo, la organización escolar

y la orientación educativa; la didáctica pretende fundamentar y regular los procesos de enseñanza y aprendizaje.

3.3 Modelos didácticos

La historia de la educación muestra la enorme variedad de modelos didácticos que han existido. La mayoría de los modelos tradicionales se centraban en el profesorado y en los contenidos (modelo proceso producto). Los aspectos metodológicos, el contexto y, especialmente, el estudiantado, quedaban en un segundo plano. Como respuesta al verbalismo y al abuso de la memorización típica de los modelos tradicionales, los modelos activos (característicos de la escuela nueva) buscan la comprensión y la creatividad, mediante el descubrimiento y la experimentación. Estos modelos suelen tener un planteamiento más científico y democrático y pretenden desarrollar las capacidades de autoformación. (modelo mediacional)

Actualmente, la aplicación de las ciencias cognitivas a la didáctica ha permitido que los nuevos modelos didácticos sean más flexibles y abiertos, y muestren la enorme complejidad y el dinamismo de los procesos de enseñanza-aprendizaje (modelo ecológico).

3.3.1 Modelos de referencia:

3.3.1.1 Normativo, reproductivo o pasivo

Centrado en el contenido. La enseñanza consiste en transmitir un saber a los alumnos. La pedagogía es entonces el arte de comunicar, de "hacer pasar un saber".

- ✓ El maestro muestra las nociones, las introduce, provee los ejemplos.
- ✓ El estudiante, en primer lugar, aprende, escucha, debe estar atento; luego imita, se entrena, se ejercita y al final, aplica.
- ✓ El saber ya está acabado, ya está construido.

3.3.1.2 Incitativo o germinal

Centrado en el discente.

- ✓ El maestro escucha al estudiante, suscita su curiosidad, le ayuda a utilizar fuentes de información, responde a sus demandas, busca una mejor motivación (medios centros de interés de Decroly, cálculo vivo de Freinet).
- ✓ El estudiante busca, organiza, luego estudia, aprende (a menudo de manera próxima a lo que es la enseñanza programada).
- ✓ El saber está ligado a las necesidades de la vida, del entorno (la estructura propia de ese saber pasa a un segundo plano).

¹ <http://es.wikipedia.org/wiki/Pedagog%C3%ADa> [5]

3.3.1.3 Aproximativo o constructivo

Centrado en la construcción del saber por el discente. Se propone partir de modelos, de concepciones existentes en el aprendiente y ponerlas a prueba para mejorarlas, modificarlas, o construir nuevas.

- ✓ El maestro propone y organiza una serie de situaciones con distintos obstáculos (variables didácticas dentro de estas situaciones), organiza las diferentes fases (acción, formulación, validación, institucionalización), organiza la comunicación de la clase, propone en el momento adecuado los elementos convencionales del saber (notaciones, terminología).
- ✓ El discente ensaya, busca, propone soluciones, las confronta con las de sus compañeros, las defiende o las discute.
- ✓ El saber es considerado en lógica propia².

3. SITUACIÓN DE LOS APRENDIENTES MODERNOS

El estudiante promedio que llega al aula de clase en muchas Universidades colombianas ha “padecido” la falta de compromiso entre el saber que “adquiere”, el saber que “aprende”, y el saber que “aprehende”. Este último enfatizado en el hecho de que se obtiene por la vía de la transferencia del conocimiento (enfocada a la aplicación del conocimiento), aquella en la que los saberes se construyen al interior del individuo como una edificación propia que posee bases particulares (sólidas o débiles) fundamentadas en los saberes previos y que crece en determinadas direcciones de acuerdo a los intereses y motivaciones propias de cada individuo que desea aprender, articulándose por medio de las muy variadas estrategias y experiencias de aprendizaje que caracterizan a cada aprendiente y los procesos que ha vivido para llegar a su estado actual de conocimiento.

La situación que pretende plantearse se relaciona con el hecho de que muchos estudiantes no tienen claras sus propias respuestas a interrogantes como: ¿Para qué aprender?, ¿Porqué aprender?, ¿A dónde me conduce este aprendizaje?, ¿En realidad es lo que quiero aprender?, entre otras; y lo que es aún más grave que en muchos casos, estas respuestas también las desconocen profesores, padres de familia y hasta el propio estado.

