SOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES MATRICIALES LINEALES DE SEGUNDO ORDEN CON COEFICIENTES VARIABLES

Solution matrix linear differential equations second order with coefficients variable

RESUMEN
En este artículo se construye la solución analítico numérica de la ecuación diferencial lineal matricial $X^{''} + A(t)X^{'} + B(t)X = 0$, donde los coeficientes $A(t), B(t) \in C^{nxn}$ son funciones analíticas en un entorno $|t| < a$, dando cotas para el error de truncamiento.

PALABRAS CLAVES: Ecuación diferencial, función analítica, error de truncación, desigualdades de Cauchy.

ABSTRACT
This paper deals with the equation differential of second order $X^{''} + A(t)X^{'} + B(t)X = 0$, *where* $A(t), B(t) \in C^{nxn}$ *are analytic functions in* $|t| < a$, *given truncation error bounds.*

KEYWORDS: *Differential equations, analytic function, truncation error bounds. Cauchy's inequalities.*

ABEL E. POSSO AGUDELO
Matemático.
PhD. Ciencias Matemáticas
Profesor Titular
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
possoa@utp.edu.co

JOSÉ R. GONZALEZ GRANADA
Profesor Auxiliar, PhD
Matemático
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

CARLOS ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil.
Mg. En Matemáticas
Profesor Auxiliar
Departamento de Matemáticas
Facultad de Ciencias Básicas
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Las ecuaciones diferenciales matriciales aparecen en muchos problemas científicos y técnicos. Aparte de casos especiales, las ecuaciones diferenciales matriciales no pueden ser resueltas en forma cerrada lo cual motiva la búsqueda de soluciones aproximadas.

En éste artículo se utiliza la expansión en series para construir soluciones aproximadas de la ecuación diferencial

$$X^{''} + A(t)X^{'} + B(t)X = 0, \tag{1}$$

donde $A(t), B(t) \in C^{nxn}$ son funciones analíticas en un entorno $|t| < a.$

2. SOLUCIÓN EN SERIES

Puesto que las funciones $A(t)$ y $B(t)$ son funciones analíticas entonces se pueden expresar en series de potencias. Sean

$$A(t) = \sum_{k\geq 0} A_k t^k, \quad B(t) = \sum_{k\geq 0} B_k t^k, \quad |t| < a.$$

Consideremos que la solución de (1) está dada por la serie

$$X(t) = \sum_{k\geq 0} C_k t^k \ , \tag{2}$$

donde los coeficientes C_k son matrices cuadradas de orden n que hay que determinar.

Derivando (2) se obtiene

$$X^{'}(t) = \sum_{k\geq 0} (k+1)C_{k+1}t^k,$$

$$X^{''}(t) = \sum_{k\geq 0} (k+1)(k+2)C_{k+2}t^k.$$

Reemplazando en (1) se obtiene

$$\sum_{k\geq 0}(k+1)(k+2)C_{k+2}t^k + \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} A_{k-j}(j+1)C_{j+1}\right)t^k + \sum_{k\geq 0} \left(\sum_{j=0}^{k} B_{k-j}C_j\right)t^k = 0$$

Fecha de Recepción: 25 de Enero de 2008
Fecha de Aceptación: 14 de Abril de 2008

Igualando los coeficientes de potencias del mismo grado obtenemos la siguiente relación de recurrencia

$$(k+1)(k+2)C_{k+2} = -\sum_{j=0}^{k}\left[A_{k-j}(j+1)C_{j+1} + B_{k-j}C_j\right], \quad (3)$$

con C_0 y C_1 arbitrarios.

