REDUCCIÓN DEL PROBLEMA SUPERCRÍTICO A UN PROBLEMA DE CAUCHY UTILIZANDO MÉTODOS VARIACIONALES

Supercritical reducing the problem to a Cauchy problem using variational methods

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Asistente
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

RESUMEN

En este trabajo se reduce el problema del comportamiento supercrítico de materiales a una ecuación diferencial ordinaria de primer orden de Cauchy.

PALABRAS CLAVES: *Cauchy, deformación, estabilidad, Kirchhof, principio variacional..*

ABSTRACT

In this work the problem of supercritical behavior of materials is reduced to a differential equation of Cauchy by variationals methods.

KEYWORDS: *Cauchy, deformation, stability, Kirchhoff, variational principle*.

1. Introducción

Para determinar los puntos de bifurcación del proceso de deformación es necesario conocer la distribución del campo de fuerzas, el desplazamiento y otras características que describen el estado del cuerpo en un tiempo arbitrario. Además para la solución del problema de frontera de la teoría de la plasticidad se requiere el estudio del comportamiento supercrítico.

Las variables antes mencionadas se pueden encontrar resolviendo el sistema de ecuaciones de estabilidad

$$\frac{\partial \dot{\Pi}^{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad (1)$$

Fecha de Recepción: 17 de junio de 2010

Fecha de Aceptación: 13 de Agosto de 2010

y teniendo en cuenta las condiciones de contorno

$$N_i \dot{\Pi}^{ij} = \dot{P}^{j}, \text{ en } S_T \qquad (2)$$

$$\dot{u}^i = \dot{u}^i_{o}, \quad u,^{\bullet j} = u,^{\bullet j}{}_{,o}, \qquad \text{en } S_U \qquad (3)$$

donde el punto sobre la variable significa derivación.

En los últimos años para resolver este tipo de problemas de frontera en la teoría de la plasticidad y elasticidad se han aplicado diferentes métodos numéricos basados en reducir el sistema (1) - (3) a la minimización de un funcional.

2. Planteamiento del problema

Sea un cuerpo arbitrario elastico-plástico que ocupa un la región V_o en la configuración inicial y cuya frontera es S_o.

Supongamos que en la parte de la frontera S_t es dado el vector de fuerzas $P = P_i g^j = P^i g_j$, y en la otra parte de la frontera S_u el desplazamiento de los puntos de la frontera $u = u_i g^j = u^i g_j$ es dado.

Es necesario analizar el sistema (1)-(3) para el caso de pequeñas deformaciones utilizando principios variacionales teniendo en cuenta la microdeformación del material [1,4].

3. Solución

Para la solución del problema definido anteriormente en términos de sus velocidades se utilizará el siguiente principio variacional.

En la clase de los campos continuos de velocidades de desplazamientos $\dot{u}^*$ toma valores en S_U, el funcional

$$J = \frac{1}{2}\int_{V_o} \dot{\Pi}^{ij}\dot{u}_{j,i}\,dv - \int_{S_o} T^{oi}\dot{u}_i\,dS \quad , \qquad (4)$$

con la condición que la función de influencia $R(\alpha,\alpha')$ sea definida positiva posee un mínimo absoluto, con $\dot{u}$ la velocidad real y que a su vez sea solución del problema de frontera (1)-(3).

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores entre los distintos componentes de los tensores y que la expresión para la derivada Jaumann, véase [1] de la ecuación (1,16) es posible el funcional escribirlo de la siguiente forma

$$J = \frac{1}{2}\int_{V_o}\left\{ \overset{\nabla}{\tau}^{ij}\dot{\eta}_{ij} - \frac{1}{2}\left(G^{jk}\tau^{il}\dot{\eta}_{kl} + G^{ik}\tau^{jl}\dot{\eta}_{kl}\right)\dot{\eta}_{ij} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\tau^{ij}\dot{u}^{k}_{,i}\dot{u}_{k,l}\right\} dV - \int_{S_T}\dot{T}^{oi}\dot{u}_i\,dS \qquad (5)$$

Aquí los valores τ^{ij} son los componentes del tensor de Kirchhoff, que se suponen conocidos, $\dot{T}$ es el vector de las ratas de velocidades de cambio de los esfuerzos superficiales.

