RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE CONTORNO POR METODOS TOPOLOGICOS

Resolution of a boundary problem using topological methods

RESUMEN

En el presente artículo se muestra un resultado de existencia de solución para una ecuación no lineal de tipo elíptico bajo una condición de contorno en un dominio acotado usando como herramienta algunos métodos topológicos.

PALABRAS CLAVES: teorema de punto fijo, inmersión, invariante.

ABSTRACT

In this paper we show a result of existence of solution for a non lineal of elliptic type under a boundary condition in an closed domain using as tool some topological methods

KEYWORDS: Fixed point theorem, immersion, invariant.

PEDRO PABLO CÁRDENAS A.
Licenciado en Matemáticas y Computación.
Magíster en Enseñanza de la Matemática.
Estudiante de Doctorado en Matemáticas. Universidad de la Frontera. Temuco - Chile.
Profesor de Planta (Auxiliar) – Departamento de Matemáticas.
Universidad Tecnológica de Pereira
ppablo@utp.edu.co

CARLOS ALBERTO RODRIGUEZ VARELA
Licenciado en Matemáticas y Física
Estudiante de Maestría en Enseñanza de la Matemática
Universidad Tecnológica de Pereira
car@utp.edu.co

DOCIER MARINO CEBALLOS
Licenciado en Matemáticas y Física
Magíster en Matemáticas
Profesor titular
Universidad Tecnológica de Pereira
dceballo@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Se considera el siguiente problema de tipo elíptico

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,u) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$$

donde $\Omega \subseteq R^m$ es un dominio acotado con borde C^2, $g : \overline{\Omega} \to R$ suave y $f : \Omega \times R \to R$ continua y tal que existe $A > 0$ (suficientemente pequeño) tal que $|f(x,u)| \le A|u|$ para todo $x \in \Omega$ y para todo *u*. Para ello se usarán resultados de los teoremas de punto fijo (Brouwer y Schauder) aplicados a espacios de Banach.

2. TEOREMAS DE PUNTO FIJO

Teorema 2.1. (Brouwer). Considérese *H Hilbert* de dimensión finita, $C \subset H$ un conjunto compacto, convexo no vacío. Si $f : C \to C$ es una función continua, entonces tiene un punto fijo. [1]

Fecha de Recepción: 4 de Junio de 2008.
Fecha de Aceptación: 28 de Julio de 2008.

Teorema 2.2. (Schauder). Sea *C* un subconjunto convexo y compacto en *E*, espacio de Banach. Si $T : C \to C$ es continuo, entonces *T* tiene un punto fijo. [1]

Corolario 2.1. (Schauder). Sea *C* convexo, cerrado en *E* espacio de Banach, $T : C \to C$ continuo tal que *T(C)* es relativamente compacto, entonces *T* tiene un punto fijo. [1]

3. RESULTADOS DE EXISTENCIA DE SOLUCION

Se quiere probar la existencia de solución de

$$\begin{cases} \Delta u = f(x,u) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases} \quad \text{en } \Omega \subseteq R^m \tag{3.1}$$

Donde f es continua y existe $A > 0$ con $|f(x,u)| \leq A|u|$ para todo *u*. *A* es suficientemente pequeño, tanto como se necesite. De hecho, se impondrán condiciones sobre *A* mas adelante.

Se conoce como resolver problemas del tipo

$$\begin{cases} \Delta u = \tilde{f}(x) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$$

(es decir, donde la $\tilde{f}$ solo depende de *x* y no de *u*).

Consideremos $p > m$.

