

# SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE LAMÉ UTILIZANDO EXPANSIÓN HOLOMORFA

## Lamé system solution by holomorphic expansion

### RESUMEN

En este artículo se presenta una aplicación del método de expansiones holomorfas desarrollado en [6] para sistemas de ecuaciones diferencial parcial lineal de orden dos en varias variables a la solución del problema elástico en tres dimensiones conocido como solución del sistema de Lamé.

**PALABRAS CLAVES:** Análogo complejo, expansión holomorfa,, operador de Cauchy.

### ABSTRACT

*In this article appears an application of the method of Holomorphic xpansions developed in [ 6 ] for systems of equations linear partial differential of order two in several variables to the solution of the elastic problem in three dimensions known like of the solution of the system of Lamé.*

**KEYWORDS:** Cauchy's operator, complex analog , finite solutions , Holomorphic expansion.

### CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS

Profesor Asistente, MsC  
Ingeniero Civil  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
ccescobar@utp.edu.co

### ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO

Profesor Titular, Ph.D  
Matemático  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
possoa@utp.edu.co

### JOSÉ RODRIGO GONZALEZ GRANADA

Profesor Asistente, Ph.D  
Matemático  
Departamento de Matemáticas  
Facultad de Ciencias Básicas  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jorodryy@utp.edu.co

## 1. Introducción

El análisis complejo ha permitido el estudio de problemas de la física-matemática, en particular, problemas que conducen a EDPs de tipo elíptico que tienen especial aplicación en la teoría de elasticidad.

Si en la ecuación de Laplace  $\Delta f = 0$  en dos dimensiones utilizamos coordenadas complejas, ésta puede ser transformada a la forma:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0. \quad (1.1)$$

La solución general de (1.1) es de la forma

$$f = F_1(z) + F_2(\bar{z}),$$

donde  $F_1(z)$  y  $F_2(\bar{z})$  son funciones holomorfas arbitrarias de las variables  $z$  y  $\bar{z}$  respectivamente. Esto significa que cualquier función armónica se puede representar mediante la suma de dos funciones complejas de  $z$  y  $\bar{z}$ . Aprovechando este hecho G. V. Kolosoff y N. I. Mushelishvili desarrollaron los llamados "métodos de Kolosoff" [1], que tienen aplicación en la teoría de elasticidad. Siguiendo la misma idea de Kolosoff se halla

la solución general del problema plano de elasticidad lineal mediante la solución del sistema de Lamé, de tal forma que permite en forma que permite la integración por cuadraturas. En este trabajo se halla la solución general del problema tridimensional de elasticidad, también conocido como el problema de Lamé, mediante

la serie  $W = \sum_{|n|=0}^{\infty} \bar{z}^n W_n(z)$  conocida como expansión

holomorfa que fué aplicada en [2] para resolver EDPs. Aplicamos una extensión de este método a la solución del sistema de Lamé el cual es un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de la siguiente forma:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta_j = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (1.2)$$

con

$$\theta = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_j},$$

$\lambda, \mu$ , son constantes de Lamé  $(x_1, x_2, x_3) \in D \subset \mathbb{R}^3$ .

Donde  $D$  es un conjunto simplemente conexo que incluye el origen.

En este artículo se usan siguientes notaciones:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

$H(\Omega)$ : es el conjunto de funciones holomorfas en  $\Omega$ .

$$z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m.$$

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_m); n_j \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

$$|n| = \sum_{i=1}^m n_i.$$

$$z^n = \prod_{i=1}^m z_i^{n_i}.$$

$$n! = \prod_{i=1}^m n_i!$$

$$\sum_{|n|} f_n = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_m=0}^{\infty} f_n.$$

Consideremos las siguientes variables complejas

$$z_1 = x_1 + ix_2, z_2 = x_3 + iy_1, \tag{1.3}$$

en un dominio  $G$  del espacio complejo  $\square^2$ , simplemente conexo que incluye a  $D$  como la proyección  $x_4 = 0$ . El sistema (1.2) es equivalente al siguiente sistema en el dominio  $G$ .

