

## MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS EN DOS DIMENSIONES PARA ESTUDIO DE PROPAGACIÓN EN POTENCIALES ELECTROSTÁTICOS

### Finite element method in the electrostatic potential propagation

#### RESUMEN

Este artículo presenta la motivación y algunas consideraciones del método de elementos finitos con su aplicación para el caso bidimensional. Una vez se plantea, se describe cómo se desarrolla el aplicativo de manera computacional. Los resultados obtenidos son comparados con un caso típico de propagación de potencial electrostático mostrado en el artículo **método iterativo para el cálculo de potenciales electrostáticos** [1].

**PALABRAS CLAVES:** Método de elementos finitos, Potenciales electrostáticos, Métodos computacionales en electromagnetismo.

#### ABSTRACT

*This paper shows the preliminars concept about Finite Element Method, FEM, in bidimensional analysis. Then, we show the computational implementation. Finally the results are compared against other one obtained through a method showed in [1] in a typical case.*

**KEYWORDS:** Finite Element Method, Electrostatic Potential, Computational Method in Electromagnetism.

#### JHON EDUAR VALENCIA \*

Estudiante X semestre  
Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
kinny.valencia@gmail.com

#### ALEXANDER MOLINA C. \*\*

Ingeniero Electricista  
Profesor Auxiliar  
Universidad Tecnológica de Pereira  
almo@utp.edu.co

#### VICTOR DANIEL CORREA. \*\*\*

Ingeniero Electricista  
Profesor Catedrático  
Universidad Tecnológica de Pereira  
almo@utp.edu.co

\*, \*\*, \*\*\* Miembros del Grupo de Campos Electromagnéticos y Fenómenos Asociados.

## 1. INTRODUCCIÓN

Dentro del electromagnetismo clásico se analiza la propagación de las ondas electromagnéticas en presencia de medios materiales absorbentes o no, con superficies “uniformes” y complejas [2]. Lo anterior permite estudiar; la radiación en antenas de sistemas de comunicaciones inalámbricos y la manera como se comportan tales ondas cuando a su paso se encuentran obstáculos como construcciones, vegetación, zonas montañosas entre otros [3]. Otro tipo de estudio tiene que ver con la manera con la que las señales de tipo industrial afectan su vecindad, tales señales están presentes en las líneas eléctricas cuya frecuencia es de 60 Hz y que reciben la denominación de Frecuencia Extremadamente Baja.

Como primer paso ha de enfrentarse el estudio del caso electrostático, donde, si bien no se presenta propagación de señal de campos eléctricos y magnéticos con variación en el tiempo, existen potenciales debido a distribuciones de carga cuyos efectos sí se propagan en medios materiales [5]. En estos casos las soluciones a las ecuaciones de Maxwell carecen de derivadas temporales lo que implica soluciones independientes del tiempo. En un nivel superior se encuentra el análisis electrodinámico que presenta una complejidad mayor a nivel matemático y requieren resultados con buena precisión sin el esfuerzo

adicional que representa el estudio analítico. La variable tiempo entra como complicante en estos problemas [6].

En general, para las aplicaciones que tienen que ver con el estudio de los campos eléctricos y magnéticos estáticos y dinámicos, surge como herramienta importante el Electromagnetismo Computacional que pretende, entre otras cosas; evitar las complejidades de los estudios analíticos, disminuir los tiempos en que se obtiene respuesta de los problemas y permitir la interpretación ágil de los resultados. Estos son elementos importantes en el desarrollo de aplicaciones a nivel de ingeniería [7].

El grupo de Investigación en Campos Electromagnéticos y Fenómenos Asociados de la Universidad tecnológica de Pereira, se ha planteado el desarrollo e implementación de metodologías computacionales. Así es como en un artículo anterior se mostró el desarrollo analítico de un caso particular de propagación de señal electrostática, que fue comparado con los resultados obtenidos mediante un proceso iterativo [1]. Ahora se pretende la implementación del Método de Elementos Finitos (MEF) en dos dimensiones para el caso electrostático.

