El CONCEPTO DE LA ESPERANZA CONDICIONAL EN LAS MARTINGALAS

The concept of the conditional expectation in the martingales

RESUMEN

En este artículo se presentan algunos resultados de la esperanza condicional de variables aleatorias con respecto a descomposiciones finitas y con respecto a σ-álgebra, así como algunos ejemplos de martingalas discretas.

PALABRAS CLAVES: Esperanza condicional, Martingalas y Variables aleatorias.

ABSTRACT
In this paper presents somes results of the conditional expectation of Radom Variables with concerning to finte descompositions and with concerning to, σ-álgebra, as well somes examples of discree mantingales.

KEYWORDS: Conditional expectation, Martingales and Radom Variables.

EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO
Profesor Auxiliar, Magíster en Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Profesor Auxiliar, Magíster en Matemáticas
Ingeniero Civil
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de las martingalas es una de las ramas más importantes de la probabilidad, creada por el francés P. Levy (1886-1971), aunque fue el norteamericano J.L. Doob (1910-2004) quien estableció las bases matemáticas de su desarrollo y aplicación en áreas como análisis, teoría de la medida y especialmente procesos estocásticos, ver Karatzas [2]. En particular los procesos estocásticos más utilizados son el proceso Wiener (o movimiento Browniano) y el proceso de Markov.
En este artículo presentamos algunas ideas básicas, de la esperanza condicional con algunos ejemplos y propiedades generales. También resaltaremos la importancia que tiene este concepto en la definición de las martingalas. Para la elaboración de este artículo seguiremos especialmente cuatro referencias modernas: P. Ibarrola [1], Karatzas [2], Petersen [3], Shiryaev [4], Williams [5]. Este artículo es una pequeña parte de la tesis de maestría del primer autor

2. ESPERANZA CONDICIONAL

Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad asociado a un experimento y $B \in \mathcal{F}$ un conjunto fijo. La probabilidad condicional de $A \in \mathcal{F}$ dado B se define por

$$P(A/B) = \frac{(A \cap B)}{P(B)}.$$

Esta probabilidad depende de P y $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P}(./\mathrm{B}))$ es un nuevo espacio de probabilidad. Si Xes una variable aleatoria integrable en $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$, podemos definir la esperanza condicional de X dado B como la esperanza condicional con respecto a $P(./B)$:

$$E(X/B) = \int_\Omega X dP(./B).$$

Proposición 1 Si es una variable aleatoria integrable en $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$, entonces

$$E(X/B) = \int_\Omega X dP(./B) = \frac{1}{P(B)} \int_\Omega X dP.$$

Demostración. Es suficiente demostrar la proposición para I_D dado que si $X(\omega)$ es una variable aleatoria integrable, entonces existe una sucesión de variables aleatorias $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ simples tal que $X_n(\omega)$ esta acotada por $X(\omega)$ y $\lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)$, para todo $\omega \in \Omega$.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega X dP(./B) &= \int_B I_D dP(./B) + \int_{B^C} I_D dP(./B) \\
&= P(D \cap B/B) + P(D \cap B/B^C) \\
&= \frac{P(D \cap A)}{P(B)} = \frac{1}{P(B)} \int_B I_B X dP \\
&= \frac{1}{P(B)} \int_B X_B X dP.
\end{aligned}$$

Ejemplo1 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P}) = ([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$ un espacio de probabilidad y $Y(\omega) = \omega^2$. Calcular $E\left(Y/[0, \frac{1}{9}]\right)$.

Fecha de Recepción: 22 de Enero de 2008.
Fecha de Aceptación: 21 de Julio de 2008.

$$E\left(Y/[0,\frac{1}{9}]\right) = \frac{1}{P([0,\frac{1}{9}])}\int_{[0,\frac{1}{9}]}\omega^2 d\omega = \frac{1}{243}.$$

Este cálculo se obtiene dado que $P=\lambda$ es la medida de Lebesgue y por lo tanto $P\left([0,\frac{1}{9}]\right)=\frac{1}{9}$ y la integral se resuelve como una integral de Riemann.