Explorar sobre la anterior situación parece salirse un poco del objeto de este trabajo, pero al mismo tiempo es esta la situación que motiva a los autores a escribirlo; ya

que la mejor manera que existe para que los “estudiantes aprendan” (el sueño de todo maestro), empieza con el hecho de que ellos realmente quieran, sumado a este hecho es claro observar que el objeto de aprendizaje debe estar ligado a sus intereses y que en este proceso de aprendizaje el aprendiente debe sentirse como “protagonista” y no como un simple “intermediario” del conocimiento. Ya que los jóvenes de hoy quieren vivir experiencias que, los modifiquen, los transmuten, los nutran y los conviertan en seres más fuertes y capaces.

5. FIGURAS DE LISSAJOUS

Una figura de Lissajous es la trayectoria de un punto móvil cuyas coordenadas rectangulares (x,y) se describen por movimientos armónicos simples³. Las ecuaciones para este sistema pueden observarse en las Ecuaciones 1 y 2.

$$x(t) = A_1 \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1)$$

Ecuación 1. Función horizontal variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple (MAS)

$$y(t) = A_2 \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ecuación 2. Función vertical variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple (MAS)

Donde las funciones x(t), y(t) son perpendiculares entre sí. Un ejemplo de este sistema puede describirse mecánicamente como se muestra en la Figura 1.

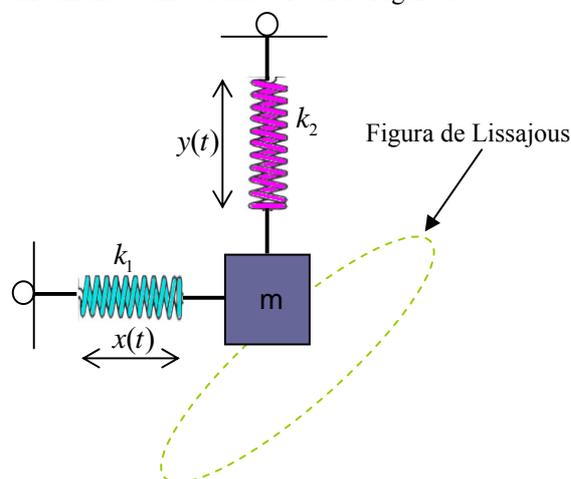


Figura 1, Sistema mecánico para construir las figuras de Lissajous

Por simplicidad para el análisis se considerará de aquí en adelante que $A_1 = A_2 = 1$; por lo tanto, se obtiene las Ecuaciones 3 y 4.

$$x(t) = \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1)$$

² <http://es.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1ctica> [6]

³ Alonso Finn Mecánica Tomo I [4]

Ecuación 3. Función horizontal de amplitud unitaria variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple (MAS)

$$y(t) = \text{sen}(\omega_2 t + \phi_2)$$

Ecuación 4. Función vertical de amplitud unitaria variable en el tiempo de un Movimiento Armónico Simple (MAS)

La figura resultante depende entonces de ω_1 , ω_2 , Φ_1 y Φ_2 . Donde Φ_1 y Φ_2 están asociadas a las condiciones iniciales del sistema y definen el punto de partida de coordenadas $x(0)$, $y(0)$ en el instante $t = 0$. Posteriormente, las coordenadas (x, y) que varían con el tiempo definen puntos para diferentes instantes t describiendo las trayectorias denominadas Figuras de Lissajous.

El método más general para dibujar estas figuras consiste en evaluar las ecuaciones paramétricas en valores discretos de t , tomando como base un múltiplo de las frecuencias que interactúan. Una representación alterna de las funciones $x(t)$, $y(t)$, refiriéndolas al punto $(0, y)$ como se ve en la Figura 2, busca definir una forma simplificada (que permite dibujarlas fácilmente) en la que en la escala adecuada se aprecia el desfase δ entre las funciones.

