EL ESPECTRO PRIMO DE LAS MV-ALGEBRAS

The prime spectrum of MV-algebras

YURI A. POVEDA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asociado
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

EDGAR ALIRIO VALENCIA.
Matemático, Ms.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

RESUMEN
El álgebra subyacente a la lógica clásica es el algebra de Boole. De manera análoga las MV-álgebras son las álgebras asociadas a la lógica difusa. Así como la lógica clásica es la lógica de lo verdadero y lo falso, la lógica difusa es por excelencia la lógica probabilística. Una proposición en la lógica difusa puede tener un valor de verdad intermedio entre cero y uno; por ejemplo tres cuartos. El estudio de las álgebras multivaluadas es un tópico importante de la lógica y el álgebra de nuestros días, sus aplicaciones y sus relaciones con otros campos de las matemáticas aparecen en diversos artículos sobre el tema.

En el presente artículo se desarrollará la construcción novedosa de un espacio topológico junto con un haz de cadenas asociado a una MV-álgebra A. Esta construcción es análoga a la clásica construcción del espectro de los anillos conmutativos con unidad.

PALABRAS CLAVES: MV-álgebra, espectro primo, espacio topológico, haz, haz cadena, topología Co-Zariski.

ABSTRACT
The associated algebras to the classical logic are the Boole algebras, as much as the MV-algebras are the associated algebras to fuzzy logic. Like as the classical logic is the logical of it true or false, the fuzzy logic is the logical of it probabilistic. A logical proposition in fuzzy logic can have a truth value between zero and one. For example it can have a value of 3/4.

In this work we'll develop a new construction of a topological space, together with a sheaf of chains associated to a MV-algebra A. This space will be called the prime spectrum of A. This construction is like as the construction to the prime spectrum to commutative rings with unit.

KEYWORDS: *MV-algebra, prime spectrum, topological space, sheaf, chains, prime ideal, Co-Zariski topology.*

1. INTRODUCCIÓN

El espectro primo de una MV-álgebra es el espacio topológico definido sobre sus ideales primos con la topología Co-Zariski, en la cual los abiertos son los cerrados correspondientes a la conocida topología de Zariski definida en el espectro primo de los anillos conmutativos con unidad.

Esta construcción de importante porque permite transferir problemas y resultados obtenidos en anillos conmutativos con unidad a representarlos en el ámbito de las MV-álgebras y viceversa.

Las definiciones que usaremos se encuentran en [2], y pertenecen al folklore de la teoría de MV-álgebras. Sin embargo recordaremos algunas de ellas en este trabajo, porque son necesarias para comprender el espectro primo de una MV-algebra.

2. CONTENIDO

2.1 Nociones básicas

Se presentan algunas nociones y hechos básicos de la teoría del espectro de MV-algebras. Los enunciados de todas las proposiciones de esta sección corresponden al trabajo inicial de la tesis doctoral descrita en [¿].

Ideal primo de una MV-álgebra

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

Definición 1. Los elementos de toda MV-álgebra A, están munidos a un orden natural dentro de ella; para todo $x, y \in A$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x \ominus y = 0$$

Definición 2. Un conjunto P tal que $P \subseteq A$ es un ideal de una MV-álgebra A, si y solo si,

1. $0 \in P$
2. $\forall x, y \in A$: $x \leq y \in P \quad \Rightarrow \quad x \in P$
3. $\forall x, y \in P, \quad x \oplus y \in P$.

Definición 3. Un ideal P de una MV-álgebra A; es primo, si y solo si, para todo $x, y \in A$

$$x \ominus y \in P \qquad y \ominus x \in P$$

Corolario 4. Todo ideal primo P de una MV-álgebra A, es un conjunto filtrante.

Demostración. Para todo $x, y \in P$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[dr] & \\ & x \oplus y \\ y \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

donde la flecha representa la relación "$\leq$"

■

El espectro primo de una MV-álgebra A: $\mathfrak{Z}_A$

El espectro primo de una MV-álgebra A, es el espacio topológico $\mathfrak{Z}_A$ cuyos puntos son los ideales primos de A y cuya base de abiertos viene dada por los conjuntos:

$$W_a = \{P : a \in P, \text{ y } P \text{ es ideal primo de } A\}$$

Los conjuntos W_a con $a \in A$ se pueden tomar como base, debido a que $W_a \cap W_b = W_{a \oplus b}$. Si $a, b \in P$ un ideal primo de A, entonces $a \oplus b \in P$. Si $a \oplus b \in P$ como $a, b \leq a \oplus b$ y P es ideal, entonces $a, b \in P$. Además $\mathfrak{Z}(A) = W_0$.

Por analogía con el espectro primo de un anillo conmutativo o de las álgebras de Boole, podemos decir que la topología definida por estos abiertos es una ***topología co-***Zariski; los abiertos de esta topología son los cerrados de la topología de Zariski.

