

EL USO DE LA TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA EN LA RECONSTRUCCIÓN DE SEÑALES SENOSOIDALES

The use of the discrete Wavelet transform in the reconstruction of sinusoidal signals

RESUMEN

Este artículo presenta una corta explicación de la teoría básica del análisis Wavelet y una de sus aplicaciones en la reconstrucción de señales. Inicialmente se hace una comparación con el análisis de Fourier y se justifica la importancia y necesidad de utilizar la Transformada Wavelet. Luego se presenta matemáticamente la transformada Wavelet Continua, se discretizan los parámetros de tiempo y frecuencia obteniendo la Transformada Wavelet Discreta, por último se explica la forma en que se puede descomponer y representar una señal sinusoidal por medio de los coeficientes de escala y coeficientes Wavelet utilizando como función base la Wavelet Madre Haar.

PALABRAS CLAVES: Anidar, coeficiente, discretización, escalamiento, estacionaria, no-estacionaria, ortogonal, ortonormal, Wavelet Madre.

ABSTRACT

This article introduce a brief explanation of the basics Wavelet's theory and one of the applications in signals reconstruction. Initially a comparation with Fourier Analysis is made and the importance and necessity of the Wavelet Transform is justify. Then the continuos Wavelet transform is mathematically introduce , the time and frequency parameters are discretize getting the discrete Wavelet transform, at last is explained the way that a sinusoidal signal can be decomposed and represented using the scale and Wavelet coefficient using as a basis function the Mother Wavelet Haar.

KEYWORDS: Coefficient, discretize, nesting, no-stationary, Mother Wavelet, orthogonal, ortonormal, scaling, stationary.

1. INTRODUCCIÓN

En el procesamiento de señales se pueden encontrar diferentes tipos de señales estacionarias y no-estacionarias. Las primeras son localizadas en el tiempo, ya que su frecuencia no varía, este tipo de ondas son estudiadas por medio del análisis de Fourier, que permite su descomposición en términos de sus componentes sinusoidales, es decir, transforma la señal de la base de tiempo a la base de frecuencia y de igual manera permite el paso del dominio de la frecuencia al dominio del tiempo, sin embargo en este último se pierde información necesaria, que por ser de carácter estacionario, no resulta relevante. En el caso de las señales con comportamiento no-estacionario, es decir, aquellas cuya frecuencia varía en el tiempo, al tener la señal producto de la transformada de Fourier resulta imposible realizar el paso al dominio del tiempo porque no permite determinar en que momento se presenta un cambio en la frecuencia.

Surge entonces la necesidad de contar con una representación localizada en el tiempo y la frecuencia, como consecuencia de la desventaja presentada por el análisis de Fourier. De esta manera Gabor implementa el

uso de la STFT (Short Time Fourier Transform), que consiste en analizar una pequeña sección de la señal a través de una ventana de longitud fija, llevando la información contenida en este pequeño intervalo del dominio del tiempo a la escala bidimensional de tiempo y frecuencia, donde se puede conocer cuándo y a qué frecuencia ocurre un suceso.

Al utilizar la STFT se presenta una nueva deficiencia, el tamaño fijo de la ventana temporal, que impide analizar pequeños detalles en señales de frecuencia variable. Es así como se introduce el análisis Wavelet como herramienta que permite obtener una representación, descomposición y reconstrucción de señales, que presenten cambios abruptos en sus componentes de tiempo-frecuencia en forma instantánea, a través del análisis de multiresolución con ventanas de longitud variable, adaptadas al cambio de frecuencia de la señal. Es decir, esta técnica permite el uso de intervalos grandes de tiempo en aquellos segmentos en los que se requiere mayor precisión en baja frecuencia, e intervalos más pequeños donde se requiere información en alta frecuencia [1]. (Figura 1)

NATALIA NIETO

Estudiante Ingeniería Física
Universidad Tecnológica de Pereira
natican614@gmail.com

DIANA MARCELA OROZCO

Estudiante Ingeniería Física
Universidad Tecnológica de Pereira
mafalda42154@gmail.com

