

APLICACIÓN DE UN CONTROLADOR LINEAL CUADRÁTICO USANDO UN OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO SOBRE UN PUENTE GRÚA

Quadratic Linear Control Application using a Minimum Order Observer in a Crane

RESUMEN

En este artículo se propone una metodología para el diseño de un controlador óptimo cuadrático sobre un sistema de una entrada y dos salidas, sometido a cambios en los parámetros de operación. Debido a que para el diseño del controlador por realimentación de variables de estado es necesario tener todas las variables de estado, se utiliza un observador de orden mínimo que estime las variables que no se pueden medir directamente.

PALABRAS CLAVES: Optimización, observador de orden mínimo, realimentación de estado, regulador lineal cuadrático.

ABSTRACT

A methodology for quadratic optimal control design over a Single Input Two Output System, with varying parameters is proposed. A minimum order observer is used for estimation of variables that cannot be measured directly, for state feedback control design.

KEYWORDS: Linear quadratic regulator, minimum order observer, optimization, state feedback.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño de controladores para un sistema puente grúa es un problema clásico de control óptimo y su solución se puede encontrar en muchos libros de texto de control automático [1-6], usualmente como una introducción al problema del péndulo invertido. El objetivo del controlador es maximizar la velocidad del carro mientras se minimiza el balanceo de la carga sostenida por la grúa. De acuerdo a [7-10] se observa que el diseño de controladores para el sistema puente grúa es un área de investigación activa. Entre los métodos de control aplicados sobre el puente grúa se encuentran esquemas de control inteligentes [11], controladores óptimos [12], y sistemas con planificación de la ganancia [13,14]. Sin embargo, es posible obtener un nivel aceptable de desempeño usando controladores lineales de ganancias fijas para variaciones de la carga.

En este artículo se propone un esquema de controlador óptimo lineal cuadrático (LQ) para el cálculo de las ganancias fijas. La utilización de este controlador es útil pues puede ser aplicado sobre sistemas SITO (*Single Input Two Outputs*) y sobre sistemas MIMO (*Multiple Input Multiple Output*). En la gran mayoría de sistemas físicos reales no se tiene acceso a todas las variables de estado por lo que es necesario utilizar observadores de estado. Si se tiene un observador que estime menos de las n variables de estado del sistema se tiene un observador de orden reducido. Si las variables de estado estimadas son las mínimas posibles se tiene un observador de orden

DIDIER GIRALDO

Ingeniero Electricista, MEE

Profesor Titular

Universidad Tecnológica de Pereira

dgiraldo@utp.edu.co

EDUARDO GIRALDO

Ingeniero Electricista, M.Sc.

Profesor Auxiliar

Universidad Tecnológica de Pereira

egiraldos@utp.edu.co

GRUPO DE INVESTIGACIÓN EN CONTROL AUTOMÁTICO

mínimo. En este artículo se utiliza un observador de orden mínimo para la estimación de las variables de estado que no pueden ser medidas directamente. El desarrollo del artículo se realiza de la siguiente forma: en la sección 2 se presenta el modelo matemático del sistema puente grúa. En la sección 3 se muestra el diseño del controlador LQ para el cálculo de las ganancias de realimentación. En la sección 4 se realiza el cálculo de las variables de estado usando un observador de orden mínimo. Finalmente, en la sección 5 se presentan los resultados sobre el sistema puente grúa.

2. MODELO MATEMÁTICO DEL SISTEMA

Considere el sistema de la figura 1. Existen diversos modelos matemáticos para este sistema. En este artículo se utilizará el modelo lineal de espacio de estado continuo propuesto en [13].

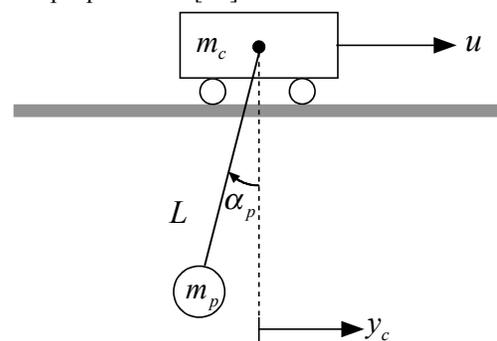


Figura 1. Modelo simplificado del puente grúa.

Para la ecuación de estado de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (1)$$

donde

$$x = \begin{bmatrix} y_c \\ \dot{y}_c \\ \alpha_p \\ \dot{\alpha}_p \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{posición del carro} \\ \text{velocidad del carro} \\ \text{ángulo de la grúa} \\ \text{velocidad angular de la grúa} \end{array} \quad (2)$$

u corresponde a la fuerza aplicada sobre el carro, y las matrices de espacio de estado están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\zeta_c}{m_c} & -\frac{m_p}{m_c}g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{g\zeta_p G_p}{m_c L} & -\frac{g}{L}\left(1 - \frac{m_p}{m_c}gG_p\right) & -2\zeta_p\sqrt{\frac{g}{L}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{G_c}{m_c} & 0 & -\frac{gG_p G_c}{m_c L} \end{bmatrix}^T$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad, L es la longitud de la grúa, ζ_p y ζ_c son los coeficientes de amortiguamiento de la grúa y el carro, G_p y G_c son ganancias positivas que corresponden a las ganancias de entrada de la grúa y el carro, y m_p y m_c son las masas de la grúa y el carro, respectivamente.