En la sección 2 del documento se presenta el problema de Dirichlet que describe matemáticamente la situación para la que se implementa la metodología, aquí mismo se presentan los resultados analíticos derivados de la

solución de la ecuación de Laplace de un problema típico. En el mismo aparte se muestra la solución obtenida mediante la herramienta desarrollada en [1].

En la sección 3 se presentan generalidades del método, así como algunos aspectos de la motivación. En la sección 4 se describe la implementación computacional y algunas consideraciones. Finalmente en la sección 5 se presentan algunos resultados y se discuten frente a lo desarrollado en [1].

**2. SOLUCIONES AL PROBLEMA DE DIRICHLET. BARRA DIELECTRICA.**

El caso de estudio se plantea: calcular la distribución del potencial electrostático en una barra muy larga de material dieléctrico con sección transversal rectangular que tiene dimensiones  $a$  y  $b$  (con su eje longitudinal en la dirección  $z$ ) como se muestra en la figura 1. Una de las caras ( $x = 0$ ) tiene un potencial  $V_0$  mientras las demás se conectan a cero voltios. Cabe mencionar que el problema del Electromagnetismo es la determinación del campo eléctrico y que tal campo eléctrico se relaciona con el potencial eléctrico mediante el teorema de Helmholtz.

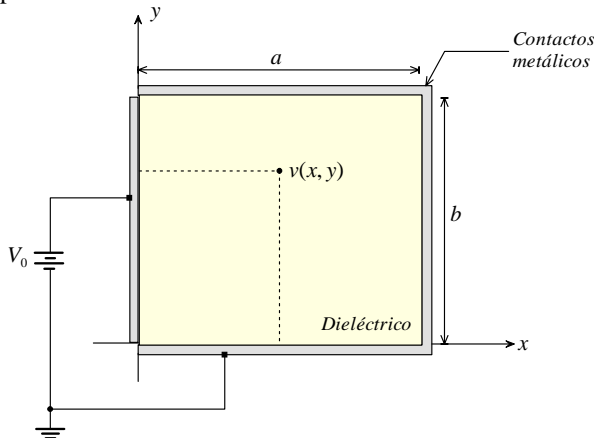


Figura 1. Región bidimensional y condiciones de frontera

Este fenómeno físico y otros de características similares pueden modelarse de manera general mediante la ecuación de Laplace:

$$\nabla^2 v = 0 \tag{1}$$

donde  $\nabla^2$  es el operador Laplaciano escalar (divergencia del gradiente).

**2.1. La solución analítica**

El problema de Dirichlet en este caso es encontrar  $v(x, y)$  que satisfaga la ecuación 2, obtenida a partir de la expansión de 1 y sujeta a las restricciones matemáticas planteadas en 3 [5].

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{2}$$

$$\begin{aligned} v(x, 0) = v(x, b) = 0, \quad 0 \leq x \leq a \\ v(a, y) = 0, \quad 0 \leq y \leq b \\ v(0, y) = V_0, \quad 0 \leq y \leq b \end{aligned} \tag{3}$$

La solución obtenida mediante series es la mostrada en 4 según lo estudiado en [1].

$$v(x, y) = \frac{-4V_0}{\pi} \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ impar}}}^{\infty} \frac{\sinh[(x-a)] \cdot \text{sen}(n\pi y/b)}{n \sinh(n\pi a/b)} \tag{4}$$

Para efectos de comparación, se considera  $a=b=1 \text{ cm}$  y  $V_0=1 \text{ V}$ . En las figuras 3 y 4 se muestran gráficamente los resultados y se hace evidente el fenómeno de Gibbs en uno de los valores de frontera. Con toda seguridad es posible manifestar que, excepto en la frontera, la solución analítica entrega el valor exacto del voltaje en el interior de la barra.