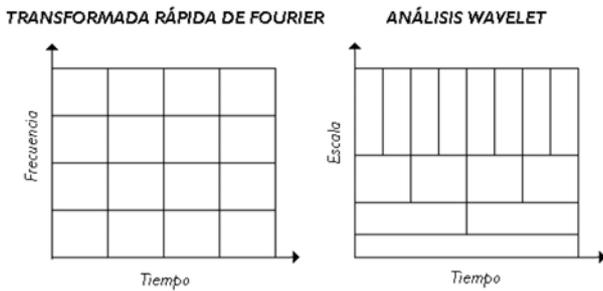


Figura 1. Comparación entre la STFT (tiempo-frecuencia) y el análisis Wavelet (tiempo-escala).

A diferencia de Fourier, en donde las funciones base son senos y cosenos de duración infinita, en el análisis Wavelet la base son funciones localizadas en frecuencia (dilatación) y en tiempo (traslación).

Una Wavelet es una "pequeña onda" de duración limitada, es decir, su energía está concentrada en el tiempo alrededor de un punto, lo que proporciona una adecuada herramienta para el análisis de fenómenos transitorios, no estacionarios, variables en el tiempo y aquellos que presenten discontinuidades.(Figura 2)

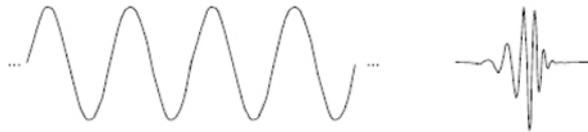


Figura 2. a) Señal seno. b) Wavelet Daubechies.

2. TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA (CWT)

La transformada Wavelet continua permite el análisis de una señal en un segmento localizado de esta y consiste en expresar una señal continua como una expansión de términos o coeficientes del producto interno entre la señal y una Función Wavelet Madre $\psi(t)$ [2].

Una Wavelet Madre es una función localizada, perteneciente al espacio $L^2(\mathbf{R})$, que contiene todas las funciones con energía finita y funciones de cuadrado integrable definidas

$$f \in L^2 \implies \int |f(t)|^2 dt = E < \infty \quad (1)$$

De esta manera se cuenta con una única ventana modulada y a partir de esta se genera una completa familia de funciones elementales mediante dilataciones o contracciones y traslaciones en el tiempo $\psi_{u,s}(t)$, denominados átomos wavelet o wavelet hijas que cumplen con todas las condiciones de la forma:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \quad (2)$$

La Wavelet Madre debe cumplir con la condición de admisibilidad

$$C_\psi = \int_0^\infty \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty \quad (3)$$

Lo que quiere decir que la función $\psi(t)$ este bien localizada en el tiempo, es decir, que la función oscile alrededor de un eje y su promedio sea cero, matemáticamente $\int_{-\infty}^\infty \psi(t) dt = 0$, y que la transformada de Fourier $\hat{\psi}(\omega)$ sea un filtro continuo pasa-banda, con rápido decrecimiento hacia el infinito y hacia $\omega = 0$.

La transformada Wavelet de una función $f(t)$ a una escala s y una posición u , es calculada por la correlación de $f(t)$ con una $\psi_{u,s}(t)$ de la forma

$$CWT f(u, s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(t) \psi_{u,s}(t) dt \quad (4)$$

$$CWT f(u, s) = \int_{-\infty}^\infty f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) dt \quad (5)$$

Para escalas pequeñas ($s < 1$), con la CWT se obtiene información localizada en el dominio del tiempo de $f(t)$ y para escalas ($s > 1$) la información de $f(\omega)$ se presenta localizada en el dominio de la frecuencia.