3. DISEÑO DEL REGULADOR LQ

Un puente grúa es un sistema SITO donde u es la entrada y donde y_c y α_p son las salidas. Se puede determinar la matriz de ganancia K para obtener la señal de control

$$u = -Kx \quad (4)$$

al minimizar la función de costo

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru) dt \quad (5)$$

donde Q es una matriz Hermítica semidefinida positiva y R es una matriz Hermítica definida positiva [16]. La función de costo (5) se puede obtener al resolver la ecuación de Ricatti [3] por medio de la ecuación (6) de forma algebraica

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0 \quad (6)$$

donde P es una matriz Hermítica definida positiva. Y donde la ganancia de realimentación K está dada por

$$K = R^{-1}B^T P \quad (7)$$

La selección de los valores de las matrices Q y R depende del comportamiento deseado para el desempeño del controlador [15] y son seleccionadas de acuerdo a la ecuación (8)

$$Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 \end{bmatrix} \quad (8)$$

donde q_i es de la forma

$$q_i = \frac{1}{(\Delta x_{i\max})^2} \quad (9)$$

con $\Delta x_{i\max}$ la desviación máxima alrededor del punto de operación para la variable de estado x_i . Y con la matriz R seleccionada de manera similar a (8) y (9).

4. OBSERVADOR DE ORDEN MÍNIMO

Para la aplicación del controlador es necesario estimar todas las variables de estado del sistema. Sin embargo, algunas de estas se pueden medir directamente, por lo que se necesita únicamente el cálculo de las variables de estado restantes. Para tal fin, se diseña un observador de orden mínimo. Sin embargo, es necesario verificar que el sistema cumpla la condición de observabilidad [1, 3].

Considere el sistema de la ecuación (1) con ecuación de salida

$$y = Cx \quad (10)$$

donde el vector de estado x puede ser particionado en dos partes. Las variables que se pueden medir denotadas como x_1 y las variables que no pueden ser medidas denotadas por x_2 . Entonces la ecuación de estado se puede escribir como

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} u \quad (11)$$

$$y = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

donde C_1 es una matriz cuadrada y no singular, y si las variables de estado corresponden con la salida, entonces C_1 es la matriz identidad.

La ecuación de salida

$$\dot{x}_1 - A_{11}x_1 - B_1u = A_{12}\tilde{x}_2 \quad (12)$$

relaciona las variables que pueden ser medidas directamente con las que no. Y las variables que no pueden ser medidas directamente se calculan como

$$\dot{\tilde{x}}_2 = A_{22}\tilde{x}_2 + A_{21}x_1 + B_2u \quad (13)$$

Si se tiene en cuenta que la dinámica de un observador completo está dada por

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + Bu + L(y - C\tilde{x}) \quad (14)$$

donde el término a la derecha de la ecuación corresponde al error de corrección en la estimación de \tilde{x} y L es el vector de ganancia del observador que se divide de forma $L = [L_1 \quad L_2]^T$, entonces la ecuación del observador se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= A_{22}\tilde{x}_2 + A_{21}x_1 + B_2u \\ &+ L_2(\dot{x}_1 - A_{11}x_1 - B_1u - A_{12}\tilde{x}_2) \end{aligned} \quad (15)$$

donde el término $y - C\tilde{x}$ de la ecuación (14) se reemplaza por la ecuación (12).

Reescribiendo la ecuación (15) se tiene

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 &= (A_{22} - L_2A_{12})\tilde{x}_2 + A_{21}x_1 + B_2u \\ &+ L_2(\dot{x}_1 - A_{11}x_1 - B_1u) \end{aligned} \quad (16)$$

Para eliminar el término \dot{x}_1 se reescribe la ecuación como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 - L_2\dot{x}_1 &= (A_{22} - L_2A_{12})\tilde{x}_2 + A_{21}x_1 + B_2u \\ &- L_2A_{11}x_1 - L_2B_1u \end{aligned} \quad (17)$$

agrupando términos comunes la ecuación (17) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_2 - L_2\dot{x}_1 &= (A_{22} - L_2A_{12})\tilde{x}_2 + (A_{21} - L_2A_{11})x_1 \\ &+ (B_2 - L_2B_1)u \end{aligned} \quad (18)$$

Si se define $\tilde{\eta} = \tilde{x}_2 - L_2x_1$ el observador de orden mínimo se puede escribir como

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\eta}} &= (A_{22} - L_2A_{12})\tilde{\eta} \\ &+ [(A_{22} - L_2A_{12})L_2 + A_{12} - L_2A_{11}]x_1 \\ &+ (B_2 - L_2B_1)u \end{aligned} \quad (19)$$

y donde \tilde{x}_2 se puede estimar a través de $\tilde{x}_2 = \tilde{\eta} + L_2x_1$.