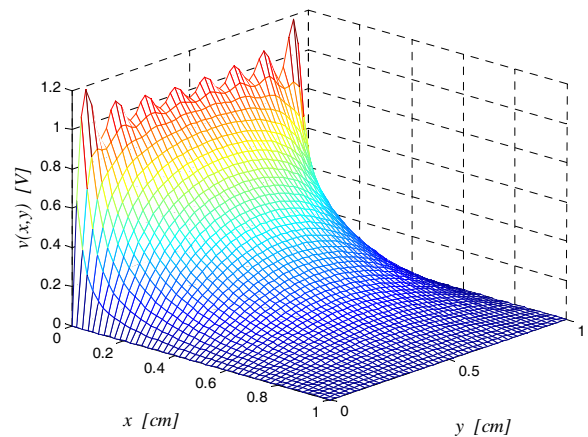


Figura 2. Potencial eléctrico usando ecuación 4.

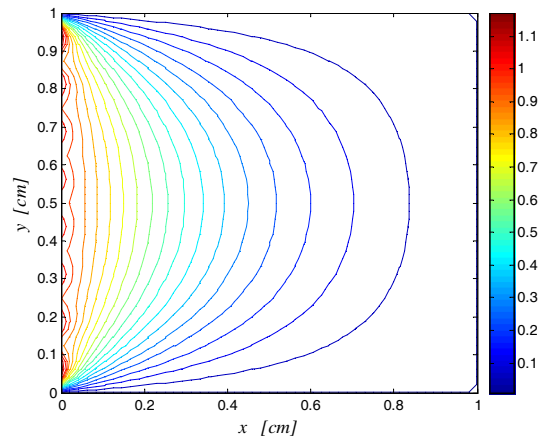


Figura 3. Líneas equipotenciales de la superficie de la figura 2.

En el centroide de la sección de la barra mostrada en la Figura 1, el potencial evaluado a partir de la ecuación 4

es  $v(0.5, 0.5) = 0.25 V$ . Este valor se usará como dato de comparación para los resultados que se obtengan con el método iterativo y el MEF.

**2.1. La solución iterativa**

Para la solución iterativa, se parte de igual manera del caso particular de la ecuación de Laplace en dos dimensiones. Lo anterior según la ecuación 2.

Según lo desarrollado en [1], las derivadas parciales en  $x$  y  $y$  se replantean como en las ecuaciones 5 y 6 para encontrar finalmente lo descrito en la ecuación 8, resultado éste, clave para la implementación del método iterativo. En la figura 4 se ilustran los valores descritos en las ecuaciones 5,6,7.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(x_0, y_0) \approx \frac{V_1 + V_2 - 2V_0}{h^2} \tag{5}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(x_0, y_0) \approx \frac{V_3 + V_4 - 2V_0}{h^2} \tag{6}$$

$$V_0 = \frac{V_1 + V_2 + V_3 + V_4}{4} \tag{7}$$

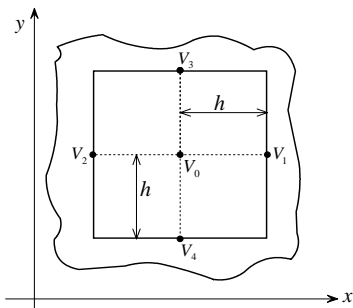


Figura 4. Un segmento de la subdivisión

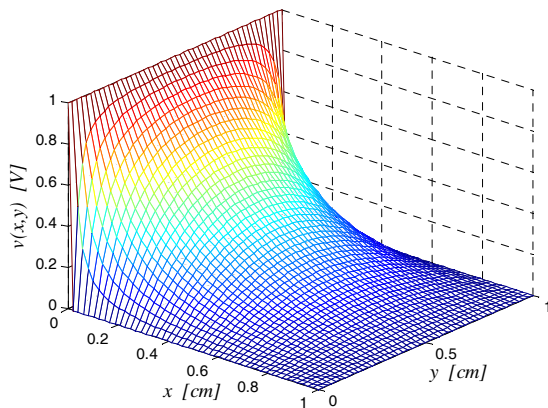


Figura 5. Un segmento de la subdivisión

Considerando el problema de la figura 3 correspondiente a la ecuación 3 se obtiene la solución, punto a punto, presentada en la figura 5.

