IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS DE PRODUCTORIAS A SUMATORIAS. "APLICACIONES EN INTEGRALES"

Trigonometric Identities from Products to Sums

RESUMEN
Las identidades trigonométricas han sido una herramienta valiosa para la solución de problemas de variada naturaleza. Se presenta una identidad general que puede ser de gran utilidad para la solución de problemas en integración de funciones trigonométricas de cualquier periodo.

PALABRAS CLAVES: Integrales, Series, Trigonometría.

ABSTRACT
We use the trigonometric identity to give an expression a more convenient form in solving some difficult problems of different levels. We introduce an identity for coping some integration in trigonometry when we find a long product functions with a period of any value.

KEYWORDS: *Integration, Series, Trigonometric, complex number.*

FERNANDO VALDÉS M.
Ingeniero Electricista de la Universidad Tecnológica de Pereira.
M. Sc. En Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira
Profesor Auxiliar del Dpto. de Matemáticas de Ciencias Básicas.
Universidad Tecnológica de Pereira
fernandov@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El libro titulado "Table of Integrals, Series, Sums and Product" [1], es una referencia sobresaliente cuando se trata de buscar, a nivel de ingeniería, la solución de las integrales de carácter práctico y teórico, además encontramos las formulas para múltiples series de matemáticas elementales y avanzadas.

Es muy conocido que los problemas en donde aparecen productos trigonométricos es entonces mejor transformarlos en sumas, y también para resolver ecuaciones es preferible las sumas convertirlas en productos.

Un caso particular que se puede obtener en algunos textos sobre integrales, de relativa dificultad, es como la siguiente integral (es el caso más extenso presentado en [1]) cuya solución también se expone:

$$\int \cos(ax)\cos(bx)\cos(cx)dx = \frac{1}{4}\frac{sen((a+b+c)x)}{a+b+c} +$$

$$\frac{1}{4}\frac{sen((b+c-a)x)}{b+c-a} + \frac{1}{4}\frac{sen((a+c-b)x)}{a+c-b} + \frac{1}{4}\frac{sen((a+b-c)x)}{a+b-c} + K$$

Se propone, entonces, realizar la integral (1) cuyo integrando es un producto de funciones coseno, integral que no figura en los manuales especializados de integración.

$$\int \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \alpha) d\alpha \tag{1}$$

Se desea por lo tanto solucionar la productoria (2):

$$\prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \alpha) = \cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4x)\cos(8\alpha)\cdots\cos(2^n \alpha) \tag{2}$$

Para llegar a una solución fácil se presenta la siguiente nueva identidad que transforma una productoria trigonométrica en sumatoria haciendo los cálculos sin mayores complicaciones.

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1} \cos[(2k+1)\alpha] = \prod_{k=0}^{n} \cos(2^k \alpha) \tag{3}$$

2. DEMOSTRACIÓN

Para realizar la demostración de la ecuación (3) se parte de la igualdad (4):

$$2\cos(m\alpha) = e^{i(m\alpha)} + e^{-i(m\alpha)} \tag{4}$$

Se tomará el caso particular de n=2.

$$2^3 \cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha) = \left(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i2\alpha} + e^{-i2\alpha}\right)\left(e^{i4\alpha} + e^{-i4\alpha}\right)$$

Cuyo resultado es el siguiente:

Fecha de Recepción: 28 de Enero de 2008
Fecha de Aceptación: 24 de Marzo de 2008

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)=$$
$$\frac{1}{2^2}\left[\frac{\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)}{2}+\frac{\left(e^{i3\alpha}+e^{-i3\alpha}\right)}{2}+\frac{\left(e^{i5\alpha}+e^{-i5\alpha}\right)}{2}+\frac{\left(e^{i7\alpha}+e^{-i7\alpha}\right)}{2}\right] \tag{5}$$

Lo que nos lleva a la expresión (6):

$$\cos(\alpha)\cos(2\alpha)\cos(4\alpha)=\frac{1}{2^2}\left(\cos(\alpha)+\cos(3\alpha)+\cos(5\alpha)+\cos(7\alpha)\right) \tag{6}$$

El proceso siguiente es utilizar inducción para llegar al caso general.

$$\prod_{k=0}^{n+1}\cos(2^k\alpha)=\cos(2^{n+1}\alpha)\prod_{k=0}^{n}\cos(2^k\alpha) \tag{7}$$