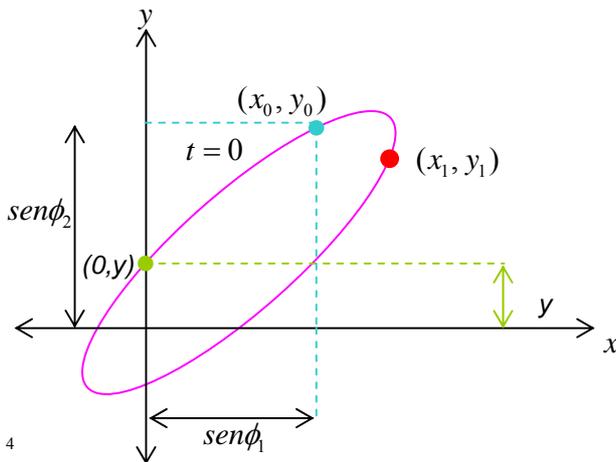


Figura 2, Ejemplo de una figura de Lissajous

Esta representación alterna se obtiene mediante el siguiente análisis: Cuando $t = 0$ en las ecuaciones 3 y 4:

$$x(0) = x_0 = \text{sen}\phi_1$$

$$y(0) = y_0 = \text{sen}\phi_2$$

Analizando el corte con el eje y ($x=0$):

$$0 = \text{sen}(\omega_1 t + \phi_1)$$

Lo cual ocurre cuando:

$$\omega_1 t + \phi_1 = 0$$

$$t = -\frac{\phi_1}{\omega_1}$$

Reemplazando este valor en y , se obtiene:

$$y = \text{sen}\left[\omega_2\left(-\frac{\phi_1}{\omega_1}\right) + \phi_2\right]$$

$$y = \text{sen}\left[\phi_2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\phi_1\right]$$

Se obtiene el valor δ en la Ecuación 5:

$$\delta = \phi_2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)\phi_1$$

Ecuación 5. Desfase δ entre las funciones $x(t)$, $y(t)$

Se tiene que las ecuaciones paramétricas del movimiento pueden reescribirse mediante las ecuaciones 6 y 7 Definiendo la representación alterna antes mencionada así:

$$x(t) = \text{sen}(\omega_1 t)$$

Ecuación 6. Representación alterna de la Ecuación 3

$$y(t) = \text{sen}(\omega_2 t + \delta)$$

Ecuación 7. Representación alterna de la Ecuación 4

5.1 ANTECEDENTES

Las figuras de Lissajous fueron descubiertas por el astrónomo y matemático americano de Salem Massachusetts Nathaniel Bowditch en 1815 cuando estudiaba el movimiento del péndulo compuesto. Bowditch (1773-1838) fué un científico autodidacta, autor de numerosos trabajos científicos, recordado principalmente por su libro “The New American Practical Navigator”, que fue adoptado por el Departamento Americano de la Marina de Estados Unidos. Jules Antoine Lissajous (1822-1880) fue un físico francés que, independientemente de Bowditch, estudió ampliamente las curvas que llevan su nombre en sus investigaciones sobre Óptica.

Lissajous no se encuentra entre los gigantes de la historia de la ciencia, sin embargo, su nombre es conocido en la

⁴ Traducción de Alberto Gómez del artículo de Frank G. Karioris The Physics Teacher, Volúmen 13, número 5, Mayo de 1973 [3].

física por las "figuras de Lissajous", patrones de formas que aparecen cuando se superponen movimientos a lo largo de líneas perpendiculares. Lissajous entró en la Ecole Normale Supérieure en 1841 y más tarde se convirtió en profesor de física en la Lycee Saint-Louis en París, donde estudió el sonido y las vibraciones. En 1855 ideó un simple método óptico para el estudio de vibraciones compuestas, colocando un pequeño espejo a cada uno de los objetos que vibran (dos diapasones, por ejemplo) y apuntaba un haz de luz a uno de los espejos. El haz se refleja en primer lugar al otro espejo y de allí a una gran pantalla, donde se formaba un patrón bidimensional como resultado visual de la combinación de las dos vibraciones. Esta sencilla idea es el precursor del moderno osciloscopio, que fue una novedad en la época de Lissajous, hasta entonces el estudio de sonido dependía únicamente del proceso de audición; es decir, solo por el oído humano. Lissajous literalmente hizo posible "ver el sonido."

5.2 CONJUNTO DE FIGURAS DE LISSAJOUS

En la Figura 4 se muestran algunas figuras de Lissajous organizadas por la relación ω_1/ω_2 y el ángulo de desfase denominado δ .