Puede notarse que en este resultado no se presenta la oscilación que aparece en la solución analítica. El potencial en el punto central de la región toma el valor de

$v(0.5,0.5)=0.249986$ , el anterior potencial presenta un error de  $1 \times 10^{-5}$ .

La implementación del método resulta ser más cómoda para el problema analizado. Los resultados iterativos presentan mejor comportamiento en la frontera, además de presentar un error pequeño en aquellos puntos donde el valor analítico obtenido es confiable.

**3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS MEF.**

Como se menciona en la introducción, es necesario implementar herramientas de soporte matemático sólido para el estudio de los fenómenos electromagnéticos. Tales herramientas son denominadas generalmente herramientas de Electromagnetismo Computacional. Una de tales herramientas es el Método de Elementos Finitos, MEF, (FEM por Finite Element Method). Este método básicamente discretiza la región bajo análisis en una serie de conjuntos dimensionales finitos, denominados elementos [7][8]. Sobre estos elementos se generan un conjunto de funciones linealmente independientes que determinan el comportamiento particular del conjunto de manera que sea coherente con el comportamiento general del problema. Las condiciones de frontera permiten establecer el punto de partida de la implementación computacional.

En adelante se presentan algunas formulaciones de tipo matemático que hacen visible el soporte del problema.

**3.1. Desarrollo preliminar**

Se supone un problema inicial, formulado matemáticamente por la ecuación 8.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, y) \frac{\partial V}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( p(x, y) \frac{\partial V}{\partial y} \right) + r(x) V(x, y) = f(x, y) \tag{8}$$

$$a < x < b, c < y < d$$

El método de los elementos finitos se basa de la construcción aproximada de una solución. El análisis para el MEF de cualquier problema involucra cuatro etapas [7].

1. Discretización de la región de solución en un número finito de subregiones o elementos.
2. Obtener las ecuaciones para el elemento típico.
3. Ensamblaje de todos los elementos en la región de solución.
4. Solución del sistema de ecuaciones obtenido.

Durante el proceso de la discretización se descompone la región de solución en subregiones denominadas elementos finitos, los cuales serán de geometría simple. En la figura 6 se presenta el caso de la discretización de una zona rectangular a partir de triángulos. Las zonas de

estudio generalmente son irregulares por lo que un elemento finito rectangular sería menos conveniente.

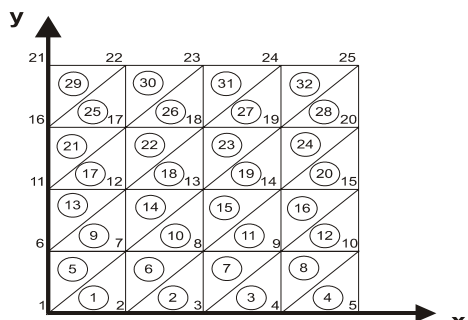


Figura 6. Discretización de zona particular.

Para el ejemplo se puede observar que los elementos finitos son elementos triangulares sobre los cuales se aproximará la solución del problema [11]. Una vez discretizada la región de solución el paso siguiente será obtener las ecuaciones que definen el elemento típico.

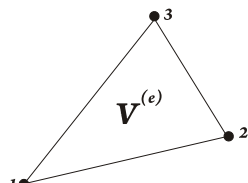


Figura 7. Elemento típico.

La solución para la función dentro del elemento y la función sobre varios elementos es continua en la frontera entre ellos. La solución aproximada para la región es la presentada en la ecuación 8 [7].

$$V = \sum_{i=1}^N V^{(i)} \tag{8}$$

Donde  $N$  es el número de elementos en los cuales se divide la región de solución. La aproximación para la función  $V$  dentro del elemento es la aproximación polinomial, de la forma presentada en 9. Para el caso del elemento triangular.

$$V^{(e)} = a + bx + cy \tag{9}$$

Considerando el elemento triangular se puede calcular el valor de la función  $V^{(e)}$  para los nodos 1,2,3 que forman el triángulo como  $V_1^{(e)}, V_2^{(e)}, V_3^{(e)}$  utilizando la expresión 10.