Por las desigualdades de Cauchy (ver [11], pág 84) existe una constante $L > 0$ tal que

$$\|A_j\| \le \frac{L}{\rho^j}, \quad \|B_j\| \le \frac{L}{\rho^j}, \quad 0 < \rho < a, \quad j \ge 0. \quad (4)$$

Tomando normas en (3) se obtiene

$$(k+1)(k+2)\|C_{k+2}\| \le \sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)\|A_{k-j}\|\|C_{j+1}\| + \|B_{k-j}\|\|C_j\|\right]$$

Por (4) se tiene que

$$(k+1)(k+2)\|C_{k+2}\| \le \frac{L}{\rho^k}\sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)\|C_{j+1}\| + \|C_j\|\right]\rho^j \quad (5)$$

Sea $\{\gamma_k\}_{k\ge 0}$ la sucesión de números reales definida de la relación de recurrencia

$$(k+1)(k+2)\gamma_{k+2} = \frac{L}{\rho^k}\sum_{j=0}^{k}\left[(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j\right]\rho^j + L\gamma_{k+1}\rho, \quad (6)$$

Para $k \ge 2$, y $\gamma_0 = \|C_0\|$, $\gamma_1 = \|C_1\|$.

De (5) y (6) resulta que

$$\|C_k\| \le \gamma_k \quad \text{para} \quad k \ge 0. \quad (7)$$

La ecuación (6) se puede escribir como

$$k(k-1)\gamma_k = \frac{L}{\rho^{k-2}}\sum_{j=0}^{k-2}\left[(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j\right]\rho^j + L\gamma_{k-1}\rho, \quad (8)$$

y como

$$k(k+1)\gamma_{k+1} = \frac{L}{\rho^{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\left[(j+1)\gamma_{j+1} + \gamma_j\right]\rho^j + L\gamma_k\rho. \quad (9)$$

Multiplicando (9) por ρ y simplificando con (8) obtenemos

$$\gamma_{k+1} = \frac{\left(k(k-1) + k\rho L + \rho^2 L\right)\gamma_k}{k(k+1)\rho} \quad (10)$$

Puesto que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\gamma_{k+1}|t|^{k+1}}{\gamma_k |t|^k} = \frac{|t|}{\rho},$$

entonces, por el criterio del cociente, se tiene que

$$\sum_{k\ge 0}\gamma_k t^k \quad \text{converge para} \quad |t| < \rho < a.$$

Como $\|C_k\| \le \gamma_k$ entonces la serie $\sum_{k\ge 0}\|C_k\| t^k$ es convergente para $|t| < a$.

3. ERROR DE TRUNCACIÓN

4.

A continuación se obtiene una cota para el error que se comete al aproximar la solución de la ecuación (1) mediante la suma finita

$$X(t,m) = \sum_{n=0}^{m} X_n t^n, \; 0 \le t \le \gamma < \delta, \; X_0 = C_0, \; X_1 = C_1, \quad (11)$$

donde los coeficientes X_n están dados por la fórmula de recurrencia

$$(n+1)(n+2)X_{n+2} = -\sum_{k=0}^{n}\left[A_{n-k}(k+1)X_{k+1} + B_{n-k}X_k\right]. \quad (12)$$

Sea M_1 una constante positiva tal que

$$máx\left\{ \underset{0\le t\le a}{Sup}\|A(t)\|, \; \underset{0\le t\le a}{Sup}\|B(t)\| \right\} \le M_1. \quad (13)$$

Sea M_2 una constante positiva tal que

$$\underset{0\le t\le a}{Sup}\|X(t)\| \le M_2. \quad (14)$$

Por las desigualdad de de Cauchy se tiene que

$$\|A_n\| \le \frac{M_1}{t_1^n}, \; \|A_n\| \le \frac{M_1}{t_1^n}, \; 0 < \gamma < t_1 < \delta, \; n \ge 0 \quad (15)$$

De (12) y (15), los números $\varphi_n = \|X_n\|$ satisfacen la desigualdad

$$\varphi_{k+2} \le \frac{M_1}{(n+1)(n+2)t_1^n}\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)\varphi_{k+1} + \varphi_k\right]t_1^k, \quad n \ge 0. \quad (16)$$

Luego, para $0 \le t \le \gamma$ se tiene que

$$\|X(t) - X(t,m)\| = \left\|\sum_{n\ge m+1} X_n t^n\right\| \le \sum_{n\ge m+1}\|X_n\|\gamma^n.$$