2.1 ESPERANZA CONDICIONAL CON RESPECTO A DESCOMPOSICIONES FINITAS

Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ un espacio de probabilidad finito y $\mathcal{D}=\{D_1,D_2,...,D_m\}$ una descomposición medible, es decir, $D_i\neq\emptyset$, si $i\neq j, D_i\cap D_j\neq\emptyset\ \cup_{j=1}^m D_j=\Omega$ para $i,j=1,...,m$.

Definición 2 La probabilidad condicional de un conjunto F dada la partición $\mathcal{D}$ es la variable aleatoria definida por $Z(\omega)=P(F/\mathcal{D})(\omega)=\sum_{j=1}^m P(F/D_j)(\omega)I_{D_j}(\omega)$.

Ejemplo 2 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})=([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$ un espacio de probabilidad y $\mathcal{D}$ una partición de $[0,1]$ definida por $\mathcal{D}=\{[0,\frac{1}{9}],(\frac{1}{9},\frac{2}{9}],(\frac{2}{9},\frac{8}{9}],(\frac{8}{9},1]\}$.

Calcular $P([0,\frac{1}{2}],/\mathcal{D})(\omega)$. Sea $D_1=[0,\frac{1}{9}],D_2=(\frac{1}{9},\frac{2}{9}],D_3=(\frac{2}{9},\frac{8}{9}],D_4=(\frac{8}{9},1]\}$. Por definición de probabilidad condicional tenemos

$$P([0,\frac{1}{2}],/D_1)=\frac{P([0,\frac{1}{2}]\cap[0,\frac{1}{9}])}{P([0,\frac{1}{9}])}=\frac{P([0,\frac{1}{9}])}{P([0,\frac{1}{9}])}=1.$$

Haciendo un calculo parecido llegamos a

$P([0,\frac{1}{2}]/D_2)=1, P([0,\frac{1}{2}],/D_3)=\frac{7}{12}$,

$P([0,\frac{1}{2}]/D_4)=0$ y por lo tanto

$P([0,\frac{1}{2}],/\mathcal{D})(\omega)=I_{[0\frac{1}{9}]}(\omega)+I_{(\frac{1}{9},\frac{2}{9}]}(\omega)+\frac{7}{12}I_{(\frac{2}{9},\frac{8}{9}]}(\omega)$.

Proposición 3 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ un espacio de probabilidad finito y $\mathcal{D}$ una descomposición medidle de Ω.

1. Si F y G son conjuntos disjuntos, entonces

   $P(F\cup G/\mathcal{D})=P(F/\mathcal{D})+P(G/\mathcal{D})$.

2. Si $\mathcal{D}=\Omega$ entonces, $P(F/\mathcal{D})=P(F)$.

3. $E(P(F/\mathcal{D}))=P(F)$.

La demostración se pueden ver en Shiryaev [4].

Definición 4 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ un espacio de probabilidad finito y $Y=Y(\omega)$ una variable aleatoria que toma valores reales $y_1,y_2,...,y_m$, $Y(\omega)=\sum_{j=1}^m y_jI_{D_j}(\omega)$ con $D_j=\{\omega\in\Omega : Y(\omega)=y_j\}$. La descomposición $\mathcal{D}_Y=\{D_1,D_2,...,D_m\}$ es llamada descomposición inducida por Y y $P(F/\mathcal{D}_Y)=P(F/Y)$ es llamada la probabilidad condicional de F con respecto a Y, decimos que Y es $\mathcal{D}_Y$-medible.

Definición 5 Sean $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ un espacio de probabilidad finito, $X=X(\omega)$ una variable aleatoria que toma valores en $F=\{\ x_1,x_2,...,x_n\}$, $X(\omega)=\sum_{i=1}^n x_iI_{F_i}(\omega)$ donde $F_i=\{\omega\in\Omega : X(\omega)=x_i\}$ y $\mathcal{D}=\{D_1,D_2,...,D_m\}$ una descomposición de Ω, definimos la esperanza condicional de X con respecto a $\mathcal{D}$ como:

$$E(F/\mathcal{D})=\sum_{i=1}^n E(F_i/\mathcal{D})=\sum_{j=1}^m E(X/D_j)I_{D_j}.$$