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x_j} + \mu \Delta_j = 0, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial y_1} = 0. \tag{1.4}$$

**2. Construcción del análogo complejo**

El análogo complejo del sistema (1.4) se construye intercambiando la derivación parcial por los operadores de Cauchy  $d_{z_1}, d_{\bar{z}_1}$  y el operador  $d_{z_2}$  los cuales están dados por

$$d_{z_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} i \right),$$

$$d_{\bar{z}_1} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} i \right), \tag{2.1}$$

$$d_{z_2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Tal análogo complejo del sistema (1.4) viene dado por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$L_1(u_1, u_2, u_3) = [(\lambda + \mu) d_{z_1}^2 + 2(\lambda + 3\mu) d_{z_1} d_{\bar{z}_1} + (\lambda + \mu) d_{\bar{z}_1}^2 + 4\mu d_{z_2}^2] u_1 + i(\lambda + \mu)(d_{z_1}^2 - d_{\bar{z}_1}^2) u_2 + 2(\lambda + \mu) d_{z_2} (d_{z_1} - d_{\bar{z}_1}) u_3 = 0. \tag{2.2}$$

$$L_2(u_1, u_2, u_3) = [(\lambda + \mu) i (d_{z_1}^2 - d_{\bar{z}_1}^2)] u_1 + [2(\lambda + 3\mu) d_{z_2} d_{\bar{z}_1} - (\lambda + \mu) d_{z_1}^2 - (\lambda + \mu) d_{\bar{z}_1}^2 + 4\mu d_{z_2}^2] u_2 + [2i(\lambda + \mu) d_{z_2} (d_{z_1} - d_{\bar{z}_1})] u_3 = 0. \tag{2.3}$$

$$L_3(u_1, u_2, u_3) = [2(\lambda + \mu) [d_{z_2} (d_{z_1} + d_{\bar{z}_1})] u_1 + [2i(\lambda + \mu) d_{z_2} (d_{z_1} - d_{\bar{z}_1})] u_2 + [4(\lambda + 2\mu) d_{z_2}^2 + 4\mu (d_{z_1} d_{\bar{z}_1})] u_3 = 0. \tag{2.4}$$

$$L_4(u_1, u_2, u_3) = (d_{z_2} - d_{\bar{z}_2}) u_1$$

$$= L_5(u_1, u_2, u_3) = (d_{z_2} - d_{\bar{z}_2}) u_2$$

$$= L_6(u_1, u_2, u_3) = (d_{z_2} - d_{\bar{z}_2}) u_3 = 0. \tag{2.5}$$

**3. Solución del análogo complejo**

Se definen las siguientes funciones de variable compleja

$$W_1 = u_1 = v_1 i,$$

$$W_2 = u_2 + v_2 i,$$

$$W_3 = u_3 + v_3 i. \tag{3.1}$$

Si las partes reales de las funciones complejas  $W_1, W_2, W_3$  satisfacen el análogo complejo entonces  $u_1, u_2$  y  $u_3$  satisfacen el sistema de Lamé (1.2). La afirmación inversa también es verdadera por lo que podemos considerar al análogo complejo y al sistema (1.2) como equivalentes. A continuación expresamos la solución del análogo complejo de la forma:

$$W_j = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_1^{n_2} W_{n_1, n_2}^j(z_1, z_2), \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.2}$$

Utilizando los operadores (2.1) sobre (3.2) se obtiene

$$d_{z_1}^2(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_1^{n_2} W_{n_1, n_2}^j,$$

$$d_{\bar{z}_1}^2(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 2)(n_1 + 1) \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_1^{n_2} W_{n_1+2, n_2}^j,$$

$$d_{z_1} d_{\bar{z}_1}(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 1) \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_1^{n_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^j,$$

$$d_{z_2}^2(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} W_{n_1, n_2}^j, \quad (3.3)$$

$$d_{z_2} d_{z_1}(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^j,$$

$$d_{z_2} d_{z_1}(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1+1) \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2} d_{z_2} W_{n_1+1, n_2}^j,$$

$$(d_{z_2} - d_{z_2})(W_j) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} [d_{z_2} W_{n_1, n_2}^j - W_{n_1, n_2+1}^j] \bar{z}_1^{n_1} \bar{z}_2^{n_2}.$$

