ESTIMACIÓN DE VARIABLES ALEATORIAS USANDO MÍNIMOS CUADRADOS

Estimation of random variables using square minimums

EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO
Profesor Auxiliar, Magíster en Ciencias Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
evalencia@utp.edu.co

FERNANDO MESA
Profesor Titular, Magister en Instrumentación Física
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
femesa@utp.edu.co

YURI ALEXANDER POVEDA
Profesor Asociado, Matemático, Ph.D. en Ciencias Matemáticas.
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
yapoveda@utp.edu.co

RESUMEN

En este artículo se encuentra el mejor estimador de una variable aleatoria X dada la variable aleatoria Y en el sentido de los mínimos cuadrados.

PALABRAS CLAVES: Variable aleatoria, Mínimos cuadrados y Esperanza condicional

ABSTRACT

In this article finds the best estimator of a random variable X given the random variable in the sense of the square minimums.

KEYWORDS: *Random variable, Square minimums and Conditional expectation.*

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los conceptos más importantes que se estudian en probabilidad por sus diferentes aplicaciones es la esperanza condicional de una variable aleatoria con respecto a una descomposición medible finita o con respecto a otra variable aleatoria la cual es medible con respecto a una descomposición.

En el estudio de la esperanza condicional, consideramos que tenemos un experimento aleatorio con un espacio de probabilidad $(\Omega, \Im, P)$ y $D_1, \ldots, D_k$ son k eventos tales que $D_i \in \Im$ para todo $i = 1, 2, \ldots, k$, $\bigcup_{i=1}^{k} D_j = \Omega$ y $D_i \cap D_j = \Phi$ para todo $i \neq j$, es decir, estos eventos forma una partición de Ω.

Teniendo en cuenta lo anterior vamos a definir la esperanza condicional de una variable aleatoria X con respecto a una descomposición medible Λ, la cual la denotaremos por $E(X|\Lambda)$ y este concepto nos permitirá demostrar un resultado que se presenta en [3], el cual dice: si X, Y son dos variables aleatorias, entonces

$$\inf_f E(Y - f(X))^2$$

se obtiene para $f^*(X) = E(Y|X)$, por consiguiente el mejor estimador de Y en términos de X, en el sentido de los mínimos cuadrados es la esperanza condicional $E(Y|X)$ una variable aleatoria dada en el sentido de los mínimos cuadrados.

2. ESPERANZA CONDICIONAL CON RESPECTO A DESCOMPOSICIONES FINITAS

A partir de una variable aleatoria dada y de la definición de probabilidad condicional elemental, si nos situamos en un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \Im, P)$ y si se considera una partición medible se puede definir una

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010
Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

nueva variable aleatoria, la cual tiene propiedades interesantes que vamos a desarrollar.

Definición 1 Decimos que $\Lambda = \{D_1, D_2, \Lambda\ , D_k\}$ es una descomposición medible de Ω si $D_i \neq \Phi$,

$D_i \in \Lambda$, $D_i \cap D_j = \Phi$ si $i \neq j$, $\mathrm{Y}_{i=1}^{k} D_i = \Omega$

y $P(D_i) > 0$ para $i = 1, 2, \Lambda\ , k$.

Por lo tanto podemos definir la esperanza condicional de una variable aleatoria X con respecto a una descomposición medible Λ, como se presenta en [1].

$$E(X|\Lambda) = \sum_{i=1}^{k} E(X|D_i) I_{D_I}. \qquad (1)$$

Proposición 2 Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, Λ una descomposición de Ω y X y Y variables aleatorias que toman valores en forma finita. Entonces:

(1) $E(aX + bY|\Lambda) = aE(X|\Lambda) + bE(Y|\Lambda)$ donde a y b son constantes.

(2) $E(X|\Omega) = E(X)$.

(3) $E(c|\Lambda) = c$ donde c es constante.

(4) Si $X = I_F$, entonces $E(X|\Lambda) = P(F|\Lambda)$.

(5) $E(E(X|\Lambda)) = E(X)$ propiedad de la doble esperanza.

La demostración se puede ver en [2].