Para simplificar los cálculos y teniendo en cuenta [1], este último funciona lo escribimos de la siguiente manera

$$J = \frac{1}{2}\int_{V_o}\left\{ \overset{\nabla}{\tau}^{ij}\dot{\eta}_{ij} - \frac{1}{2}R^{ijkl}\dot{u}_{k,l}\right\} dV - \int_{S_T}\dot{T}^{oi}\dot{u}_i\,dS \qquad (6)$$

Como se ha mencionado en numerosas investigaciones teóricas y prácticas sobre la teoría de la estabilidad de los cuerpos deformables, la bifurcación más allá del límite de elasticidad casi siempre sucede con el incremento de la carga externa. Este hecho significa que los diseños mecánicos más allá del límite elástico, no pierden su estabilidad en el punto de bifurcación del proceso de deformación[1,2,6].

Para determinar con mayor precisión la pérdida de estabilidad de estas estructuras es necesario investigar su comportamiento más allá del punto de bifurcación, por ejemplo, la longitud de la trayectoria de la deformación plástica.

Supongamos que λ que es el valor mínimo del parámetro de carga y $\tilde{v}_i$ corresponde a la forma de pérdida de estabilidad normalizada.

Para estudiar el comportamiento más allá del punto de bifurcación se utilizará la formulación del problema de contorno en términos de sus velocidades (1)-(3).

Supongamos que las condiciones iniciales para los campos desconocidos son sus valores en el punto crítico.

Representemos la solución del problema de formación en la forma [4]:

$$u_i = u_i^a + \xi\tilde{u}(x_k,\xi)\,, \qquad (7)$$

donde ξ son algunos parámetros que se caracterizan por ser monótonamente crecientes a lo largo del movimiento.

El primer término u_i^a (7) determina la prolongación continua del proceso general, $\tilde{u}(x_k,\xi)$ es el complemento de la solución del problema en términos de sus velocidades que se deriva de la forma de convexidad.

En el proceso post-crítico la forma de convexidad puede cambiar, entonces para pequeños ξ (en el punto de bifurcación y en su vecindad) $\tilde{u}_i(x_k,t)=\tilde{u}_i(x_k,0)$. Diferenciando (7) con respecto al tiempo, y suponiendo que la convexidad no cambia durante en el proceso de deformación, obtenemos

$$\dot{u}_i=\dot{u}_i^a+\dot{\xi}\tilde{u}_i. \qquad (8)$$

En vista de la representación (8) la solución de problema de frontera en términos de sus velocidades el funcional (6) toma la forma :

$$J=\frac{1}{2}\int_{V_o}\left\{\overset{\nabla}{\tau}^{ij}\dot{\eta}_{ij}-\frac{1}{2}R^{ijkl}\dot{u}_{i,j}\dot{u}_{k,l}\right\}dV-\int_{S_T}\dot{T}^{oi}\dot{u}_i dS. \qquad (9)$$

Así, el problema para construir soluciones más alla del punto de bifurcación se reduce a encontrar $\dot{u}_i^a$, $\dot{\xi}$ de la condición del mínimo del funcional y posteriormente la integración con respecto al tiempo de las ecuaciones diferenciales ordinarias que se obtienen.

Para resolver la ecuación variacional se puede utilizar cualquier método numérico, por ejemplo, con el método de elementos finitos [6,7].

Es de tener en cuenta que el principio variacional se formuló asumiendo el cumplimento de la condición de suficiencia [1]. En el punto de bifurcación, debido a que la unicidad para condición suficiente no se cumple, para determinar $\frac{d\lambda}{d\xi}$ aplicar el algoritmo descrito anteriormente no es posible. En este caso, la condición estacionaria del funcional es tal que se cumple en cada punto del objeto analizado.