$$\begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \tag{10}$$

Los coeficientes  $a, b, c$  se obtienen mediante una simple inversa así.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} \tag{11}$$

Si se reemplaza 10 en 8 se obtiene

$$V^{(e)} = [1 \ x \ y] \frac{1}{2A} [H] \begin{bmatrix} V_1^e \\ V_2^e \\ V_3^e \end{bmatrix} \tag{12}$$

donde

$$[H] = \begin{bmatrix} (x_2 y_3 - x_3 y_2) & (x_3 y_1 - x_1 y_3) & (x_1 y_2 - x_2 y_1) \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

O se puede expresar de la forma

$$V^{(e)} = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_i^e \tag{13}$$

De donde se puede apreciar que las funciones  $\alpha$  son funciones de interpolación lineal que valen uno en el nodo que se está estudiando y cero en los restantes, estas funciones son conocidas como las funciones de forma del elemento .

Ahora se puede expresar la solución del problema como la minimización de un funcional de la forma.

$$J(V) = \frac{1}{2} A(V, V) - \langle f, V \rangle \tag{13}$$

Para el cual se satisface que existe una función  $V$  que minimiza a l funcional  $J(\cdot)$  si y solo si

$$A(V, V) = \langle f, V \rangle \tag{14}$$

El cual es una conocido como principio de Galerkin. Donde  $A(V, V)$  es una función bilineal definida de la forma

$$A(w, u) = \int_c^d \int_a^b S \, dx dy \tag{15}$$

donde

$$S = p(x, y) \frac{dw}{dx} \frac{du}{dx} + q(x, y) \frac{dw}{dy} \frac{du}{dy} + r(x, y) w(x, y) u(x, y)$$

$$Y \quad \langle w, u \rangle = \int_c^d \int_a^b w(x, y) u(x, y) dx dy \tag{16}$$

Ahora si reemplaza 8 en 14 y se reordena la expresión resultante en forma matricial de la forma

$$[M][V] = [b] \tag{17}$$

Si se toma como

$$V_0 = \sum_{i=1}^n V_i \alpha_i(x_i, y_i) \tag{18}$$

Donde  $V_0$  es la solución del problema para las condiciones de frontera,  $V_i$  es el valor de la función sobre cada uno de los nodos ubicados en la frontera (condiciones de Dirichlet) y  $\alpha_i(x, y)$  es la función de forma del nodo  $i$  con respecto al elemento que lo contenga.

Ahora la función  $V$  se puede aproximar como

$$V(x, y) = V_0 + \sum_{i=n+1}^m V_i \alpha_i(x_i, y_i) \quad (19)$$

Donde la suma sucesiva planteada en 19 representa los nodos interiores del problema. Después de haber reemplazado 8 en 14 y reordenado en forma matricial se puede observar que

$$M_{ij} = A(\alpha_i, \alpha_j) \quad (20)$$

Donde  $M_{ij}$  estará formado por el aporte que realiza cada uno de los elementos que tienen vértice en  $i$  y  $j$ . Para obtener los valores de  $[b]$  se hace

$$bi = \langle f, \alpha_i \rangle - A(V_0, \alpha_i) \quad (21)$$

Ahora se obtienen los valores de  $V_i$  para los restantes nodos del sistema

$$[V] = [M]^{-1} [b] \quad (22)$$

### 3.2. Descripción del algoritmo

Tal como se mencionó en la sección 3.2 es necesario considerar determinadas etapas. La discretización de la región de solución en un número finito de subregiones o elementos, obtener las ecuaciones para el elemento típico, ensamblar los elementos en la región de solución y solucionar del sistema de ecuaciones obtenido.

Inicialmente discretiza la región bajo estudio en una serie de elementos tal como se ilustró con la figura 6. Cabe anotar que del tamaño de la discretización depende de la precisión de la respuesta. Existen una serie de técnicas para la discretización que se describen en el libro [4]. Estos métodos se denominan métodos generadores de malla y uno de los más usados es el método de Delaunay [11]. Generalmente cualquier forma puede ser descrita mediante triángulos de tamaños lo suficientemente pequeños.