Sustituyendo (3.3) en el análogo complejo e igualando los coeficientes de la serie se tiene

$$\begin{aligned} & [(\lambda + \mu)(n_1 + 2)(n_1 + 1)W_{n_1+2, n_2}^1 - i(\lambda + \mu) \\ & (n_1 + 2)(n_1 + 1)W_{n_1+2, n_2}^2 + 2(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1) \\ & d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^1 + 2(\lambda + \mu)(n_1 + 1) d_{z_2} W_{n_1+1, n_2}^3 \\ & + (\lambda + \mu)d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^1 + 4\mu d_{z_2}^2 W_{n_1, n_2}^1 + i(\lambda + \mu) \\ & (d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^2 + 2(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^3)](z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} & = 0, \\ & [-(\lambda + \mu)i(n_1 + 2)(n_1 + 1)W_{n_1+2, n_2}^1 - (\lambda + \mu) \\ & (n_1 + 2)(n_1 + 1)W_{n_1+2, n_2}^2 + 2(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1) \\ & d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^2 - 2i(\lambda + \mu)(n_1 + 1) d_{z_2} W_{n_1+1, n_2}^3 \\ & + (\lambda + \mu)id_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^1 + 4\mu d_{z_2}^2 W_{n_1, n_2}^1 - (\lambda + \mu) \\ & (d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^2 + 2i(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^3)](z_1, z_2) \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} & = 0, \\ & [2(\lambda + \mu)(n_1 + 1)d_{z_2} W_{n_1+1, n_2}^1 - 2i(\lambda + \mu) \\ & (n_1 + 1)d_{z_2} W_{n_1+1, n_2}^2 + 4\mu(n_1 + 1)d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^3 \\ & + 2(\lambda + \mu) d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1, n_2}^1 + 2i(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1} \\ & W_{n_1, n_2}^2 + 4(\lambda + 2\mu)d_{z_2}^2 W_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} & [d_{z_2} W_{n_1, n_2}^1 - (n_2 + 1)W_{n_1, n_2+1}^1](z_1, z_2) = 0, \\ & [d_{z_2} W_{n_1, n_2}^2 - (n_2 + 1)W_{n_1, n_2+1}^2](z_1, z_2) = 0, \\ & [d_{z_2} W_{n_1, n_2}^3 - (n_2 + 1)W_{n_1, n_2+1}^3](z_1, z_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Con el fin de reducir el sistema se realizan las siguientes operaciones.

Derivando parcialmente con respecto a  $z_2$  la diferencia de la ecuación (3.5) y la (3.4) multiplicada por el imaginario  $i$  se obtiene

$$\begin{aligned} & [-2(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^1 - 2i(\lambda + 3\mu) \\ & (n_1 + 1)d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^2 - 2(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1}^2 (n_1 + 1) \\ & W_{n_1, n_2}^1 - 4\mu d_{z_2}^3 W_{n_1, n_2}^1 + 4i\mu d_{z_2}^3 W_{n_1, n_2}^2 - 2i(\lambda + \mu) \\ & + d_{z_2} d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^2 - 4(\lambda + \mu)d_{z_2}^2 d_{z_1} W_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

De igual modo, derivando parcialmente con respecto a  $z_1$  la ecuación (3.6) multiplicada por la constante

$$\begin{aligned} & \frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu} \text{ se tiene} \\ & [2(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^1 - 2i(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1) \\ & d_{z_2} d_{z_1} W_{n_1+1, n_2}^2 + 4\mu \frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)} (n_1 + 1)d_{z_1}^3 W_{n_1+1, n_2}^3 \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} & + 2(\lambda + 3\mu)d_{z_2} d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^1 + 2i(\lambda + 3\mu)d_{z_2} d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^2 \\ & + 4\mu \frac{(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)} d_{z_2}^2 d_{z_1} W_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \end{aligned}$$

De (3.8) y (3.9) mediante suma se obtiene

$$\begin{aligned} & [4\mu \frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)} (n_1 + 1)d_{z_1}^3 W_{n_1+1, n_2}^3 + 4\mu d_{z_2} d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^1 \\ & - 4\mu id_{z_2}^3 W_{n_1, n_2}^1 + 4i\mu d_{z_2}^3 W_{n_1, n_2}^2 + 4i\mu d_{z_2} d_{z_1}^2 W_{n_1, n_2}^2 \\ & + 4\mu \frac{(3\lambda + 5\mu)}{(\lambda + \mu)} d_{z_2}^2 d_{z_1} W_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Aprovechando la simetría de las ecuaciones y considerando la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} V_{n_1, n_2}^1 &= W_{n_1, n_2}^1 + iW_{n_1, n_2}^2 \\ V_{n_1, n_2}^2 &= W_{n_1, n_2}^1 - iW_{n_1, n_2}^2 \\ V_{n_1, n_2}^3 &= W_{n_1, n_2}^3, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o equivalentemente,