Por (16) se tiene que

$$\|X(t) - X(t,m)\| \le \sum_{n\ge m+1}\frac{M_1}{n(n-1)t_1^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)\varphi_{k+1} + \varphi_k\right]t_1^k\right)\gamma^n \quad (17)$$

Por las desigualdades de Cauchy en el intervalo $[0, t^*]$, con $t^* = t_1 + \frac{\delta - t_1}{2}$, se tiene que

$$\|X_n\| = \varphi_n \le \frac{M_2}{(t^*)^n},$$

luego

$$\varphi_n t_1^n \le M_2\left(\frac{t_1}{t^*}\right)^n \quad (18)$$

$$\sum_{n\ge 0}\varphi_n t_1^n \le M_2\frac{t_1/t^*}{(1 - t_1/t^*)^2} \quad (19)$$

$$\sum_{n\ge 0}(n+1)\varphi_{n+1}t_1^n \le \frac{M_2}{t_1}\frac{t_1/t^*}{(1 - t_1/t^*)^2} \quad (20)$$

De(17); (18), (19) y (20) se tiene que

$$\|X(t) - X(t,m)\| \le \sum_{n\ge m+1}\frac{M_1 M_2 t_1^3[(t^* - t_1)t_1 + t^*]}{(n-1)t_1^{n-2}}\left(\sum_{k=0}^{n-2}\left[(k+1)\varphi_{k+1} + \varphi_k\right]t_1^k\right)\gamma^n$$

para $0 < t < \gamma$.

4. CONCLUSIONES

La construcción de la solución en series de la ecuación (1) cuando los coeficientes son analíticos se encuentra en algunos libros sin dar cotas para el error de truncación de la serie. Con la cota del error de truncación dada en la sección 3 de este artículo se puede determinar apriori el número de términos de la serie solución que se deben tomar para garantizar aproximaciones de la solución con la precisión que se necesite en un determinado proceso. Es decir, dado $\varepsilon > 0$ se puede usar la acotación del error de truncación para determinar el menor entero positivo m para el cual se satisface la desigualdad

$$\left\| X(t) - X(t,m) \right\| < \varepsilon .$$

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] T. M. Apostol. *Análisis matematico.* Editorial Reverte, S. A. 1993.
[2] G. Birkhoff, G. C. Rota. *Ordinary differential equations. 3ed.* John Wiley and Sons. 1978.
[3] J. Camacho, J. C. Cortes, E. Navarro, A. E. Posso A. *Chebyshev rational matrix approximation with a priori error bounds for linear and Riccati matrix equations.* Mathematical and computer modeling. Vol. 35, No. 9-10, 2002, pag. 1061-1076.
[4] T. M. Flet. *Differential analysis. Cambridge University Press. 1980.*
[5] M. de Guzmán. *Ecuaciones Diferenciales ordinarias. Teoría de estabilidad y control.* Alambra, 1980.
[6] E. Hille. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison-Wesley. 1969.
[7] L. Jódar, A. E. Posso A., *Analytic numerical approximation with a priori error bound for the wave equation with time dependent coefficient.* Mathematical and computer modeling.Vol. 29, 2002, pág. 1-14.
[8] D. Kreider, R. Kuller y D. Ostberg. *Ecuaciones Diferenciales.* Fondo Educativo Interamericano, 1973.
[9] L. Marcellán, L. Casasús, A. Zarzo. *Ecuaciones diferenciales. Problemas lineales y aplicaciones.* McGraw-Hill, 1990.
[10] M. J. Rodríguez-Alvarez, G. Rubio, L. Jódar, A. E. Posso A. *Exact solution of variable coefficient mixed hyperbolic partial differential problems.* Applied Mathematics Letters. Vol. 16, 2003, pág. 309-312.
[11] E. C. Titchmarsh. *The Theory of Functions.* Oxford University Press*, New York, reprint 1997.*