Definición 3 Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, $\Lambda = \{D_1, D_2, \Lambda\ , D_k\}$ una descomposición de Ω y Y una variables aleatoria. Decimos que Y es $D_Y - medible$ si Y se puede representar de la forma

$Y = \sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}$, donde algunas y_i pueden ser iguales.

Proposición 4 Sea $(\Omega, \Im, P)$ un espacio de probabilidad, $\Lambda = \{D_1, D_2, \Lambda\ , D_k\}$ una descomposición de Ω y X y Y variables aleatorias que toman valores en forma finita. Si la variable aleatoria Y es $D - medible$, entonces $E(YX|\Lambda) = YE(X|\Lambda)$.

En particular $E(X|\Lambda) = X$.

La demostración se puede ver en [4].

Teorema 5 Si Λ una descomposición de Ω y Y una variable aleatoria $\Lambda - medible,$ entonces

$$E(f(Y)E(X|Y)) = E(Xf(Y)) \qquad (2)$$

para toda función $f = f(Y)$.

Demostración Como la variable aleatoria Y es $\Lambda - medible$ es decir,

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_I}(\omega), \qquad (3)$$

entonces, aplicando f a Y, obtenemos

$$f(Y) = f\left(\sum_{i=1}^{k} y_i I_{D_i}(\omega)\right) = \sum_{j=1}^{k} x_j I_{D_j}(\omega) \quad (4)$$

donde $x_j = f(y_i)$, $D_j = \{\omega : f(Y(\omega)) = x_j\}$, así $f = f(Y)$ es $\Lambda - medible$ y

$$E(f(Y)E(X|\Lambda)) = E(E(Xf(Y)|\Lambda)) \quad (5)$$

y por la propiedad de la doble esperanza, finalmente obtenemos la expresión

$$E(f(Y)E(X|\Lambda)) = E(Xf(Y)). \quad (6)$$

Teorema 6 Sean X y Y variables aleatorias. La esperanza condicional $f(X) = E(Y|X)$ es el mejor estimador de Y, en términos de X.

Demostración Llamemos $G(X) = E(Y - f(X))^2$

$$G(X) = E(Y^2) - 2E(Yf(X)) + E(f(X)^2) \quad (7)$$

por el Teorema 5 tenemos que

$E(Yf(X)) = E(f(X)E(Y|X))$, por lo tanto

$$G(X) = E(Y^2) - 2E(f(X)E(Y|X)) + E(f(X)^2). \ (8)$$

Como queremos hallar el mínimo, derivamos $G(X)$.

$$\frac{dG(X)}{dX} = 2E\big(f(X)f'(X)\big) - 2E\big(f'(X)E(Y|X)\big)$$
$$+ f(X)E'(Y|X). \qquad (9)$$

Ahora como $E(Y|X) = \sum_{j=1}^{n} y_j P(A_j|D_X)$ donde D_X es la descomposición inducida por la variable X, entonces $E'(Y|X) = 0.$

Así, igualando a cero la derivada de G, tenemos

$$E\big(f(X)f'(X)\big) - E\big(f'(X)E(Y|X)\big) = 0. \qquad (10)$$

Por linealidad

$$E\big(f(X)f'(X) - f'(X)E(Y|X)\big) = 0 \qquad (11)$$

de donde

$$E\big(f'(X)\big(f(X) - E(Y|X)\big)\big) = 0 \qquad (12)$$

y se tiene que

$$f'(X)\big(f(X) - E(Y|X)\big) = 0 \qquad (13)$$

por lo tanto $f(X) = E(Y|X).$

Así que, $f(X) = E(Y|X)$ es el mejor estimador de Y en términos de X en el sentido de los mínimos cuadrados.

3. CONCLUSIÓN

La esperanza condicional de una variable aleatoria dada con respecto a otra , se puede interpretar como el mejor estimador en el sentido de los mínimos cuadrados.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] P. Ibarrola, L. Pardo y V. Quesada. Teoría de la Probabilidad. Editorial Síntesis S. A, 1997.

[2] M. Muñoz, L. Blanco. *Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad.* Universidad Nacional de Colombia, Primera edición 2002.

[3] A. N. Shiryaev. *Probability*. Second Edition. Academic Press, 1975.

[4] D. Williams. *Probability Theory with Martingales.* Cambridge University Press, 1997.