El objeto cadena $Spec_A$

Dado X un espacio topológico, se considera $Sh(X)$ la categoría de haces sobre X; es decir, espacios topológicos E munidos de un homeomorfismo local

$$E \longrightarrow X$$

Definición 5. [Haz de MV-álgebras] Un objeto MV-álgebra en $Sh(X)$ es un haz de MV-álgebras sobre X; es decir una tripla

$$\mathbf{E} = (E, X, \pi)$$

tal que:
S_1. E y X son espacios topológicos y $\pi : E \to X$ es un homeomorfismo local.

S_2 Para cada $x \in X$ la fibra $E_x := \pi^{-1}(x)$ es una mv-álgebra.

S_3 La función $e \mapsto \neg e$ es continua para todo $e \in E$

S_4 La función $(a, b) \mapsto a \oplus b$ es continua en el subespacio

$$\{(a, b) \in E \times E : \pi(a) = \pi(b)\}$$

Cuando E es Hausdorff se dirá que $\mathbf{E} = (E, X, \pi)$ es un haz Hausdorff.

1. El haz $\mathbf{E}$ se dice global si cada punto $e \in E$ es la imagen de alguna sección global.
2. Dadas dos secciones $s, t \in \mathbf{E}$, el conjunto
$$[[s = t]] = \{x \in X : s(x) = t(x)\}$$
Es abierto.
3. Si E es Hausdorff $[[s = t]]$ es clopen.

Definición 6. (objeto cadena) Un objeto $\mathbf{E}$ MV-álgebra de $Sh(X)$; es un objeto MV-cadena, si las fibras de $\mathbf{E}$ son MV-cadenas.

Definición 7. El objeto $Spec_A \in Sh(\mathfrak{Z}_A)$ está definido por:

$$\begin{array}{c} E_A \xrightarrow{\pi} \mathfrak{Z}_A \\ [a]_P \longmapsto P \end{array}$$

donde $[a]_P$ es la clase de equivalencia del elemento a en la MV-álgebra cociente A/P y E_A es el espacio topológico que tiene como conjunto subyacente la unión disjunta

$$E_A = \coprod_{P \in \mathfrak{Z}(A)} A/P$$

y cuya base de abiertos viene dada por los conjuntos,

$$\widehat{a}(W_b) = \{[a]_P : P \in W_b\}$$

Notar que π establece una biyección

$$W_b \approx \widehat{a}(W_b)$$

Estos conjuntos cubren E_A, y son cerrados para intersecciones,

$$\widehat{a}(W_b) \cap \widehat{c}(W_d) = \{[a]_P : b, d, a \ominus c, c \ominus a, \in P\}$$
$$= \widehat{a}(W_e)$$

con $e = b \oplus d \oplus (a \ominus c) \oplus (c \ominus a) \in P.$

Lema 8. $\pi : E_A \to \mathfrak{Z}_A$ es un homeomorfismo local.

Demostración. Es continua por construcción, dado $W_b \subseteq \mathfrak{Z}_A$,

$$\pi^{-1}(W_b) = \bigcup_{a \in A} \widehat{a}(W_b)$$

es abierto de E_A.

De otra parte dado $[a]_P \in E_A$, se toma algún $b \in P$, o sea $P \in W_b$. Se tiene $[a]_P \in \widehat{a}(W_b)$ y puede verse que la biyección $W_b \approx \widehat{a}(W_b)$ establece un homeomorfismo entre W_b y $\widehat{a}(W_b)$.

■

Definición 9. Cada elemento $a \in A$, define una sección global continua y abierta de $Spec_A$,

$$\begin{aligned} \widehat{a} : \quad & \mathfrak{Z}_A \longrightarrow E_A \\ & P \longmapsto [a]_P \end{aligned}$$

Por definición, dado $c \in A$, el conjunto

$$\widehat{c}^{-1}(\widehat{a}(W_b)) = W_{(c \ominus a) \oplus (a \ominus c) \oplus b}$$

es abierto en $\mathfrak{Z}_A$; consecuentemente $\widehat{c}$ es continua para cada elemento $c \in A$; y abierta por construcción; en particular,

$$\widehat{a}^{-1}(\widehat{a}(W_b)) = W_b$$

Para cada $[a]_P \in E_A$ y $b \in P$; $\widehat{a}(W_b)$ es un abierto de E_A que contiene a $[a]_P$.

Proposición 10 El haz de secciones del homeomorfismo local precedente, es el haz asociado, por la construcción de Godement, al prehaz:

$$\mathcal{P}_A : \mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)^{op} \longrightarrow \mathcal{E}ns$$

$$\begin{tikzcd} W_a \arrow[r, mapsto] & A/\langle a \rangle \\ W_b \arrow[u, hook] \arrow[r, mapsto] & A/\langle b \rangle \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{O}(\mathfrak{Z}_A)$ es el local de los abiertos de $\mathfrak{Z}_A$ y $\mathcal{E}ns$ es la categoría de conjuntos.