La transformada wavelet maneja un plano de tiempo-escala, pero también puede ser de tiempo-frecuencia, para esto se recurre al Teorema de Parseval y de esta manera es posible definir la transformada Wavelet en el dominio de la frecuencia

$$CWT f(u, s) = \int_{-\infty}^\infty \hat{f}(\omega) \sqrt{s} \bar{\psi}^*(s\omega) e^{j\omega u} d\omega \quad (6)$$

Para poder introducir el término de escala y frecuencia, es necesario ante todo definir una constante (c), que permite realizar un cambio de variable de una escala s a una frecuencia ω :

$$s \longrightarrow \omega = \frac{c}{s} \quad (7)$$

Con este cambio de variable es posible observar que la CWT localiza de forma *simultánea* la señal $f(t)$ en el dominio del tiempo como su espectro $\hat{f}(\omega)$ en el dominio de la frecuencia [2].

De igual manera, es posible realizar una Transformada Wavelet inversa, que permita reconstruir la señal, a partir de la CWT (que preserva la energía de la señal) y las $\psi_{u,s}(t)$

$$f(t) = C_\psi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty CWT f(u, s) \psi_{u,s}(t) \frac{duds}{s^2} \quad (8)$$

3. TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA (DWT)

Por la complejidad en el tratamiento numérico de la DWT, debido a la variabilidad en forma continua de los parámetros de escala como de traslación, es indispensable contar con una herramienta que permita la discretización de esta. Es así que se pasará de un mapeo continuo a un espectro o conjunto finito de valores, a través del cambio de la integral por una aproximación con sumatorias. La discretización permite representar una señal en términos de funciones elementales acompañadas de coeficientes

$$f(t) = \sum_\lambda c_\lambda \varphi_\lambda$$

En los sistemas Wavelet las Wavelet madre $\psi(t)$ traen consigo unas funciones de escala $\phi(t)$, las primeras son las encargadas de representar los detalles finos de la función, mientras las funciones de escala realizan una aproximación. Es posible entonces representar una señal $f(t)$ como una sumatoria de funciones wavelet y funciones de escala:

$$f(t) = \sum_k \sum_j c_{j,k} \phi(t) + \sum_k \sum_j d_{j,k} \psi(t) \quad (9)$$

3.1 Funciones de Escala y Funciones Wavelet

Una forma de discretizar los parámetros de escala y frecuencia es mediante un muestreo exponencial, para garantizar una mejor aproximación, con el cual se pueden redefinir los parámetros a valores discretos de la siguiente manera:

$$s = a^{-j} \quad u = kna^{-j}$$

De esta manera y reemplazando en la ecuación (2), obtenemos la familia de funciones discretizadas, que constituyen bases ortonormales de Wavelets en $L^2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} \psi_{j,k}(t) &= \frac{1}{\sqrt{a^{-j}}} \psi\left(\frac{t - kna^{-j}}{a^{-j}}\right) \\ &= a^{\frac{j}{2}} \psi(a^j t - kn) \end{aligned} \quad (10)$$

Para obtener una mejor aproximación de la señal en niveles de resolución muy finos, es necesario que las Wavelet sean dilatadas por un factor de 2^{-j} , permitiendo tener una resolución de 2^j , estas funciones son denominadas Wavelets Diádicas.

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - kn) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (11)$$

Teniendo en cuenta la ecuación (4), la transformada Discreta Wavelet tiene la forma

$$DWT f(j, k) = \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \int_{-\infty}^\infty f(t) \psi_{j,k}(t) dt \quad (12)$$

$$DWT f(j, k) = \int_{-\infty}^\infty f(t) 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - kn) dt \quad (13)$$

Teniendo en cuenta el anterior procedimiento es posible generar una familia de funciones de escala definidas :

$$\phi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - kn) \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (14)$$

La representación general de la señal $f(t)$ será de la forma

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_k \sum_j c_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - kn) + \dots \\ &\quad + \sum_k \sum_j d_{j,k} 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - kn) \end{aligned} \quad (15)$$