Luego de lo anterior se consideran las condiciones de frontera del problema, mediante la inclusión de los valores en los nodos pertenecientes a tales situaciones. Se recuerda que los problemas tratados son problemas tipo Dirichlet.

Posteriormente se calculan los coeficientes de las funciones de forma de cada uno de los elementos del

conjunto, es decir el cálculo de los  $\alpha_i$ . Lo anterior mediante la solución de sistemas de ecuaciones de  $3 \times 3$  (de acuerdo al número de nodos que tiene el triángulo) para cada uno de los nodos del elemento.

Luego de esto se calculan los valores de la matriz de rigidez, es decir el valor de  $[M]$ . Dada las características del problema existen ciertas simplificaciones que permiten efectuar cálculos de manera ágil. Por otro lado se usan técnicas de matrices dispersas para la mejora del tiempo computacional y disminuir la dimensión de almacenamiento para la obtención de dichos índices.

Finalmente se obtienen valores del vector de desplazamiento, es decir, se usa la ecuación 21 para encontrar  $b_i$ .

### 4. RESULTADOS

La implementación computacional toma validez siempre y cuando sea comparada al menos en su funcionamiento básico con tras de características semejantes. La implementación se compara con los valores y resultados obtenidos en [1] frente al problema de Dirichlet presentado en la sección 2.

El mallado se efectúa mediante una rutina diseñada por los autores aunque bien puede usarse otro tipo de ellas. Una estrategia de mallado conocida es la de Delaunay que incluso está como librería en Matlab, ahí la forma de los triángulos resultantes no es uniforme.

En un primer momento, el problema se resuelve mediante la discretización, en el plano  $x$ - $y$  en 25 nodos, equivalentes a 32 triángulos de superficies uniformes. Tal discretización, junto con sus resultados se muestra en las figuras 7 y 8.

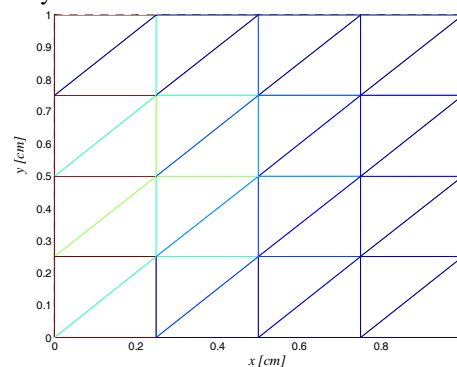


Figura 7. Discretización en el eje  $x$ - $y$  de los 32 elementos.

Frente al valor del punto de comparación  $v(0.5,0.5)$ , es posible afirmar que coincide perfectamente con el hallado analíticamente, es decir  $v(0.5,0.5)=0.25 V$ .

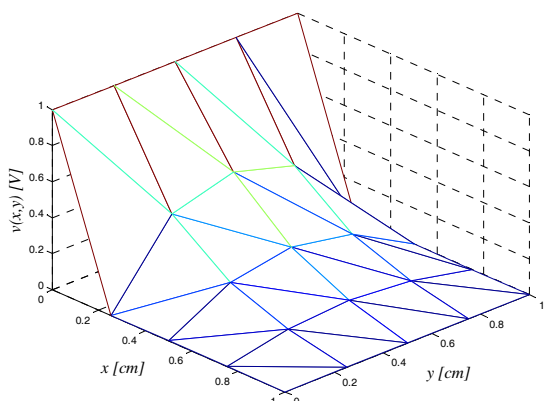


Figura 8. Superficie potencial con discretización en 32 elementos finitos.

Para el siguiente caso, los resultados se generan mediante un mallado de 39x39 nodos internos para un total de 3200 triángulos de tamaños uniformes. Se omite el gráfico de la discretización en  $x$ - $y$  porque por el tamaño de los gráficos, es poco apreciable.