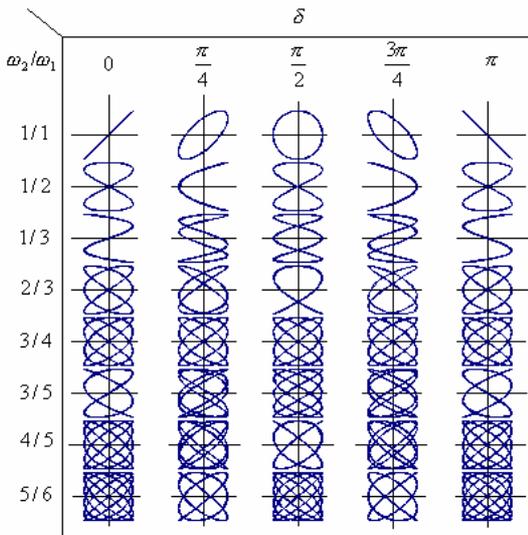


Figura 3, Conjunto de Figuras de Lissajous Elementales generadas por computador

6. CONSTRUCCIONES DE LAS FIGURAS

6.1 En Clase a Mano

La realización de las figuras de Lissajous sobre el papel, presenta grandes ventajas que obligan a mostrar este procedimiento a pesar de existir múltiples herramientas de software sobre el cual desarrollarlas de forma más eficiente y sofisticada. El hecho de no requerir de procesos computacionales y permitir su implementación dentro del espacio del aula con unos condiciones mínimas, hacen de este proceso un paso casi obligado dentro del desarrollo del estudio de las figuras en el salón

de clase. Para graficar las dos funciones $x(t)$, $y(t)$, que interactúan simultáneamente se deben representar sobre una hoja de papel seno-seno, la cual debe diseñarse previamente haciendo uso de un par de círculos trigonométricos cada cierta cantidad de grados. Aunque es posible realizar divisiones sobre el papel muy finas, usualmente se implementan en pasos cada 10 grados debido a lo laborioso de su construcción, sobre todo en los extremos de la rejilla donde la proximidad de las líneas hace difícil su definición. En la Figura 4 se observa la forma en que se generan líneas horizontales y verticales (cada 10 grados para el ejemplo) desde los círculos trigonométricos (ubicados a la izquierda y abajo), cuyas intersecciones definen finalmente la hoja de papel seno para trabajar (enmarcada en color rojo).

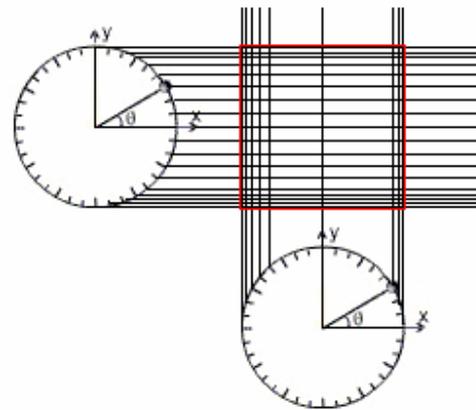


Figura 4, Construcción del papel seno-seno

A continuación, se ilustra a través de un ejemplo, el procedimiento para generar las figuras de Lissajous para las ecuaciones 8 y 9 que se indican a continuación:

$$x(t) = \sin(5t + 20)$$

Ecuación 8. Función $x(t)$ ejemplo de la Ecuación 3

$$y(t) = \sin(5t + 60)$$

Ecuación 9. Función $y(t)$ ejemplo de la Ecuación 4

Aplicando la Ecuación 5, se determina el valor de δ :

$$\delta = \phi_2 - \frac{\omega_2}{\omega_1} \phi_1$$

$$\delta = 60 - \frac{5}{5} 20$$

$$\delta = 40$$

Las ecuaciones resultantes transformadas resultan más fáciles de graficar sobre el papel seno-seno.

$$x(t) = \sin 5t$$

Ecuación 10. Función $x(t)$ ejemplo de la Ecuación 6

$$y(t) = \sin(5t + 40)$$

Ecuación 11. Función $y(t)$ ejemplo de la Ecuación 7

La gráfica puede iniciarse en $(20,60)$ cuando $t = 0$ (en las ecuaciones 8 y 9), pero es más práctico, para la mayoría de los casos, iniciar en el corte con el eje vertical; es decir en $(0,\delta)$, que para el ejemplo es $(0,40)$ (cuando $t = 0$ en las ecuaciones 10 y 11). La grafica se construye efectuando pasos determinados por la relación entre las frecuencias, la cual para el presente caso resulta ser dada por $\omega_2/\omega_1 = 5/5 = 1/1$.