Dada $v \in W^{2,p}(\Omega)$ (fija), tomamos $f^{(v)}(\cdot, v) : \Omega \to R$ dada por $f^{(v)}(x) = f(x, v(x))$ y sea $u \in W^{2,p}(\Omega)$ solución de

$$\begin{cases} \Delta u = f^{(v)}(x) \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases} \qquad (3.2)$$

Llámese *T* a la aplicación que a cada *v* le hace corresponder *u* (solución de (3.2))

$$T : W^{2,p}(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega) \qquad (3.3)$$
$$v \to u$$

Nótese lo siguiente: Si se pensara a *T* como

$$T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$$

entonces *T* resulta bien definida y además $\operatorname{Im} T \subseteq W^{2,p}(\Omega)$. Esto ocurre ya que si $v \in C^1(\overline{\Omega})$ entonces $f^{(v)}$ es continua en Ω, con lo cual, como Ω es acotado resulta $f^{(v)} \in L^p(\Omega)$. Luego existe un único $u \in W^{2,p}(\Omega)$ solución de (3.2), entonces $T(v) = u$.

Puede verse además que si $g \equiv 0$, entonces $T(v) = u = u^1 + u_g$, donde u^1 verifica

$$\begin{cases} \Delta u^1 = f(x,v) \\ u^1|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$$

con lo cual $u^1 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ y u_g es la única solución de

$$\begin{cases} \Delta ug = 0 \\ u|_{\partial\Omega} = g(x) \end{cases}$$

Es por esto que, dada $v \in C^1(\overline{\Omega})$, se tiene:
$T\ v = (T\ v)^1 + ug$ con $(T\ v)^1 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$

Lo que se busca es un punto fijo a la aplicación T, es decir, $u \in C^1(\overline{\Omega})$ tal que $T\,u = u$.

Para ello, se necesita ubicar en las condiciones del teorema de Schauder. Se tendría que probar que *T* es continua, compacta y que además existe $G \subseteq C^1(\overline{\Omega})$ conjunto cerrado convexo acotado invariante (es decir, $T(G) \subseteq G$). Si se logra probar estas tres condiciones, en virtud del corolario 2.1, existirá un punto fijo de *T* en *G*.

Ahora, basta probar:
- *(i). T* es continua
- *(ii). T* es compacta
- *(iii).* Encontrar *G*.

***(i). T* es continua.**

Sea $v \in C^1(\overline{\Omega})$. Se quiere probar que si $\{w_j\}_{j\in N}$ es una sucesión que tiende a *v* (con la norma de $C^1(\overline{\Omega})$), entonces $T(w_j) \xrightarrow[j\to\infty]{C^1} T(v)$.

$$\|T(w_j) - T(v)\|_{C^1} \leq k_1 \|Tw_j - Tv\|_{W^{2,p}} = \|(Tw_j)^1 + ug - (Tv)^1 - ug\|_{W^{2,p}}$$

$$\leq k_1 k_2 \|\Delta(Tw_j)^1 - \Delta(Tv)^1\|_{L^p} = k_1 k_2 \|f(x,w_j) - f(x,v)\|_{L^p}$$

$$= k_1 k_2 \left(\int_\Omega |f(x,w_j) - f(x,v)|^p\, dx \right)^{1/p},$$

Empleando convergencia mayorada, se ve que esta última integral tiende a cero, luego $T(w_j) \xrightarrow[j\to\infty]{C^1} T(v)$, por lo tanto *T* es continua.

***(ii). T* es compacta.**

Se debe probar que si *C* es un conjunto acotado de $C^1(\overline{\Omega})$, entonces *T(C)* es precompacto en $C^1(\overline{\Omega})$.

Debido a que la inmersión $i = W^{2,p}(\Omega) \to C^1(\overline{\Omega})$ es compacta, bastaría con demostrar que *T(C)* es acotado en

$W^{2,p}(\Omega)$. Como *C* es acotada, existe *N>0* tal que $\|v\|_{C^1} \leq N$, para todo $v \in C$.

$$\|Tv\|_{W^{2,p}} \leq \|(Tv)^1\|_{W^{2,p}} + \|u_g\|_{W^{2,p}} \leq \|\Delta(Tv)^1\|_{L^p} + \|u_g\|_{W^{2,p}}$$
$$= k_2 \| f(x,v)\|_{L^p} + \|u_g\|_{W^{2,p}} \leq k_2 A|\Omega|^{1/p}\|v\|_{C^1} + \|u_g\|_{W^{2,p}}$$
$$\leq k_2 A|\Omega|^{1/p} N + \|u_g\|_{W^{2,p}} = Cte$$

(constante que no depende de *v*) por lo que *T(C)* es acotado en $W^{2,p}$ (entonces precompacto en $C^1(\overline{\Omega})$).