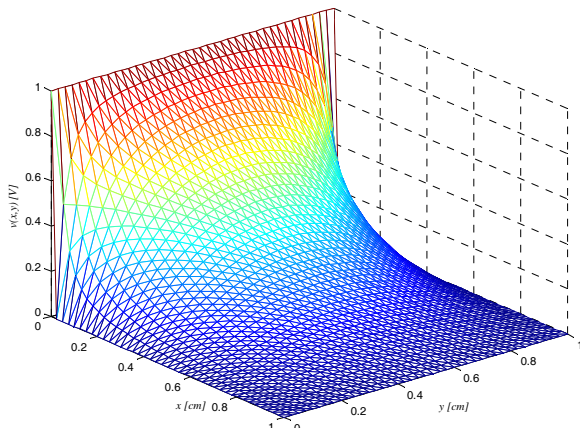


Figura 9. Superficie potencial con discretización en 3200 elementos finitos.

Para el caso de los 3200 elementos se nota cómo la superficie de nivel muestra un comportamiento adecuado en fronteras y de cambios suaves en el interior. Para este caso el valor en el punto de comparación de  $v(0.5,0.5)=0.25$  V.

Lo anterior refleja el grado de precisión alcanzable por el método, así como la realizabilidad del mismo. Frente al tiempo computacional, considerando el número elementos en el método iterativo contra el del MEF, se encontró que en el 90% de los casos el MEF disminuye en 3 veces el tiempo computacional.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El MEF se constituye a partir de fundamentos matemáticos sólidos y bastante coherentes. Mejora el desempeño del método iterativo ya que éste permite obtener gráficos pero no evaluar un punto específico diferente a los usados en las iteraciones. El MEF por el

contrario establece funciones de forma que pueden entregar valores en cualquier punto de la región estudiada.

A medida que el mallado sea mas riguroso se obtienen comportamientos suaves que permiten aproximar funciones de buena manera. Lo anterior salta a la vista al comparar los gráficos 8 y 9. Un avance para mejorar el refinamiento sin la dificultad de definir mallados al azar ha de ser un proceso iterativo que compare valores de potencial permitiendo ciertos valores de tolerancia dado que es verificable que el método converge al comportamiento descrito por las ecuaciones diferenciales.

Es necesario avanzar en el uso del método de manera dinámica para analizar contornos irregulares.

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] ESCOBAR A, CORREA V. D., MOLINA A. "Método Iterativo Para El Cálculo De Potenciales Electroestáticos". Scientia et Technica Año XII, No 32, Noviembre 2006.
- [2] REVUELTO Gómez I. et al. "Método Híbrido FEM-GTD/UTD para el Análisis de Estructuras Radiantes haciendo uso de NURBS" XX Symposium Nacional de la URSI. Universitat Ramon Llull, Barcelona (España), sep 2005. Sesión "Electromagnetismo II".
- [3] ENGQUIST B. "Absorbing Boundary conditions for the Numerical Simulations of Waves" Mathematics of Computation, 1977.
- [4] JACKSON John David. Classical Electrodynamics, tercera edición, 808 paginas, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [5] JACKSON John David. Classical Electrodynamics, tercera edición, 808 paginas, John Wiley & Sons, New York, 1998.
- [6] NORBURY John, "Electromagnetics for Undergraduate", Physics Department University of Wisconsin-Milwaukee. 1999.
- [7] Mayers D, "An introduction to Numerical Analysis", Cambridge. Cambridge University Press, London , 2003.
- [8] SILVESTER Peter P. "Finite Elements for Wave Electromagnetics". IEEE Press. 1995.
- [9] GARCÍA B. "Fundamentos de Electromagnetismo: Iniciación al Cálculo Numérico en Electromagnetismo". Dpto. de Electromagnetismo y Física de la Materia –Universidad de Granada. 2004.
- [10] BURDEN Richard L. y FAIRES, J. Douglas. Análisis Numérico, Séptima edición, 839 páginas, Thomson Learning, Bogotá, 2002.
- [11] BOROUCHEKI H. "Delaunay Triangulation and Meshing", Primera edición, 412 páginas, Editorial HERMES. Paris, 1998.