En la Figura 5 se indica el procedimiento utilizando flechas en color rojo en donde se inicia marcando una pequeña x en color negro en $(0,40)$ y luego se avanza a la par con la proporción entre ω_2/ω_1 , que en este caso resulta ser uno horizontal derecha, uno vertical arriba; este proceso se repite hasta que se llega a cualquiera de los bordes extremos, si es el superior, el siguiente paso se hace hacia abajo, si es lateral derecho el siguiente paso se hace hacia la izquierda y así sucesivamente teniendo en cuenta el mismo criterio de “rebote” abajo y al lado izquierdo, hasta que exista plena conciencia de que la figura se repite cíclicamente.

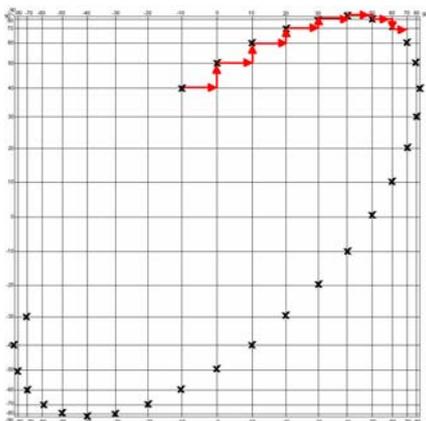


Figura 5, Uso del papel seno-seno para construir Figuras de Lissajous

6.2 Con Hardware a través de sistemas mecánicos

Después de manejar con claridad los conceptos relacionados con las figuras de Lissajous se pueden proponer experiencias de aprendizaje muy interesantes en donde se puede sugerir por ejemplo la construcción de sistemas que permitan la elaboración de la figuras por medios con cierto nivel de automatización como el que se muestra en la Figura 6, de modo tal que ahora son los estudiantes con su profesor, quienes pueden “crear” las figuras utilizando diversos medios; lo que de alguna manera incentiva la creatividad, tan necesaria en países como Colombia que requieren más investigación e innovación.

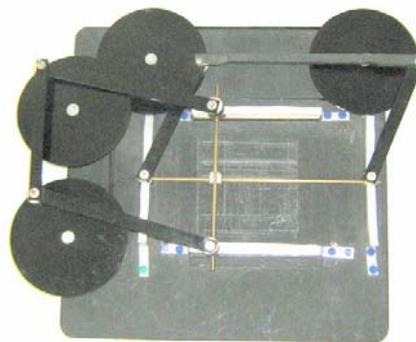


Figura 6, Sistema mecánico para construir las Figuras de Lissajous. Cortesía Profesor Raúl Zuluaga Hernández

7. CONCLUSIONES

Se espera generar motivación en los docentes para que promuevan procesos de formación en el aula en donde la transferencia del conocimiento sea un factor preponderante.

Se resalta la importancia que tienen todos los órganos de los sentidos como fuente primaria y fundamental para la interiorización del conocimiento, ya que no sólo aprendemos viendo el tablero o escuchando al profesor, también lo hacemos tocando, oliendo, gustando, interactuando, probando nuestros propios medios e incluso equivocándonos.

8. BIBLIOGRAFÍA

- [1] ARONS, A. *A Guide to introductory Physics teaching*. Editorial John Wiley & Sons. 1990.
- [2] VARELA FAVIERES, Manrique, P. DE LANDAZÁBAL. *Iniciación a la Física en el marco de la teoría constructivista*. C.I.D.E. 1989.
- [3] Traducción de ALBERTO GÓMEZ del artículo de FRANK G. KARIORIS *The Physics Teacher*, Volúmen 13, número 5, Mayo de 1973.
- [4] Alonso Finn. *Mecánica Tomo I*.
- [5] Colaboradores de Wikipedia. *Pedagogía* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2008 [fecha de consulta: 21 de mayo del 2008]. Disponible en <<http://es.wikipedia.org/wiki/Pedagog%C3%ADa>>.
- [6] Colaboradores de Wikipedia. *Didáctica* [en línea]. Wikipedia, La enciclopedia libre, 2008 [fecha de consulta: 25 de mayo del 2008]. Disponible en <<http://es.wikipedia.org/wiki/Did%C3%A1ctica>>.