

CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES DIFUSOS DE UN HELICÓPTERO CON UN GRADO DE LIBERTAD

Sliding Mode Fuzzy Control of a Helicopter with One Degree of Freedom

RESUMEN

Se presenta un esquema para la aplicación del control por planos deslizantes usando lógica difusa de un modelo académico para el helicóptero. Las pruebas sobre el desempeño del controlador se realizan sobre el sistema con perturbaciones temporales. La ventaja del control implementado es que no necesita del conocimiento completo del modelo matemático de la planta.

PALABRAS CLAVES: Planos deslizantes, control difuso, helicóptero.

ABSTRACT

This article presents an implementation of a fuzzy control as sliding control of the helicopter academic model. The performance test has temporal perturbations. The advantage of the implemented control is that it does not need a prior knowledge of the complete mathematical model of the plant.

KEYWORDS: Sliding modes, fuzzy control, helicopter.

DIDIER GIRALDO

Ingeniero Electricista, MEE.

Profesor Titular

Universidad Tecnológica de Pereira

egiraldos@utp.edu.co

EDUARDO GIRALDO

Ingeniero Electricista, M.Sc.

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

egiraldos@utp.edu.co

SANTIAGO SÁNCHEZ

Ingeniero Electricista.

Profesor Catedrático

Universidad Tecnológica de Pereira

ssa@ohm.utp.edu.co

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

1. INTRODUCCIÓN

En la figura 1 se presenta el modelo del helicóptero con dos grados de libertad. Este sistema académico es fuertemente acoplado, los torques y fuerzas son creados por las hélices de los rotores, los propulsores son manejados a través de motores DC. La articulación permite la rotación de la barra. El contrapeso determina una posición de equilibrio. Los rotores están posicionados de forma perpendicular uno del otro, para que se produzca un movimiento en el plano vertical y en el plano horizontal y cada movimiento es afectado por un propulsor. Las señales de control están dadas por los voltajes en cada uno de los motores DC. Las posiciones son medidas por medio de "encoders" y las velocidades angulares por tacómetros [5].

El trabajo es presentado para el control del ángulo de rotación de la cola del helicóptero. En la siguiente sección se presenta la descripción del modelo matemático de la planta usada, se describen las variables de estado [4] y las señales de control del modelo. La tercera sección es un resumen del diseño del controlador por planos deslizantes y la aplicación de sistemas de control difuso mediante esta técnica, y un criterio de suavizado de las oscilaciones causadas por este tipo de control "chattering". La sección de resultados presenta el

comportamiento del helicóptero académico en el seguimiento de diferentes trayectorias de rotación.

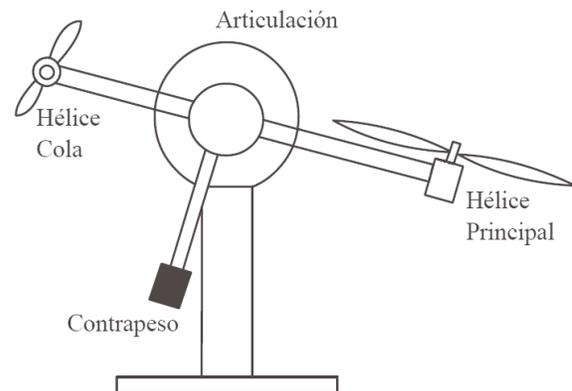


Figura 1. Helicóptero, modelo académico

2. MODELO MATEMÁTICO HELICÓPTERO

El modelo es desarrollado asumiendo algunas simplificaciones. Primero, la dinámica de los propulsores puede describirse por ecuaciones diferenciales ordinarias. Luego la fricción del sistema se asume viscosa. También se asume que el subsistema de propulsión de aire puede describirse bajo los postulados de la teoría de fluidos [2, 3, 5]. Las ecuaciones no lineales de estado que describen este sistema se presentan en las ecuaciones (2). Las

variables del modelo son: u el control, x el vector de estados y y es la salida, ecuación (1).

$$\begin{aligned} u &= [u_1, u_2]^T, \quad x = [x_1, \dots, x_6]^T, \\ y &= [y_1, \dots, y_6]^T \end{aligned} \quad (1)$$