Nos conduce a la expresión:

$$\frac{1}{2^n}\left[\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}+\frac{e^{3i\alpha}+e^{-3i\alpha}}{2}+\cdots+\frac{e^{(2(2^n-1)+1)i\alpha}+e^{-(2(2^n-1)+1)i\alpha}}{2}\right]\left(\cos(2^{n+1}\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2^n}\left[\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}+\cdots+\frac{e^{(2(2^n-1)+1)i\alpha}+e^{-(2(2^n-1)+1)i\alpha}}{2}\right]\left(\frac{e^{2^{n+1}i\alpha}+e^{-2^{n+1}i\alpha}}{2}\right) \tag{8}$$

De la expresión (8) se llega a la ecuación con sumatoria así:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{2^n-1}\cos[(2k+1)\alpha] \tag{9}$$

2. IDENTIDAD GENERAL

Existen varias fórmulas en [2] para realizar conversiones de productos a sumas pero no son prácticas cuando se pretende utilizar herramientas modernas y rápidas como los procesadores electrónicos. Por lo tanto se presenta en este trabajo un nuevo enfoque para realizar tanto integración como otros tipos de operaciones en donde se involucran productorias trigonométricas.

Sea la expresión

$$\prod_{i=1}^{n}\cos(p_i x)=\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{i=1}^{2^{n-1}}\cos(q_i x) \tag{10}$$

Esta ecuación (10) que ahora introducimos nos relaciona un productos de cosenos con su equivalente en sumas; situación que hace más fácil ciertas operaciones como las integrales. Tenemos entonces la ecuación matricial (11) para explicar cada uno de los términos en (10), tales como los términos en “p” y en “q”:

$$[q]=[T][p] \tag{11}$$

Que en forma más explícita es:

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \vdots \\ q_{2^{n-1}} \end{bmatrix}=[T]\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix} \tag{12}$$

La matriz [T] tiene una característica interesante, es la matriz de transformación que hemos introducido, en esta matriz se combinan las posibilidades de 1 y -1 en grupos de uno, grupos de dos, grupos de cuatro y así se continúa en grupos de 2^n, como en (13), que figuran los casos cuando n=4 y n=5, que puede generalizarse para cualquier n; la matriz siempre tendrá n columnas y 2^{n-1} filas. Además todo el sistema matricial es fácil de programar en cualquier software matemático:

$$[T]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix};\ [T]=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \tag{13}$$

3. APLICACIONES

Supongamos que estamos interesados en realizar la integral siguiente:

$$\int\cos(ax)\cos(bx)\cos(cx)\cos(dx)\cos(ex)dx \tag{14}$$

Entonces llevando los términos a las matrices (15) y (16) obtenemos:

$$[p]=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{bmatrix} \quad (15); \quad [T][p]=\begin{bmatrix} a+b+c+d+e \\ a-b+c+d+e \\ a+b-c+d+e \\ a-b-c+d+e \\ a+b+c-d+e \\ a-b+c-d+e \\ a+b-c-d+e \\ a-b-c-d+e \\ a+b+c+d-e \\ a-b+c+d-e \\ a+b-c+d-e \\ a-b-c+d-e \\ a+b+c-d-e \\ a-b+c-d-e \\ a+b-c-d-e \\ a-b-c-d-e \end{bmatrix} \quad (16)$$

Con lo cual podemos escribir dos términos del resultado de la integral, que posee 16 términos en total, así:

$$\frac{1}{16}\frac{\operatorname{sen}\left((c-d-e+a-b)x\right)}{c-d-e+a-b}\,;\quad \frac{1}{16}\frac{\operatorname{sen}\left((c+d+e+a+b)x\right)}{c+d+e+a+b}$$

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los manuales de matemáticas aunque pueden tener amplia información de identidades, se les escapan algunas fórmulas que son útiles para resolver problemas de naturaleza práctica sobre todo en ingeniería eléctrica y en especial en comunicaciones, se presentaron dos ecuaciones o identidades trigonométricas que pueden ser de gran ayuda. Es importante observar que en la ecuación (9) el límite de la sumatoria va hasta 2^n-1 mientras que en la ecuación (10) este límite llega hasta 2^{n-1}.

. BIBLIOGRAFÍA

Referencias de libros:

[1] I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik, and Allan Jeffry, Daniel Zwillinger. ISBN-13:978-0-12-373637-6. "Table of Integral, Series, Sums and Product" 2000, Academic Press.

[2] E. W. Hobson, *Treatise on Plane and Advanced Trigonometry*, Seventh Edition, Dover publication,New York, 1928.

[3] Maor Eli, *Trigonometry Delights*, ISBN 0-691-05754-0, Princeton University Press, 1998, New Jersey.