Ejemplo 3 Sea, $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})=((0,1),\ \mathcal{B}((0,1)),\ \lambda)$ $X=\omega$ y $Y(\omega)=2I_{(0,\frac{1}{3})}(\omega)+5I_{[\frac{1}{3},1)}$. Calcule $E(X/Y)$.

$$\begin{aligned}E(X/Y=2) &= \frac{1}{P(\{Y=2\})}\int_{\{Y=2\}}\omega d\omega\\ &= \frac{1}{P((0,\frac{1}{3}))}\int_{(0,\frac{1}{3})}\omega d\omega=\frac{1}{6}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X/Y=5) &= \frac{1}{P(\{Y=5\})}\int_{\{Y=5\}}\omega d\omega\\ &= \frac{1}{P(([\frac{1}{3},1)))}\int_{[\frac{1}{3},1)}\omega d\omega=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $E(X/Y)=\frac{1}{6}I_{(0,\frac{1}{3})}(\omega)+\frac{2}{3}I_{[\frac{1}{3},1)}$.

Observación 6 En un espacio de probabilidad finito a cada descomposición $\mathcal{D}$ de Ω, le corresponde una álgebra llamada el álgebra generada por la descomposición $\mathcal{D}$ denotada por $\mathcal{A}=\alpha(\mathcal{A})$. Recíprocamente si $\mathcal{A}$ es una álgebra de Ω existe una única descomposición $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{A}=\alpha(\mathcal{A})$. Esta relación nos servirá para dar la definición de esperanza condicional de una variable aleatoria con respecto a una σ-álgebra.

2.2 ESPERANZA CONDICIONAL CON RESPECTO σ-ÀLGEBRA

Dados un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$, una sub-$\sigma$-álgebra $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ y una variable aleatoria integrable X, existe una variable aleatoria $Y=E(X/\mathcal{G})$, llamada esperanza condicional de X dado $\mathcal{G}$. Esta variable aleatoria cumple las siguientes propiedades dadas en el siguiente teorema.

Teorema 7 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G}\subseteq\mathcal{F}$ una σ-álgebra y X una variable aleatoria integrable. Entonces existe una única variable aleatoria

que es $\mathcal{G}$-medible e integrable Y tal que para todo $G \in \mathcal{G}$ se tiene que $\int_G YdP = \int_G XdP$.
La demostración se puede ver en Williams [5].

Observación 8 Para calcular la esperanza condicional de una variable aleatoria X integrable, con respecto a una σ-álgebra, utilizamos los siguientes resultados:

1. Sea X una variable aleatoria definida en un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\, \mathrm{P})$. Una variable aleatoria e Y es $\sigma(X)$-medible si y sólo si, existe una función boreliana f tal que $Y = f(X)$.
2. Sea $(\Omega,\ \mathcal{F})$ un espacio medible, $\mathcal{D}= \{D_1, D_2, ..., D_m\}$ una descomposición medible de Ω, $\mathcal{G}=\alpha(\mathcal{D})$ la σ-álgebra generada por la descomposición $\mathcal{D}$. Si una variable aleatoria X es $\mathcal{G}$-medible, entonces X se representa de la forma $X = \sum_{j=1}^{n} x_j I_{D_j}$.

Ejemplo 4 Sea $(\Omega,\ \mathcal{F},\, \mathrm{P}) = ([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$ un espacio de probabilidad. Calcular $E(X/\sigma(Y))$ para $Y(\omega)=2I_{[0,\frac{1}{2})}(\omega) + (\omega)I_{[\frac{1}{2},1]}(\omega)$ y $X(\omega)=2\omega^2$.
Usamos la propiedad 2 de la Observación 8. Puesto que $E(X/\sigma(Y))$ es $\sigma(Y)$-medible, existe una función boreliana f tal que $E(X/\sigma(Y)) = f(Y)$, esto es

$$\begin{aligned} E(X/\sigma(Y))(\omega) &= f(Y(\omega)) = f(2)I_{[0,\frac{1}{2})}(\omega) \\ &+ f(\omega)I_{[\frac{1}{2},1]}(\omega). \end{aligned}$$