Donde u_1 es la entrada de control para el rotor de la cola, u_2 es la entrada de control para el rotor principal, x_1 es la velocidad angular del rotor de la cola en [rad/s], x_2 es el momento angular de la barra [kg·m²·rad/s], x_3 es la posición acimut de la barra [rad], x_4 es la velocidad angular del rotor principal [rad/s], x_5 es la velocidad de desplazamiento de la barra [rad/s], x_6 es el ángulo de desplazamiento de la barra [rad].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 - f_h(x_1) \\ \dot{x}_2 &= (m_1 u_2 - m_2 x_4 + g_h(x_1)) \cos x_6 - m_3 q(x_2, x_6) \\ \dot{x}_3 &= q(x_2, x_6) \\ \dot{x}_4 &= u_2 - f_v(x_4) \\ \dot{x}_5 &= m_4 u_1 - m_5 x_1 + g_v(x_4) - m_6 x_5 + r(x_2, x_6) \\ \dot{x}_6 &= x_5 \end{aligned} \quad (2)$$

Las salidas del sistema son:

$$\begin{aligned} y_i &= x_i, \quad i = 1, 3, 4, 5, 6, \\ y_2 &= q(x_2, x_6) \end{aligned} \quad (3)$$

Las funciones $f_h(x_1)$, $f_v(x_4)$, $g_h(x_1)$ y $g_v(x_4)$ dependen de las velocidades angulares x_1 y x_4 , también de la geometría de las aspas de los rotores y representan la resistencia al movimiento y la aerodinámica a través de los rotores. Estas funciones se pueden aproximar por polinomios descritos en las ecuaciones (4).

$$\begin{aligned} f_h(x_1) &= a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + a_5 x_1^5 \\ f_v(x_4) &= b_1 x_4 + b_2 x_4^2 + b_3 x_4^3 + b_5 x_4^5 \\ g_h(x_1) &= c_1 x_1 + c_2 x_1^2 + c_3 x_1^3 + c_5 x_1^5 \\ g_v(x_4) &= d_1 x_4 + b_2 x_4^2 + b_3 x_4^3 + b_5 x_4^5 \\ r(x_1, x_4) &= -e_1 q(x_2, x_6)^2 \operatorname{sen} x_6 \cos x_6 \\ &\quad - e_2 \cos x_6 - e_3 \operatorname{sen} x_6 \\ q(x_2, x_6) &= \frac{x_2}{k_1 \cos^2 x_6 + k_2} \end{aligned} \quad (4)$$

En [3] se describe la forma de hallar los polinomios y los valores de los coeficientes, para este trabajo no es necesario conocer dichos valores dado al método de diseño que se sigue para implementar la acción de control necesaria.

3. CONTROL POR PLANOS DESLIZANTES

En general, el control por planos deslizantes puede ser separado en dos partes: el modo de alcance (*reaching mode*) y el modo deslizante (*sliding mode*). La superficie de deslizamiento $s = 0$ es el camino deseado en el espacio de estados, el cual es dado por el diseñador [2, 6,

7]. Estos puntos constituyen una trayectoria especial sobre la superficie $s = 0$ llamada plano deslizante. Entonces, la trayectoria del sistema en el plano de fase consta de dos partes que representan los dos modos del sistema. La primera parte es el modo de alcance, en el cual la trayectoria inicia desde cualquier punto sobre el plano de fase moviéndose hacia la superficie de conmutación S la cual alcanza en un tiempo finito. La segunda parte es el modo deslizante, en el cual la trayectoria tiende asintóticamente hacia el origen del plano deslizante $s = 0$.

2.1 Condiciones de diseño

Considere un sistema de orden n el cual puede ser representado por el siguiente modelo de espacio de estados:

$$\dot{x}^n = f(\mathbf{x}) + u \quad (5)$$

$$f(\mathbf{x}) = \hat{f}(\mathbf{x}) + \Delta f(\mathbf{x}) \quad (6)$$

Y

$$|\Delta f(\mathbf{x})| \leq F(\mathbf{x}) \quad (7)$$

donde $\mathbf{x} = [x \quad x^1 \quad \dots \quad x^{(n-1)}]^T$ y u son el vector de estado n dimensional y la entrada de control del sistema respectivamente, $f(\mathbf{x})$ es desconocida y limitada, y (6) presenta la función descrita con un grado de incertidumbre, $\Delta f(\mathbf{x})$ es desconocida, pero $\hat{f}(\mathbf{x})$ y $F(\mathbf{x})$ son conocidas.

Si en lazo cerrado se pretende llegar al estado deseado \mathbf{x}_d , entonces la ecuación no lineal del sistema dada en (5) se puede reescribir en términos del error, como se muestra a continuación.