$$W_{n_1, n_2}^1 = \frac{V_{n_1, n_2}^1 + V_{n_1, n_2}^2}{2}, V_{n_1, n_2}^2 = \frac{V_{n_1, n_2}^1 - V_{n_1, n_2}^2}{2} \quad (3.12)$$

$$W_{n_1, n_2}^3 = V_{n_1, n_2}^3,$$

de (3.4)-(3.6) y (3.10) se obtiene

$$\begin{aligned} & [(\lambda + \mu) (n_1 + 2) (n_1 + 1) V_{n_1+2, n_2}^2 + (\lambda + 3\mu)(n_1 + 1) \\ & (d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^1 + d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^2) + 2(\lambda + \mu) (n_1 + 1)d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^3 \\ & + (\lambda + \mu)d_{z_1}^2 V_{n_1, n_2}^1 + 2\mu(d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^1 + d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^2) + 2(\lambda + \mu) \\ & d_{z_2}^2 d_{z_1} V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\left[\frac{1}{i}(\lambda + \mu)(n_1 + 2)(n_1 + 1)V_{n_1+2, n_2}^2 + \frac{1}{i}(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)(d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^1 - d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^2) - 2i(\lambda + \mu)\right] \quad (3.14)$$

$$(n_1 + 1)d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^3 - \frac{1}{i}(\lambda + \mu)d_{z_1} V_{n_1, n_2}^1 + 2\frac{\mu}{i}(d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^1 - d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^2) + 2i(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1} V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0.$$

$$[2(\lambda + \mu)(n_1 + 1)d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^2 + 4\mu(n_1 + 1)d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^3] \quad (3.15)$$

$$+ 2(\lambda + \mu)d_{z_2} d_{z_1} V_{n_1, n_2}^1 + 4(\lambda + 2\mu)d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0.$$

$$[4\mu \frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)}(n_1 + 1)d_{z_1}^2 V_{n_1+1, n_2}^3 + 4\mu d_{z_2} d_{z_1}^2 V_{n_1, n_2}^1 - 4\mu d_{z_2}^3 V_{n_1, n_2}^2 + 4\mu \frac{(3\lambda + 5\mu)}{(\lambda + \mu)} d_{z_2}^2 d_{z_1} V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \quad (3.16)$$

Derivando parcialmente respecto de  $z_1$  la ecuación

(3.15) y al multiplicar por  $\frac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$  se obtiene

$$[2(\lambda + \mu)(n_1 + 1)d_{z_1} d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^2 + 4\mu(n_1 + 1) \quad (3.17)$$

$$\frac{(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)} d_{z_1}^2 V_{n_1+1, n_2}^3 + 2(\lambda + 3\mu)d_{z_2} d_{z_1}^2 V_{n_1, n_2}^1 + \frac{4(\lambda + 2\mu)(\lambda + 3\mu)}{(\lambda + \mu)} d_{z_1} d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0.$$

De (3.16) y (3.17) e integrando con respecto a  $z_2$  se obtiene

$$[(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^2(z_1, z_2) = -[(\lambda + \mu)d_{z_1}^2 V_{n_1, n_2}^1 - 2\mu d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^2 - 2(\lambda + \mu)d_{z_1} d_{z_2} V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2). \quad (3.18)$$

De manera análoga de (3.13) y (3.14) se tiene

$$[(\lambda + \mu)(n_1 + 2)(n_1 + 1)V_{n_1+2, n_2}^2 + 2(\lambda + \mu)(n_1 + 1)(d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^3 + 2\mu d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^1) + (\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)d_{z_1} V_{n_1+1, n_2}^1](z_1, z_2) = 0. \quad (3.19)$$

Aumentando el índice de  $n_1$  a  $n_1 + 1$  en la ecuación

(3.18) se llega a

$$[(\lambda + 3\mu)(n_1 + 2)d_{z_1} V_{n_1+2, n_2}^2 + (\lambda + \mu)d_{z_1}^2 V_{n_1, n_2}^1 + 2\mu d_{z_2}^2 V_{n_1+1, n_2}^2 + 2(\lambda + \mu)d_{z_1} d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^3](z_1, z_2) = 0. \quad (3.20)$$