Como para todo $G \in \mathcal{G}$ se tiene

$$\int_G E(X/\sigma(Y))dP = \int_G XdP,$$

tomando $G = Y^{-1}(2) = [0, \frac{1}{2})$, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} &= \int_{[0,\frac{1}{2})} 2\omega^2 d\omega = \int_{[0,\frac{1}{2})} XdP \\ &= \int_{[0,\frac{1}{2})} E(X/\sigma(Y))dP \\ &= \int_{[0,\frac{1}{2})} f(2)d\omega = \frac{1}{12}f(2). \end{aligned}$$

Luego $f(2) = \dfrac{1}{6}$.
Calculemos $f(\omega)$. Para cualquier boreliano $B \subseteq [\frac{1}{2}, 1]$ tenemos que $Y^{-1}(B) = B$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_B 2\omega^2 d\omega &= \int_B XdP = \int_B E(X/\sigma(Y))dP \\ &= \int_B f(\omega)d\omega. \end{aligned}$$

De aquí que $f(\omega) = 2\omega^2$ para todo $\omega \in [\frac{1}{2}, 1]$, luego $E(X/\sigma(Y))(\omega) = \dfrac{1}{6}I_{[0,\frac{1}{2})}(\omega) + 2\omega I_{[\frac{1}{2},1]}(\omega)$.

Ejemplo 5 (Teorema ergo dicó de Birkhoff) Sean $(\Omega,\ \mathcal{F},\, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $T:\Omega \to \Omega$, una función $\mathcal{F}$-medible que preserva medida, es decir, $P(T^{-1}(F)) = P(F)$ para todo $F \in \mathcal{F}$, y X una variable aleatoria integrable. Entonces el Teorema de Birkhoff dice que existe una variable aleatoria integrable Y tal que para todo $\omega \in \Omega$ se tiene:

1) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} X(T^k(\omega)) = Y(\omega)$.

2) $E(|Y(\omega)|) = E(|X(\omega)|)$ y $Y(T(\omega)) = X(\omega))$.

Ahora, si definimos σ-álgebra $\mathcal{F}$ de todos los conjuntos F que son T-invariantes, es decir, $T^{-1}(F) = F$, entonces la variable aleatoria Y es la esperanza condicional, esto es, $Y = E(X/\mathcal{F})$.
Para profundizar sobre el tema ver Petersen [3].

Teorema 9 **(**Propiedades de la esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra).
Sean $(\Omega,\ \mathcal{F},\, \mathrm{P})$ un espacio de probabilidad, $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$ una σ-álgebra $\mathcal{G}$, X y Y variables aleatoria integrables.

a) $E(E(X/\mathcal{G}))=E(X)$ doble esperanza.
b) Si Xes $\mathcal{G}$-medible, entonces $E(X/\mathcal{G})=X$.
c) Si X es independiente de $\mathcal{H}$, $E(X/\mathcal{H})=E(X)$.
d) Si $\mathcal{H}$ es una sub-σ-álgebra de $\mathcal{G}$, entonces
$$E(E(X/\mathcal{G})/\mathcal{H})=E(X/\mathcal{H}).$$
e) $E(aX + bY/\mathcal{G})=aE(X/\mathcal{G})+bE(Y/\mathcal{G})$.

La demostración se pueden ver en Williams [5].

3. MARTINGALAS

Presentamos en esta sección la definición, ejemplos y propiedades fundamentales del as martingalas, submartingalas y supermartingalas en tiempo discreto. Empezamos con la definición de proceso estocástico.

Definición 10 Un proceso estocástico es una familia de variables aleatorias $(X_t)_{t\in T}$, definidas todas en un mismo espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\, \mathrm{P})$ y con valores en un mismo espacio medible. Usualmente T son los números naturales, o son los números reales positivos o es un intervalo finito. Para cada ω la función $X_t(\omega)$ se llama trayectoria del proceso en casi en todas partes.

Ejemplo 6 El proceso estándar de wiener (o movimiento Bowniano) es un proceso estocástico $(W_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ tal que

a) El proceso comienza en cero casi en todas partes, es decir, $P(W_0 = 0) = 1$.

b) Los incrementos sobre los intervalos disjuntos son independientes, es decir, las variables aleatorias son $W_{t_1} - W_{t_0}, ..., W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$ independientes si $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n$.

c) Si $0 \leq s \leq t$ el incremento $W_t - W_s$ sobre el intervalo $(0, t]$ tiene distribución normal con media cero y varianza $t - s$.

d) Las trayectorias de $(W_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ son continúas en casi en todas partes.