***(iii).* Existe *G* acotado en $C^1(\overline{\Omega})$, convexo, cerrado con $T(G) \subseteq G$.**

Se propone que *G* sea una bola de radio *R* en $C^1(\overline{\Omega})$. Se busca en *R* conveniente. Es para esta cuenta que se necesita que *A* sea pequeño.

Sea $G = B_R(0) = \{v \in C^1(\overline{\Omega}) / \|v\|_{C^1} \leq R\}$, es claro que este es acotado, convexo y cerrado.

Se quiere que $T(G) \subseteq G$, es decir, $\|Tv\|_{C^1} \leq R$, para todo *v* con $\|v\|_{C^1} \leq R$. Tómese $v_0 \in B_R(0)$ fijo, entonces para todo $v \in B_R(0)$ vale lo siguiente

$$\|Tv\|_{C^1} \leq \|Tv_0\|_{C^1} + \|Tv - Tv_0\|_{C^1}$$
$$= \|Tv_0\|_{C^1} + \|(Tv)^1 + ug - (Tv_0)^1 - u_g\|_{C^1}$$
$$\leq \|Tv_0\|_{C^1} + k_1 k_2 \|\Delta(Tv)^1 - \Delta(Tv_0)^1\|_{L^p} =$$
$$\|Tv_0\|_{C^1} + k_1k_2\| f(x,v) - f(x,v_0)\|_{L^p} \leq \|Tv_0\|_{C^1} + k_1k_2\| f(x,v_0)\|_{L^p}$$
$$+ k_1 k_2 \| f(x,v)\|_{L^p} \leq$$
$$\|Tv_0\|_{C^1} + k_1 k_2 \| f(x,v_0)\|_{L^p} + k_1 k_2 |\Omega|^{1/p} A\|v\|_{C^1} \leq R$$

todo resulta $\leq R$ a condición de que $A < \dfrac{1}{k_1 k_2 |\Omega|^{1/p}}$

y que sea *R* suficientemente grande (basta que $R \geq \dfrac{\|Tv_0\|_{C^1} + k_1 k_2 \| f(x,v_0)\|_{L^p}}{1 - k_1 k_2 |\Omega|^{1/p} A}$). Por esto, $T(G) \subseteq G$. Y en virtud de lo demostrado en 1, 2 y 3, *T* tiene un punto fijo, luego (2.1) tiene solución (aunque no necesariamente única).

4. CONCLUSIONES

Dentro de los métodos topológicos, los teoremas de punto fijo se han aplicado a la resolución de diversas ecuaciones no lineales [2], [3]. En este artículo se demostró utilizando métodos topológicos la existencia de solución (bajo ciertas condiciones) de una ecuación diferencial parcial de tipo elíptico.

Utilizando los teoremas (2.1), (2.2) y el corolario (2.1), se probó que el operador *T* definido para el problema (3.2) tenía un punto fijo, el cual resolvió el problema planteado.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo y las sugerencias recibidas por el Doctor Pablo Amster de la Universidad de Buenos Aires (Argentina) para la realización de este artículo.

BIBLIOGRAFIA

[1] CÁRDENAS, P.P. Resolución de ecuaciones diferenciales no lineales por métodos topológicos. Tesis de Maestría en Matemáticas. Universidad Tecnológica de Pereira – Universidad de Buenos Aires (Argentina). 2004

[2] AMSTER, P.G. Resolution of Semilinear Equations by Fixed Point Methods. Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin.

[3] AMSTER, P, Pinnau, R., Large Convergent Iterative Schemes for a Nonisentropic Hydrodynamic Model for Semiconductors. ZAMM (Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik) Vol 82-8 (2002) 559-566.

[4] CONWAY J. A course in Functional Analysis. Springer Verlag, New York, 1985.