De (3.19) y (3.20) se obtiene

$$[(\lambda + \mu)(n_1 + 1)d_{z_2}^2 V_{n_1+1, n_2}^2 - 2\mu(\lambda + \mu)(n_1 + 1)d_{z_1} d_{z_2} V_{n_1+1, n_2}^3 - \mu(\lambda + 3\mu)d_{z_1} d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^1 - 2\mu(\lambda + 2\mu)(n_1 + 1)d_{z_1}^2 V_{n_1+1, n_2}^1](z_1, z_2) = 0. \quad (3.21)$$

Derivando parcialmente dos veces con respecto a  $z_2$  la

ecuación (3.19) y una vez con respecto a  $z_1$  la ecuación

(3.21) e igualándolas, se obtiene el siguiente resultado

$$[(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)d_{z_2}^3 V_{n_1+1, n_2}^2](z_1, z_2) = [-2\mu d_{z_1}^2 d_{z_2}^2 (\lambda + \mu)V_{n_1, n_2}^1 - (\lambda + \mu)d_{z_2}^4 V_{n_1, n_2}^2 + 2(\lambda + \mu)d_{z_1} d_{z_2}^3 V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2). \quad (3.22)$$

Las ecuaciones (3.7) con las transformaciones de coordenadas (3.11) toman la forma

$$[d_{z_2} V_{n_1, n_2}^1 - (n_2 + 1)V_{n_1, n_2+1}^1](z_1, z_2) = 0, \quad (3.23)$$

$$[d_{z_2} V_{n_1, n_2}^2 - (n_2 + 1)V_{n_1, n_2+1}^2](z_1, z_2) = 0,$$

$$[d_{z_2} V_{n_1, n_2}^3 - (n_2 + 1)V_{n_1, n_2+1}^3](z_1, z_2) = 0.$$

De (3.16), (3.18), (3.22) y (3.23) se obtiene

$$V_{n_1+1, n_2}^1(z_1, z_2) = -\frac{1}{(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)}[2\mu J d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^1 \quad (3.24)$$

$$+ (\lambda + \mu)J^3 d_{z_2}^4 V_{n_1, n_2}^2 - 2(\lambda + \mu)J^2 d_{z_2}^3 V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2)$$

$$V_{n_1+1, n_2}^2(z_1, z_2) = \frac{1}{(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)}[2\mu(\lambda + \mu)d_{z_1} V_{n_1, n_2}^1$$

$$+ 2\mu J d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^2 + 2(\lambda + \mu)d_{z_2} V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) \quad (3.25)$$

$$4\mu \frac{(\lambda + 3\mu)(n_1 + 1)}{(\lambda + \mu)} d_{z_1}^2 V_{n_1+1, n_2}^3(z_1, z_2) = -\frac{1}{(\lambda + 3\mu)}$$

$$\frac{1}{(n_1 + 1)}[(\lambda + \mu)d_{z_2} V_{n_1, n_2}^1 - (\lambda + \mu)J^2 d_{z_2}^3 V_{n_1, n_2}^2$$

$$+ (\lambda + 5\mu)J d_{z_2}^2 V_{n_1, n_2}^3](z_1, z_2) \quad (3.26)$$

$$V_{n_1, n_2+1}^1(z_1, z_2) = \frac{1}{(n_2 + 1)} d_{z_2} V_{n_1, n_2}^1(z_1, z_2) \quad (3.27)$$

$$V_{n_1, n_2+1}^2(z_1, z_2) = \frac{1}{(n_2 + 1)} d_{z_2} V_{n_1, n_2}^2(z_1, z_2)$$

$$V_{n_1, n_2+1}^3(z_1, z_2) = \frac{1}{(n_2 + 1)} d_{z_2} V_{n_1, n_2}^3(z_1, z_2),$$

donde  $J\phi(z) = \int_0^{z_1} \phi(\xi, \zeta) d\xi$ .