Ejemplo 7 Decimos que el proceso $(M_t)_{t \in \mathbb{R}^+}$ es un proceso de Markov si para cada par de tiempos s, t tales que $0 < s \leq t$, se verifica la igualdad

$$P(X_t \in A/\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A/X_s).$$

Es decir, el comportamiento futuro (tiempo t) del proceso, dada la historia del mismo hasta el tiempo s, no depende del pasado remoto (tiempo antes de s) si no únicamente del pasado inmediato (tiempo s).

Definición 11 Una filtración en un espacio de medida $(\Omega,\ \mathcal{F})$ es una familia no decreciente de sub-σ-àlgebras $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ de $\mathcal{F}$, es decir, si $s \leq t$, entonces $\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$ donde $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\cup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$.
Si $X = (X_t)_{t \in T}$ es un proceso estocástico, entonces $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s : s \in [0, t])$ es la filtración generada por el proceso estocástico X sobre el espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ y la llamamos filtración natural.

Definición 12 Sea $X = (X_t)_{t \in T}$ un proceso estocástico, definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$ y $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ una filtración en $(\Omega,\ \mathcal{F})$. Se dice que $X = (X_t)_{t \in T}$ es una martingala con respecto a la filtración $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ y se denota como $\{X_t\ \mathcal{F}_t\}_{t \in T}$ si se cumple las siguientes condiciones:

M_1 X_t es $\mathcal{F}_t$-medible para todo $t \in T$, es decir, $X_t^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

M_2 X_t es integrable para todo $t \in T$.

M_3 $E(X_t/\mathcal{F}_s) = X_s$ para todo $s \leq t$,

es decir, $\int_F X_s dP = \int_F X_t dP$ para todo $s \leq t$ y $F \in \mathcal{F}_s$.

$X = (X_t)_{t \in T}$ se dice una supermartingala, si la propiedad M_3 es reemplazada por $E(X_t/\mathcal{F}_s) \leq X_s$ y una submartingala, si la propiedad M_3 es reemplazada por $E(X_t/\mathcal{F}_s) \geq X_s$ para todo $s \leq t$.

Lema 13 Sea $X = (X_t)_{t \in T}$ un proceso estocástico, paramel cual $X_{t_i} - X_{t_{i-1}}$son variables aleatorias independientes, para cada conjunto de índices $0 < t_0 < ... < t_n < \infty$. Entonces para cada $0 \leq s < t$ el incremento $X_t - X_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^X = \sigma(X_r : r \in [0, s])$.

La demostración se puede ver en Karatzas [2].

Ejemplo 8 El proceso estándar de Wiener $\{W_t,\ \mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ es una martingalas. En efecto, W_t es $\mathcal{F}_t$-medible e integrable por la definición del proceso de Wiener. Verifiquemos la propiedad M_3 de martingalas

$$\begin{aligned} E(W_t/\mathcal{F}_s^W) &= E(W_t - W_s/\mathcal{F}_s^W) + E(W_s/\mathcal{F}_s^W) \\ &= E(W_t - W_s) + W_s = W_s. \end{aligned}$$

Hemos usado el hecho de que la variable $W_t - W_s$ es independiente de $\mathcal{F}_s^W$ y por el Lema 13 se tiene

$$E(W_t - W_s/\mathcal{F}_s^W) = E(W_t - W_s),$$

como W_s es $\mathcal{F}_s$-medible, entonces $E(W_s/\mathcal{F}_s^W) = W_s$ y $E(W_t - W_s) = 0$.