El error se define como

$$\mathbf{e} = [x_d - x \quad x_d^2 - x^2 \quad \dots \quad x_d^n - x^n]^T \quad (8)$$

La mayoría de las superficies deslizantes se definen como

$$s(\mathbf{e}) = \left(\frac{d}{dt} + \lambda \right)^{(n-1)} \mathbf{e} \quad (9)$$

Donde λ es una constante positiva y con \mathbf{e} el vector de error. Entonces $s(\mathbf{e}) = 0$ define una superficie en el espacio \mathbb{R}^n , lo cual debe garantizar que el sistema resultante sea estable. Al desarrollar (9) se tiene

$$s(\mathbf{e}) = e^{n-1} + c_{n-1} \lambda e^{n-2} + \dots + \lambda^{n-1} e = 0 \quad (10)$$

Para mantener la función $s(\mathbf{e})$ en cero, se selecciona una acción de control tal que se cumpla con

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} s^2 \leq -\eta |s| \quad (11)$$

si el estado se encuentra fuera de $s(t)$, donde η es una constante positiva. La ecuación (11) es llamada la

condición de deslizamiento: esta condición garantiza que $s(\mathbf{x},t)$ disminuya.

El objetivo del control es garantizar que la trayectoria de estados del sistema converja a la superficie deslizante. De esta forma, se define una ley de control correctivo u_c como sigue

$$u_c = K \cdot \text{sgn}(s) \quad (12)$$

con K una constante positiva, y la función sgn una función discontinua definida como

$$\text{sgn}(s) = \begin{cases} 1, & s > 0 \\ 0, & s = 0 \\ -1, & s < 0 \end{cases} \quad (13)$$

Finalmente, la ley de control total u corresponde a la combinación de u_c y u_{eq} de la forma

$$u = u_c + u_{eq} \\ = a_1 e_1 + (a_2 + c_1) e_2 + \dots + (a_n + c_{n-1}) e_n \\ + K \cdot \text{sgn}(s) \quad (14)$$

De la ecuación (12) se nota que la entrada de control presenta oscilaciones de alta frecuencia debido a la función signo, generando en la salida del sistema oscilaciones (*chattering*). En [1, 6, 7, 8] se describen algunos métodos para disminuir estas oscilaciones.

4. PLANOS DESLIZANTES DIFUSOS

Se usa el principio de control deslizante para analizar los controladores difusos [1]. Para presentar el diseño se usa un sistema de orden dos, el control puede ser generalizado para cualquier orden. Suponga que se selecciona u como una señal de control difusa u_{fuzzy} .

$$u = u_{fuzzy}(\mathbf{x}) \quad (15)$$

Para que el error converja a cero, se asume que el control está dado por la ecuación (15). Si el controlador difuso u_{fuzzy} satisface la siguiente condición:

$$u_{fuzzy} \leq -\eta - [f(\mathbf{x}) + \lambda \dot{e} - \ddot{x}], \text{ si } \text{sign}(s) > 0 \\ u_{fuzzy} \geq -\eta - [f(\mathbf{x}) + \lambda \dot{e} - \ddot{x}], \text{ si } \text{sign}(s) < 0 \quad (16)$$

Donde η y λ son constantes positivas y $s = \dot{e} + \lambda e$, entonces, se garantiza que el error converge a cero.

La ley de control hasta ahora descrita presenta discontinuidades a través de la superficie de deslizamiento, lo cual ocasiona que la señal de control tenga una actividad alta. Para suavizar el acercamiento a la superficie de deslizamiento se introduce una capa vecina de convergencia; tal que el control cambia continuamente dentro de esta:

$$B(t) = \{\mathbf{x} : |s(\mathbf{x},t)| \leq \Phi\} \quad (17)$$

Φ es el grosor de la capa vecina y $\varepsilon = \Phi / \lambda^{n-1}$ es el ancho.

Si se satisface la condición de deslizamiento (11) fuera de la capa vecina $B(t)$, entonces se garantiza que pasado un tiempo finito el error estará dentro de la precisión de ε .

Al sacrificar la precisión se tiene una señal de control menos activa, entonces se diseña el controlado suave el cual no requiere de continuas interrupciones sobre el plano de deslizamiento. Para un sistema de orden dos, la señal de control pasa a ser:

$$u = -\hat{f}(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - K \text{sat}(s/\Phi) \quad (18)$$

Donde la función de saturación $\text{sat}(s/\Phi)$

$$\text{sat}(s/\Phi) = \begin{cases} -1 & \text{si } s/\Phi \leq -1 \\ s/\Phi & \text{si } -1 < s/\Phi \leq 1 \\ 1 & \text{si } s/\Phi > 1 \end{cases} \quad (19)$$

4.1 Diseño del controlador difuso basado en el suavizado de la ley de control por deslizamiento

Para una precisión ε se selecciona Φ y λ , se puede diseñar un controlador difuso que se aproxime a (18). Para esto se tiene que:

$$u_{fuzzy} = -\hat{f}(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - [\eta + F(\mathbf{x})] \text{sat}(s/\Phi) \quad (20)$$

Se diseña entonces el control difuso que se aproxime a (20), tal que todas las funciones son conocidas. Para esta tarea se siguen dos pasos básicos.