3.2 Coeficientes de Escala ($c_{j,k}$) y Coeficientes Wavelet ($d_{j,k}$)

Para representar una señal $f(t)$ y teniendo en cuenta la ecuación (15), es necesario encontrar los valores de los coeficientes ($c_{j,k}$) y ($d_{j,k}$), los cuáles permiten finalmente hacer la aproximación de la señal. Estos son producto de una multiplicación vectorial entre la función $f(t)$ y la función de escala (ϕ) o wavelet (ψ). Para los coeficientes de escala tenemos

$$c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{-\infty}^\infty |f(t) \phi_{j,k}(t)| dt \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \langle f(t), \phi_{j,k} \rangle &= c_{j,-\infty} \langle \phi_{j,-\infty}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle + \dots \\ &\quad + c_{j,k} \langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle + \dots \\ &\quad + c_{j,\infty} \langle \phi_{j,\infty}(t), \phi_{j,k}(t) \rangle \end{aligned} \quad (17)$$

Ya que las funciones wavelet y de escala cumplen la propiedad de ortonormalidad, es posible asegurar que uno de los productos vectoriales sea diferente de cero, ($\langle \phi_{j,k}(t), \phi_{j,m}(t) \rangle = \delta(k - m)$) o ($\langle \psi_{j,k}(t), \psi_{j,m}(t) \rangle = \delta(k - m)$) por lo tanto

$$c_{j,k} = \langle f(t), \phi_{j,k}(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \phi_{j,k}(2^j t - k) dt \quad (18)$$

De igual manera para los coeficientes Wavelet

$$d_{j,k} = \langle f(t), \psi_{j,k}(t) \rangle = \int_{t_1}^{t_2} f(t) \psi_{j,k}(2^j t - k) dt \quad (19)$$

3.3 Espacios Vectoriales \mathcal{V}_j y \mathcal{W}_j

Las funciones de escala (ϕ) corresponden a la proyección ortogonal de $f(t)$ sobre un espacio $\mathcal{V}_j \subset \mathbb{L}^2(\mathbb{R})$. Dicho espacio agrupa todas las aproximaciones con resolución 2^{-j} y en él está contenida toda la información necesaria para realizar aproximaciones con menor resolución, con lo que se puede afirmar que todos los espacios son versiones escaladas del espacio central \mathcal{V}_0 (Espacios anidados).

$$\dots \subset \mathcal{V}_{-1} \subset \mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1 \subset \dots \subset \mathbb{L}^2$$

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in \mathcal{V}_j \iff f(2^j t) \in \mathcal{V}_0 \quad (20)$$

Las funciones Wavelet ψ generan el espacio vectorial \mathcal{W}_j (espacio de detalle) definido como el complemento ortogonal de \mathcal{V}_j en \mathcal{V}_{j-1} , donde

$$\mathcal{V}_{j-1} = \mathcal{V}_j \oplus \mathcal{W}_j \quad (21)$$

Estos espacios presentan, al igual que los espacios \mathcal{V}_j , la propiedad de escalado, por lo cual

$$\forall j \in \mathbb{Z}, f(t) \in \mathcal{W}_j \iff f(2^j t) \in \mathcal{W}_0 \quad (22)$$

4. EJEMPLO (Representación de una señal sinusoidal)

A continuación se desarrollará una aproximación de la función $f(t) = \sin(t)$ con $t \in [-1, 7]$ para tres escalas distintas ($j = 0, j = 1, j = 2$) mediante la función de escala y función Wavelet Haar definidas así

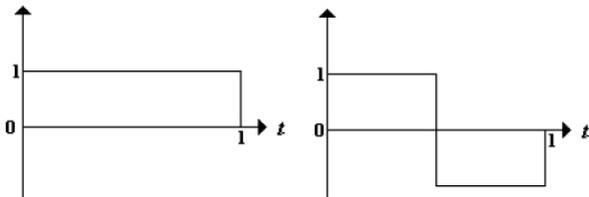


Figura 3. Función de Escala y Wavelet Haar

$$\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } t_1 = \frac{k}{2^j} \leq t < \frac{1+k}{2^j} = t_2 \\ 0, & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (23)$$

$$\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k) = \begin{cases} 2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} \leq t \leq \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \\ -2^{\frac{j}{2}}, & \text{si } \frac{k}{2^j} + \frac{1}{2^{j+1}} \leq t \leq \frac{k+1}{2^j} \\ 0, & \text{c.o.c} \end{cases} \quad (24)$$