Representando el sistema de ecuaciones (3.6), (3.25) y (3.26) en forma matricial se obtiene

$$\begin{bmatrix} V_{n_1+1, n_2}^1 \\ V_{n_1+1, n_2}^2 \\ V_{n_1+1, n_2}^3 \\ V_{n_1+1, n_2}^3 \end{bmatrix} = [J^3 A_1 + J^2 d_{z_2}^3 A_2 + J d_{z_2}^2 A_3 + d_{z_1} A_4 + d_{z_2} A_5] \begin{bmatrix} V_{n_1, n_2}^1 \\ V_{n_1, n_2}^2 \\ V_{n_1, n_2}^3 \\ V_{n_1, n_2}^3 \end{bmatrix}, \quad (3.28)$$

donde las matrices  $A_i$  vienen dadas por

$$A_1 = \frac{1}{n_1+1} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = -\frac{1}{n_1+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{(\lambda+3\mu)} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_3 = -\frac{1}{n_1+1} \begin{bmatrix} \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\mu}{\lambda+3\mu} \end{bmatrix},$$

$$A_4 = -\frac{1}{n_1+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_5 = -\frac{1}{n_1+1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\lambda+\mu)}{\lambda+3\mu} \\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+3\mu} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo (3.27) y (3.28) se obtiene finalmente la siguiente expresión explícita para  $V_{n_1, n_2}^j(z_1, z_2)$ :

$$\begin{bmatrix} V_{n_1, n_2}^1 \\ V_{n_1, n_2}^2 \\ V_{n_1, n_2}^3 \end{bmatrix} = \frac{(-1)^{n_1}}{n_1! n_2!} d_{z_2}^{n_2} [J^3 d_{z_2}^4 A_1 + J^2 d_{z_2}^3 A_2 + J d_{z_2}^2 A_3 + d_{z_1} A_4 + d_{z_2} A_5] \begin{bmatrix} V_{0,0}^1 \\ V_{0,0}^2 \\ V_{0,0}^3 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

**Nota.** Para obtener (3.29) se asume que  $J^2 d_{z_1}^2 A_2 V_{n_1, n_2}^j = J d_{z_1}^3 V_{n_1, n_2}^j = V_{n_1, n_2}^j$ . Esta afirmación restringe la clase de funciones iniciales a aquellas que satisfacen:  $V_{n_1, n_2}^j(0, z_2) \equiv d_{z_1} V_{n_1, n_2}^j(0, z_2) \equiv 0$ .

La convergencia en expansiones holomorfas de la solución del sistema (3.29) se deduce de los resultados obtenidos en [2,3].

#### 4. CONCLUSIÓN GENERAL

El hallar soluciones analíticas del problema tridimensional elástico tiene múltiples aplicaciones al campo de la investigación del modelamiento real de los sólidos sometidos a cargas y deformaciones, basta recordar el gran aporte realizado por la elasticidad plana en la resistencia de materiales y al diseño de estructuras sometidas tensiones y deformaciones.

Se ha construido un procedimiento para hallar soluciones generales y exactas al sistema de Lamé por el método de las expansiones holomorfas las cuales vienen dadas en forma explícita del sistema (3.29).

También es posible una generalización de la solución del sistema de Lamé para tratar problemas no homogéneos [4].

Los resultados expuestos son comparables con los que se presentan en [5,6].

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] V.I Vasov, S.L Skorokhodov, *On the development of Trefftz method*, Dokl.-Akad.-Nauk, **337**(6) (1994), 713-717.
- [2] A. Rodionov, *Explicit Solutions for linear partial differential equations*, J.-Math, Vol 2, No 2. December (2000), 34-42.
- [3] C. M. Escobar, *Solución al sistema de Lamé utilizando la variable compleja, tesis de grado, Universidad Nacional de Colombia*. (2003).
- [4] A.I Alexandrovich, *Application of two complex variables to the theory of elasticity*, Dokl.-Akad.-Nauk **232**(3) (1977), 542-544.
- [5] K. Rectorys, V. Zahradnik, *Solution of the first biharmonic problem by the method of least squares on the boundary*, Aplikace Matematiky, **19**(2) (1974), 101-131.
- [6] A. Turbiner, *On polynomial solutions of differential equations*, J.-Math.-Phys. **33**(12) (1992), 3989-3993.
- [7] P.S. Pedersen, *A basis for polynomial solutions to systems of linear constant coefficient PDEs*, Adv.-Math **117** (1) (1996), 157-163.