Paso 1. Determinar los rangos del error y sus derivadas.

Paso 2. $g(\mathbf{e}) = -\hat{f}(\mathbf{x}) + \ddot{x}_d - \lambda \dot{e} - [\eta + F(\mathbf{x})] \text{sat}(s/\Phi)$ y realice su aproximación usando un aproximador universal basado en un sistema difuso.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

Se realizaron las simulaciones para una entrada tipo escalón, un ciclo de onda cuadrada, seguimiento de una onda sinusoidal, y una señal variable con el tiempo, estas representan un ángulo de posición para la cola. Las respuestas obtenidas presentan un error generado por la reducción de las oscilaciones fuertes usando la capa vecina de convergencia.

La figura 2 presenta la respuesta del ángulo de giro del helicóptero para una referencia tipo escalón, la cual representa el mantener la cola en una posición fija, se tienen tres perturbaciones aplicadas en $t=16, 24$ y $31s$. El tiempo de corrección del ángulo es función de la magnitud de la perturbación.

La figura 3 presenta el seguimiento de una trayectoria donde se cambia de ángulo periódicamente y se desea que se permanezca por un tiempo determinado en una posición. Las respuestas a los cambios son algo lentas debido a la dinámica del modelo.

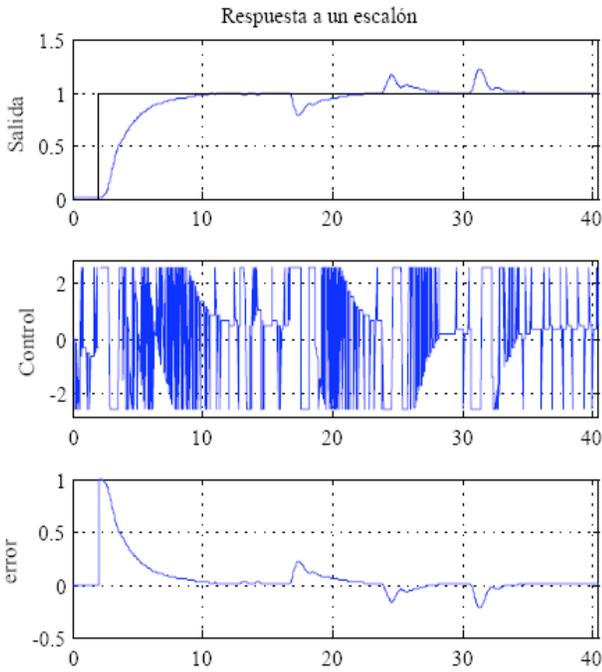


Figura 2. Control rotación de la cola, referencia escalón

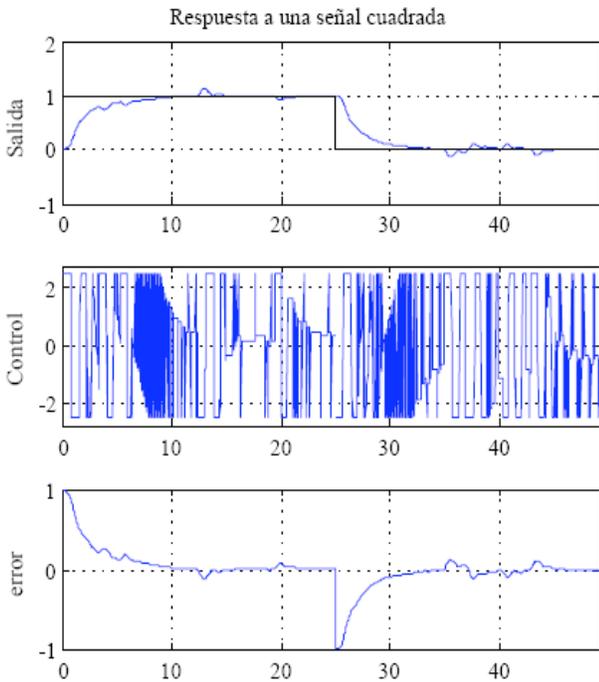


Figura 3. Control rotación de la cola, referencia cuadrada

En la figura 4 se tiene una trayectoria mucho más suave y se aplican perturbaciones antes de los 20s y después de los 40s. En la perturbación de los 20s se puede ver como el control lleva la posición en forma descendente hacia la referencia y luego ascendente dado a que sufre un sobre paso pequeño, lo anterior se puede apreciar de manera clara en la curva del error.