Observación 14 Sea T el conjunto de los números naturales, entonces $\{X_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala discreta si X_n es $\mathcal{F}_n$-medible N_n es integrable y $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n) = X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 9 Veamos uno de los ejemplos más importantes en la teoría de las martingalas discretas, puesto que esta martingalas se utiliza para el desarrollo y las aplicaciones de esta teoría.
Sea X una variable aleatoria integrable definida en un espacio de probabilidad $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P})$, $\{\mathcal{F}_n\}_{t \in \mathbb{N}}$ una filtración del espacio medible $(\Omega,\ \mathcal{F})$ y $E(X/\mathcal{F}_n) = M_n$ casi en todas partes. Verifiquemos que $\{M_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala. Por el Teorema 7 M_n, es $\mathcal{F}_n$-medible N_n es integrable para todo $n \in \mathbb{N}$. Verifiquemos la propiedad M_3. Por el Teorema 9 d) tenemos

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) &= E(E(X/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n) \\ &= E(X/\mathcal{F}_n) = M_n. \end{aligned}$$

Note que si $\{M_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una martingala finita sus elementos son de la forma $E(X/\mathcal{F}_n) = M_n$. En efecto, por la propiedad M_3 tenemos

$$\begin{aligned} M_n &= E(M_{n+1}/\mathcal{F}_n) \\ &= E(E(M_{n+2}/\mathcal{F}_{n+1})/\mathcal{F}_n) \\ &= E(M_{n+2}/\mathcal{F}_n) = ... = E(M_N/\mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

Para una martingala arbitraria sus elementos no necesariamente tienen la forma $E(X/\mathcal{F}_n) = M_n$, para que esto suceda se necesita que la martingala sea uniformemente integrable, es decir, una martingala cuyos elementos sean uniformemente integrable.

3.1 UNA APLICACIÓN DE MARTINGALAS. JUEGOS PROBABILISTICOS

Considere una sucesión de variables aleatorias, independientes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donde X_n representa la ganancia (positiva o negativa) en la n-èsima repetición del juego. Definimos las variables aleatorias $S_0 = 0$, $S_n=\sum_{k=1}^{n} X_k$, para todo $n \in \mathbb{N}$. S_n representa la ganancia acumulada en la n-èsima repetición del juego. Vamos a demostrar que si $E(|X_k| < \infty)$ y $E(X_k) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\mathcal{F}_n^X = \sigma(X_1, ..., X_n)$, entonces el juego es justo, es decir, $\{S_n,\ \mathcal{F}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una martingala. En efecto, S_n es $\mathcal{F}_n$-medible e integrable puesto que S_n es suma de funciones $\mathcal{F}_n$-medibles e integrables. Verifiquemos la propiedad M_3

$$\begin{aligned} E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n^X) &= E(S_n + X_{n+1}/\mathcal{F}_n^X) \\ &= E(S_n/\mathcal{F}_n^X) + E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n^X). \end{aligned}$$

Por la independencia de las variables aleatorias $E(X_{n+1}/\mathcal{F}_n^X) = E(X_{n+1})$ como S_n es $\mathcal{F}_n^X$-medible, entonces $E(S_n/\mathcal{F}_n^X) = S_n$ y como $E(X_{n+1}) = 0$ por lo tanto se concluye que $E(S_{n+1}/\mathcal{F}_n^X) = S_n$.

4. CONCLUSIONES

El concepto de esperanza condicional esta estrechamente relacionado a los conceptos básicos de probabilidad.

Calcular la esperanza condicional de una variable aleatoria integrable con respecto a una σ-álgebra**,** es equivalente a calcularla con respecto a la descomposición que la genera y esta es equivalente a calcular la esperanza de variable aleatoria con respecto a la variable aleatoria que genera la descomposición. Generalmente calcular esta esperanza puede ser un poco complicado, afortunadamente en muchas situaciones las variables aleatorias están definidas en el espacio $(\Omega,\ \mathcal{F},\ \mathrm{P}) = ([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$ y la descomposición es generada por una combinación lineal de variables aleatorias elementales.

La propiedad sobre esperanza condicional con respecto a una σ-álgebra es la que requiere de mayor cálculo para verificar y concluir que un proceso estocástico con respecto a una filtración es una martingala.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Ibarrola, L. Pardo y V. Quesada. *Teoria de la probabilidad*, Editorial Sintesis S. A, 1997.

[2] I. Karatzas, S. E. Shreve. *Browniano Motion and stochastic Calculus*. Second Edition. Springer, 1991.

[3] K. Petersen, Ergodic theory, Cambridge University Press, 1983.

[4] A. N. Shiryaev. *Probability*. Second Edition. Academic Press, 1975.

[5] D. Williams. *Probability Theory with Martingales.* Cambridge University Press, 1997.