Para una correcta aproximación de la señal se realiza el siguiente procedimiento:

1. Dependiendo de la escala o nivel de resolución a utilizar, se encuentra el intervalo en el cuál varía el parámetro de traslación (k). Para $j = 0$, $t_1 = -1 = \frac{k}{2^j}$ $t_2 = 7 = \frac{1+k}{2^j}$
2. Para el cálculo de los coeficientes de escala se utiliza el nuevo intervalo de k y se reescriben las ecuaciones (18) y (23) así

$$\phi_{0,k} = \phi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq t < 1 + k \\ 0, & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$c_{0,k} = \int_{-1}^7 f(t) \phi(t - k) dt$$

Se encuentra cada uno de los coeficientes, por ejemplo, para $k = -1$ y así sucesivamente hasta $k = 6$

$$c_{0,-1} = \int_{-1}^0 \sin(t) dt = -0.4597$$

3. Para el cálculo de los coeficientes Wavelet se realiza el anterior procedimiento, reescribiendo las ecuaciones (19) y (24)

$$\psi_{0,k} = \psi(t - k) = \begin{cases} 1, & \text{si } k \leq t \leq \frac{1}{2} + k \\ -1, & \text{si } \frac{1}{2} + k \leq t \leq k + 1 \\ 0, & \text{c.o.c} \end{cases}$$

$$d_{0,k} = \int_{-1}^7 f(t) \psi(t - k) dt$$

A manera de ejemplo, se calcula el coeficiente Wavelet, para $k = -1$

$$d_{0,-1} = \int_{-1}^{-1/2} \sin(t) dt - \int_{-1/2}^0 \sin(t) dt = -0.2149$$

4. Una vez encontrados los coeficientes para la escala $j = 0$, se repite el procedimiento para las escalas $j = 1$ y $j = 2$. El parámetro j puede aumentar dependiendo del nivel de resolución que se desee. De esta manera se obtuvo los siguientes coeficientes:

- Para $j = 0$

$c_{0,-1}$	-0.4597	$d_{0,-1}$	-0.2149
$c_{0,0}$	0.4597	$d_{0,0}$	-0.2149
$c_{0,1}$	0.9564	$d_{0,1}$	-0.0173
$c_{0,2}$	0.5738	$d_{0,2}$	0.1961
$c_{0,3}$	-0.3363	$d_{0,3}$	-0.2149
$c_{0,4}$	-0.9373	$d_{0,4}$	0.0516
$c_{0,5}$	-0.6765	$d_{0,5}$	-0.1735
$c_{0,6}$	0.2063	$d_{0,6}$	-0.2391

Tabla 1. Coeficientes de escala y coeficientes Wavelet para $j = 0$

- Para $j = 1$

$c_{1,-2}$	-0.6746	$d_{1,-2}$	-0.091
$c_{1,-1}$	-0.2448	$d_{1,-1}$	0.1205
$c_{1,0}$	0.2448	$d_{1,0}$	0.1205
$c_{1,1}$	0.6746	$d_{1,1}$	0.0909
$c_{1,2}$	0.9391	$d_{1,2}$	0.0392
$c_{1,3}$	0.9738	$d_{1,3}$	-0.0222
$c_{1,4}$	0.7699	$d_{1,4}$	-0.0781
$c_{1,5}$	0.3777	$d_{1,5}$	-0.1149
$c_{1,6}$	-0.1071	$d_{1,6}$	-0.1236
$c_{1,7}$	-0.5656	$d_{1,7}$	-0.1020
$c_{1,8}$	-0.8857	$d_{1,8}$	-0.0555
$c_{1,9}$	-0.9889	$d_{1,9}$	0.0047
$c_{1,10}$	-0.8500	$d_{1,10}$	0.0637
$c_{1,11}$	-0.5030	$d_{1,11}$	0.1071
$c_{1,12}$	-0.0328	$d_{1,12}$	0.1243
$c_{1,13}$	0.4454	$d_{1,13}$	0.1110