La figura 5 presenta otro seguimiento suave de la trayectoria, pero con un cambio repentino de la referencia la cual causa un error apreciable y es corregido en un

tiempo relativamente lento dado las características del helicóptero.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La técnica de control difuso por planos deslizantes presenta una forma sencilla y simple de controlar modelos no-lineales debido a que no es necesario conocer el modelo completo del sistema.

Se presentan errores pequeños en las trayectorias seguidas debido al sacrificio de precisión dado a la introducción de una capa vecina de convergencia.

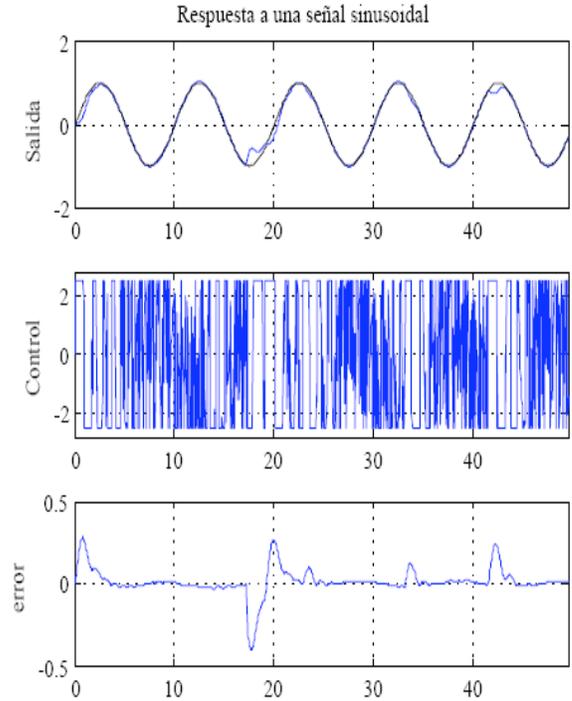


Figura 4. Control rotación de la cola, referencia sinusoidal

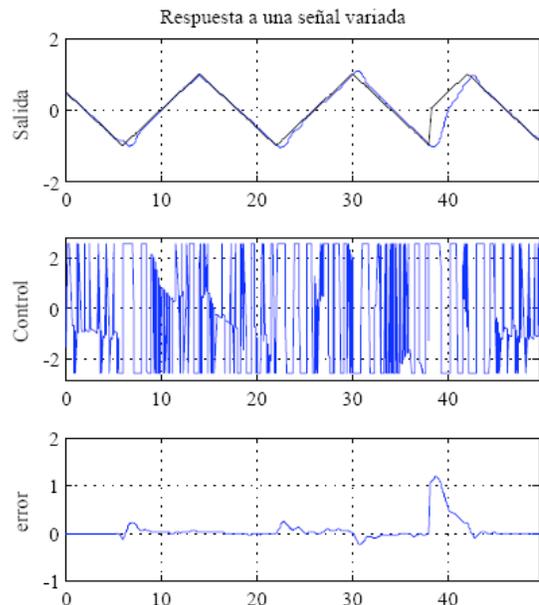


Figura 5. Control rotación de la cola, referencia variada

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] L-X. Wang. *A Course in Fuzzy Systems and Control*. Prentice Hall, United States of America, 1997.
- [2] P. Gorczca and K. Hajduk. *Tracking Control Algorithms for a Laboratory Aerodynamycal System*, International Journal Applications, Mathematics, Computers and Science, Vol. 14, No. 4, pp: 469–475, 2004.
- [3] J. C. Avila, B. Brogliato, A. Dzul and R. Lozano, *Nonlinear Modeling and Control of Helicopters*. Automatica, No. 39, 1583-1596. 2003.
- [4] Astrom K. and Wittenmark, B. *Computer Controlled Systems, Theory and design*, Prentice Hall, 2002.
- [5] Feedback, *Control in a MATLAB Environment – TRMS, manual: 33-007-1C*, Feedback Instruments Ltd, England, 2001
- [6] Slotine, J-J. E., W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, United States of America, 1991.
- [7] Astrom, K. and Wittenmark, B. *Adaptive Control*, Prentice Hall, United States of America, 1994.
- [8] H. Ramírez, R. Márquez, F. Rivas, S. Orestes, *Control de sistemas no Lineales, linealización aproximada, extendida, exacta*. Prentice Hall, España, 2005.