Demostración. Notar que las fibras de E_A son

$$(E_A)_P = A/P$$

Se debe verificar que

$$(E_A)_P = \varinjlim_{P \in W_a} \mathcal{P}_A(W_a)$$

o sea

$$A/P = \varinjlim_{a \in P} A/\langle a \rangle$$

El sistema filtrante considerado esta determinado por el orden en la MV-álgebra; es decir para todo $a, b \in P$ tal que $a \leq b$, se toma el morfismo:

$$\begin{aligned} h_{ab} : \quad & A/\langle a \rangle \longrightarrow A/\langle b \rangle \\ & [x]_{\langle a \rangle} \longmapsto [x]_{\langle b \rangle} \end{aligned}$$

inducido por la inclusión $\langle a \rangle \subseteq \langle b \rangle$ (que el sistema es filtrante se sigue del corolario 4).

Se debe verificar que

$$A/\langle a \rangle \to_{a \in P} A/P$$

es colímite.

Sea $\{g_a\}_{a \in A}$ un cono del diagrama anterior, es decir:

$$\begin{tikzcd} A/\langle a \rangle \arrow[r, "a \in P"'] \arrow[rr, bend left, "g_a"] & A/P & A' \end{tikzcd}$$

se quiere demostrar que existe un único $\lambda : A/P \to A'$, tal que

$$\begin{tikzcd} A/\langle a \rangle \arrow[r, "a \in P"'] \arrow[rr, bend left, "g_a"] & A/P \arrow[r, dashed, "!\lambda"] & A' \end{tikzcd}$$

el diagrama conmuta.

Defínase

$$\begin{array}{rrcl} \lambda: & A/P & \longrightarrow & A' \\ & [x]_P & \longmapsto & g_0(x) \end{array}$$

se debe verificar: (1) λ está bien definido y (2) el diagrama conmuta.

Veamos (1): sea $[x]_P = [y]_P$ para $x, y \in A$, entonces,

$$g_0(x) = g_a h_{0a}(x)$$

Para todo $a \in P$; porque $\{g_a\}_{a \in P}$ es cono. Consecuentemente para todo $a \in P$;

$$g_0(a) = g_a(h_{0a}(a)) = g_a(0) = 0$$

y por lo tanto, todos los elementos de P van a cero de A'.

Por hipótesis

$$x \ominus y \in P \quad \text{y} \quad y \ominus x \in P$$

Entonces $g_0(x \ominus y) = 0 = g_0(y \ominus x)$;

Consecuentemente

$$\lambda([x]_P) = g_0(x) = g_0(y) = \lambda([y]_P)$$

Veamos (2): se quiere demostrar

$$\lambda h_{aP} = g_a$$

sea $[x]_{\langle a \rangle} \in A/\langle a \rangle$ entonces,

$$\lambda h_{aP}\left([x]_{\langle a \rangle}\right) = \lambda\left(x/P\right) = g_0(x)$$
$$= g_a h_a(x) = g_a\left([x]_{\langle a \rangle}\right)$$

λ es único. Dado λ' que hace conmutar el diagrama, entonces

$$\lambda'([x]_P) = \lambda' h_{0P}(x) = g_0(x) = \lambda([x]_P).$$

Definición 11. (El objeto cadena) El objeto $Spec_A \in Sh(\mathfrak{Z}_A)$ es el objeto cadena definido por el par,

$$Spec_A = (\mathfrak{Z}_A, E_A)$$

Que sea un objeto cadena significa que las fibras $(E_A)_P \approx A/P$ son cadenas.

Definición 12. (La categoría de MV-álgebras) $mv\mathcal{A}$ la categoría de MV-álgebras; es la categoría cuyos objetos son las MV-álgebras y morfismos los homomorfismos entre MV-álgebras.

Definición 13. (La categoría de espacios topológicos munidos de un haz de cadenas) Llamaremos $mv\mathcal{E}$ a la categoría de espacios topológicos munidos de un haz de cadenas, cuyos objetos son los triplas (X, E, π)

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ X \end{tikzcd}$$

con π un homeo local, y E, X, espacios topológicos tales que la fibra E_x es una mv-cadena para cada $x \in X$; y cuyos morfismos

$$f : (X, E, \pi_1) \longrightarrow (Y, F, \pi_2)$$

están dados por un par (f, φ), donde f es una función continua y φ_x es un morfismo de MV-álgebras, tales que para toda sección $s \in F$

$$\begin{tikzcd} E_x & F_{f(x)} \arrow[l, dashed, "\varphi_x"'] \\ X \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, "s"'] \end{tikzcd}$$

$$k(x) = \varphi_x \circ s \circ f(x)$$

es sección de E.

6. BIBLIOGRAFIA

[1]. Manuela Busaniche, Daniele Mundici, *Geometry Of Robinson Consistency in Lukasiewics Logic*, por aparecer.

[2]. Roberto Cignoli, Itala M. L. D'Ottaviano, Daniele Mundici, *Algebraic Foundations of Many-valued Reasoning*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2000.

[3]. Roberto Cignoli, Eduardo Dubuc, Daniele Mundici, *Extending Stone duality to multisets and locally finite MV-algebras*. Journal of pure and applied algebra (189), 2004.

[4]. Eduardo Dubuc, *Temas Básicos de Categorías*, Notas del curso, Universidad de Buenos Aires, 2000.

[5]. Sanders Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, 2nd ed, Springer Verlag, New York 1998.