Tabla 2. Coeficientes de escala y coeficientes Wavelet para $j = 1$

- Para $j = 2$

$c_{2,-4}$	-0.7655	$d_{2,-4}$	-0.0400
$c_{2,-3}$	-0.58	$d_{2,-3}$	-0.0506
$c_{2,-2}$	-0.36	$d_{2,-2}$	-0.0580
$c_{2,-1}$	-0.12	$d_{2,-1}$	-0.0619
$c_{2,0}$	0.12	$d_{2,0}$	-0.0619
$c_{2,1}$	0.36	$d_{2,1}$	-0.0580
$c_{2,2}$	0.58	$d_{2,2}$	-0.0506
$c_{2,3}$	0.76	$d_{2,3}$	-0.0400
$c_{2,4}$	0.89	$d_{2,4}$	-0.0269
$c_{2,5}$	0.97	$d_{2,5}$	-0.0121
$c_{2,6}$	0.995	$d_{2,6}$	0.0033
$c_{2,7}$	0.95	$d_{2,7}$	0.0186
$c_{2,8}$	0.84	$d_{2,8}$	0.0328

$c_{2,9}$	0.69	$d_{2,9}$	0.0449
$c_{2,10}$	0.492	$d_{2,10}$	0.0542
$c_{2,11}$	0.262	$d_{2,11}$	0.0602
$c_{2,12}$	0.016	$d_{2,12}$	0.0624
$c_{2,13}$	-0.230	$d_{2,13}$	0.0607
$c_{2,14}$	-0.463	$d_{2,14}$	0.0552
$c_{2,15}$	-0.667	$d_{2,15}$	0.0463
$c_{2,16}$	-0.830	$d_{2,16}$	0.0345
$c_{2,17}$	-0.941	$d_{2,17}$	0.0206
$c_{2,18}$	-0.993	$d_{2,18}$	0.0054
$c_{2,19}$	-0.984	$d_{2,19}$	-0.0101
$c_{2,20}$	-0.913	$d_{2,20}$	-0.0250
$c_{2,21}$	-0.78	$d_{2,21}$	-0.038
$c_{2,22}$	-0.61	$d_{2,22}$	-0.0493
$c_{2,23}$	-0.39	$d_{2,23}$	-0.0572
$c_{2,24}$	-0.157	$d_{2,24}$	-0.0616
$c_{2,25}$	-0.091	$d_{2,25}$	-0.0621
$c_{2,26}$	0.334	$d_{2,26}$	0.0588
$c_{2,27}$	0.556	$d_{2,27}$	0.0518

Tabla 3. Coeficientes de escala y coeficientes Wavelet para $j = 2$

- Finalmente, para hacer la reconstrucción de la señal se suman los coeficientes de escala y Wavelet para igual j y k . A continuación se puede apreciar la forma en que fue aproximada la señal $f(t) = \sin(t)$ para distintos niveles de resolución o escala. (Figuras 4,5,6)