Para determinar los valores de $\frac{d\lambda}{d\xi}$ en el punto crítico se debe utilizar la condición de descarga completa en cada punto del cuerpo y elegir el valor mínimo. Para la teoría de la plasticidad, teniendo en cuenta la microdeformación, la condición de descarga completa en los puntos donde no hay deformación plástica, se puede representar como:

$$r_{ij}\alpha^{il}+\frac{\mu}{1+\mu\Omega^*}F^{ij}r_{ij}>0, \qquad (10)$$

donde los componentes del tensor r se define como en [1].

Como se señaló anteriormente, para encontrar soluciones de la ecuación variacional se puede utilizar cualquier método numérico. Sin embargo, para identificar las características más importantes de la deformación de los cuerpos elásticos supercríticos y obtener resultados numéricos satisfactorios, podemos suponer que la forma de bifurcación supercrítica varía insignificantemente. Esta clase de excepciones son ampliamente utilizadas en el estudio de la estabilidad de los elementos construidos con paredes delgadas.

A una conclusión similar se llega analizando los resultados numéricos y analíticos [3].

Con esta suposición, el algoritmo se simplifica significativamente y la solución del problema de deformación se reduce a encontrar el mínimo del funcional en términos de la variable $\frac{d\lambda}{d\xi}$. El campo de desplazamientos tiendo en cuenta este supuesto se puede representar de la forma $u_i=u_i^a+\xi(\lambda)\tilde{v}_i$, donde $\tilde{v}_i$ es la forma propia de pérdida de estabilidad.

Además si el campo de los desplazamientos del proceso principal, está dado en función del parámetro de carga λ.

Así la solución del problema de deformación supercríticos (1)-(3) se escribe de la siguiente manera

$$\dot{u}_i=\frac{du_i^a}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\xi}+\tilde{v}_i. \qquad (11)$$

Sustituyendo la solución (11) en el funcional y encontrando su variación, se llega a la siguiente relación:

$$J=\int_{V_o}\overset{\nabla}{\tau}^{ij}\dot{\eta}_{ij}dV-\int_{V_o}R^{ijkl}\left[\frac{du_{i,j}^a}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\xi}+\tilde{v}_{i,j}\right]\left[\frac{du_{k,l}^a}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\xi}+\tilde{v}_{k,l}\right]dV-$$
$$\int_{S_T}\dot{T}^{oi}\left(\frac{du_i^a}{d\lambda}\frac{d\lambda}{d\xi}+\tilde{v}_i\right)dS \qquad (12)$$

La ecuación (12) permite determinar $\frac{d\lambda}{d\xi}$ en cualquier punto de la deformación después del punto de bifurcación a excepción del mismo punto de bifurcación, ya que en este punto la ecuación se cumple.

Para encontrar los valores de $\frac{d\lambda}{d\xi}$ en una vecindad del punto $\lambda = \lambda_c$, se debe conocer la condición de descarga completa.

Así, el problema del comportamiento supercrítico de un cuerpo elástico-plástico se reduce al problema de Cauchy para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden que no se resuelve en términos de sus derivadas y para su solución se pueden utilizar algún método numérico conocido para este tipo de problemas.

4. Bibliografía

1. Novozhilov V.V., Kadashevish Yu. A., Chernyakov. Yu.A. Teoria plastichnosti uchitivauchya mikrodeformacia. Dokl. AN SSSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823. Tradución del autor
2. *Gonzalez J.R.* Stability and Postbifurcation Behavior of Shells under Combined Loading. GAMM2001. Zurich, 2001. P. 44.
3. *Ilushin A.A. Plastichnost.* M., 1948. 876 p.
4. Kadashevish Yu. A., Novozhilov V.V. Chernyakov. Yu.A. *Teoria plastichnosti i polzuchesti uchitivaushie mikrodeformacii* // PMM. 1986. T.50, №6. p.890-897.
5. *Zelenskiy A.G., Shvayko N. Yu.* Vlianie istorii nagruzenya na bifurkaciu processa deformirovanya cilindricheskoi obolochki. Dokl. A.N USSR. Ser.A. 1978. T 1. Pp. 38-43.
6. *Hutchinson J.* W. Plastic buckling. Advances in Appl. Mech. 1974. Pp 67-144.
7. *Needlman A.* A numerical Study of Necking in circular cylindtical bars. J. Mech. And Phys. Solids. 1972, Pp 111-127