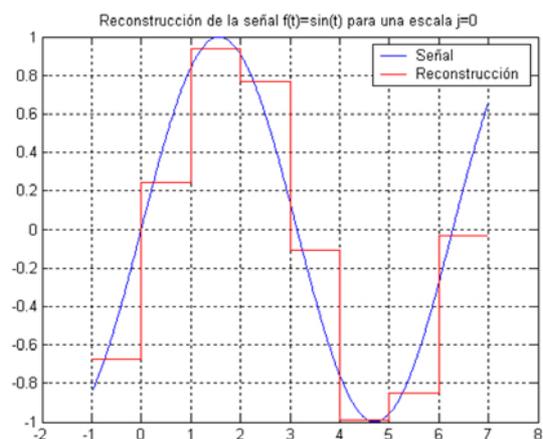


Figura 4. Reconstrucción de la señal a escala $j = 0$

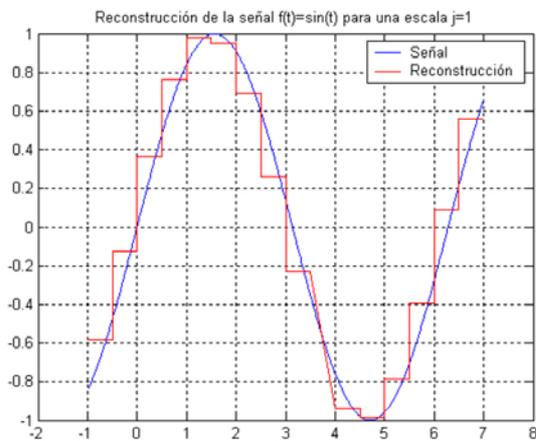


Figura 5. Reconstrucción de la señal a escala $j = 1$

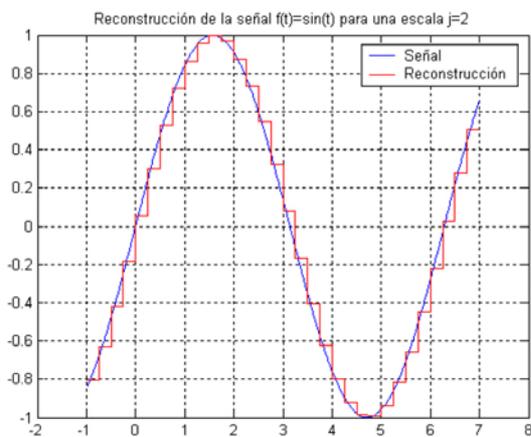


Figura 6. Reconstrucción de la señal a escala $j = 2$

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

- Debido al comportamiento no-estacionario que presentan las señales reales, es indispensable que su estudio se realice a través del análisis Wavelet, permitiendo una representación y descomposición con ventanas de longitud variable, adaptadas al cambio de frecuencia de la señal, preservando la información tiempo-frecuencia simultáneamente en el dominio transformado.
- El análisis Wavelet permite hacer una representación de la señal como una expansión de coeficientes del producto interno entre la Wavelet Madre, las funciones obtenidas por escalamiento y traslación de esta y la señal.
- La función Wavelet Madre cumple la condición de estar localizada en el tiempo, con promedio cero, que permite actuar como un filtro pasa-banda, que posibilita

visualizar simultáneamente la señal en tiempo-frecuencia.

- La complejidad en el cálculo matemático de la Transformada Wavelet continua genera la necesidad de hacer una discretización de los parámetros de escala y frecuencia, obteniendo un conjunto finito de valores (coeficientes), que a través de su clasificación, análisis y reagrupamiento, permiten la implementación de algoritmos que facilitan su cálculo e interpretación.
- La clave del análisis de multiresolución radica en el anidamiento de subespacios, asegurando la creación de una base wavelet, donde la Wavelet Madre se construye por funciones de escala $\phi(t)$, así la aproximación en una escala 2^{-j} contiene toda la información para calcular una resolución menor 2^{-j-1} , concluyendo que todos los espacios son versiones escaladas del espacio central \mathcal{V}_0 .

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Kouros y R. Musalem, "Tutorial introductorio a la Teoría de Wavelet", Artículo presentado como trabajo de la asignatura Técnicas Modernas en Automática.
- [2] A. Fuentes y P. Faundez, "Procesamiento digital de señales acústicas utilizando Wavelets", Instituto de Matemáticas UACH.
- [3] Mallat, *A Wavelet tour of signal processing*, Segunda Edición. San Diego: Academic Press, 1999.
- [4] E. Serrano, "Introducción a la transformada Wavelet y sus aplicaciones al procesamiento de señales de emisión acústica", Escuela de Ciencia y Tecnología, Universidad Nacional de General San Martín.
- [5] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelet*, Primera Edición. Philadelphia: SIAM, 1992.
- [6] H G. Stark, *Wavelets and Signal Processing: An application-Based Introduction*, Primera Edición. Berlín: Springer, 2005.
- [7] C. Burrus, R.A. Gopinath y H. Guo, *Introduction to Wavelets and Wavelets Transforms A Primer*. New Jersey: Prentice Hall.