Si consideramos la ecuación (13) y la ecuación (17) se puede escribir la ecuación del error como

$$\dot{x}_2 - \dot{\tilde{x}}_2 = (A_{22} - L_2A_{12})(x_2 - \tilde{x}_2) \quad (20)$$

De la ecuación (19) y (20) se tiene que, al igual que en un observador de orden completo, la dinámica del observador está determinada por los valores propios de la matriz $[A_{22} - L_2A_{12}]$. Y donde L_2 se determina de

forma que el error de estimación desaparezca más rápido comparado con la dinámica del sistema de control. En la figura 2 se presenta el esquema para el observador de orden mínimo.

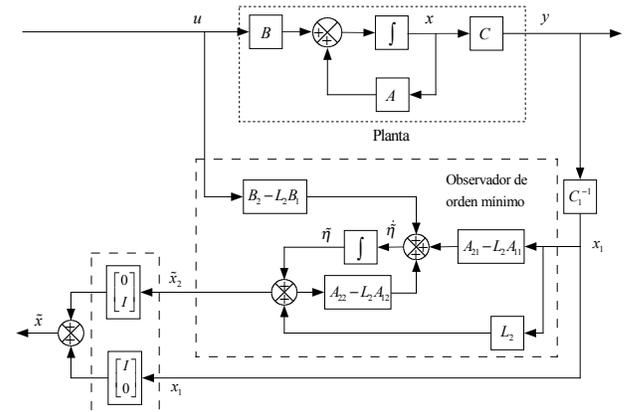


Figura 2. Esquema del observador de orden mínimo.

5. RESULTADOS

Se presenta a continuación el diseño del controlador para el sistema de puente grúa usando el observador de orden mínimo para la estimación de las variables de estado, y el control óptimo cuadrático para el cálculo del vector de realimentación K , donde la señal de control está dada por

$$u = -K\tilde{x} \quad (21)$$

Al incluir el observador de orden mínimo para el diseño de un sistema con regulación se tiene el esquema general de la figura 3.

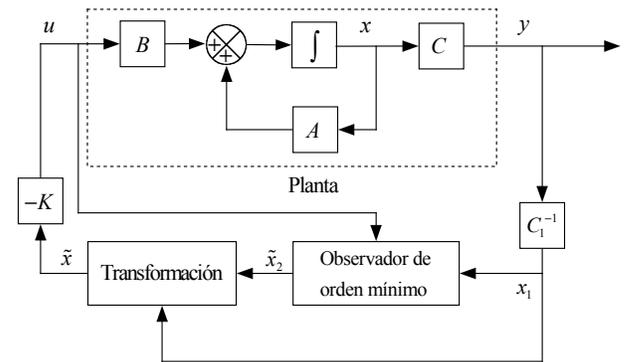


Figura 3. Esquema del regulador.

Es necesario verificar inicialmente que el sistema sea controlable y que las variables que no son medidas directamente puedan ser estimadas. Se calcula entonces el rango de la matriz de controlabilidad para el sistema completo y el rango de la matriz de observabilidad para el sistema reducido, como sigue

$$C_o = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B] \quad (22)$$

donde C_o es la matriz de controlabilidad y n es el orden del sistema. Y

$$O_b = \begin{bmatrix} A_{12} \\ A_{12}A_{22} \\ \vdots \\ A_{12}A_{22}^{m-1} \end{bmatrix} \quad (23)$$

donde O_b es la matriz de observabilidad para el sistema reducido, y m es el número de variables que son estimadas.

Con el fin de que el sistema siga un valor de referencia se agrega en el sistema de control un servo como se muestra en la figura 4, donde k_1 denota las ganancias del vector de ganancias de realimentación K que están relacionadas con el vector de salida y .

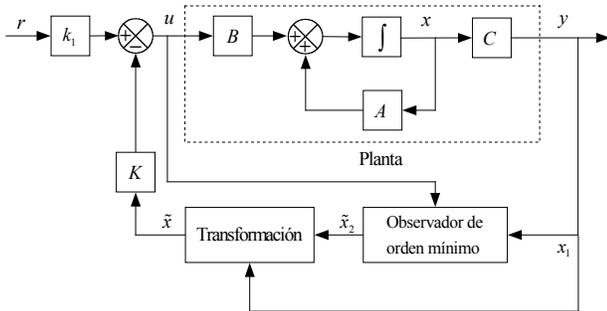


Figura 4. Esquema del controlador.

De acuerdo a [7] se tiene que la matriz de entrada y la matriz de realimentación de la ecuación (3) están dadas por

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15.56 & -0.0038 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 142.28 & -30.675 & -0.0686 \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$B = [0 \quad 26.667 \quad 0 \quad -243.91]^T$$

y con C_1 que corresponde a la matriz identidad. Se utiliza el observador de orden mínimo para estimar las variables \dot{y}_c y $\dot{\alpha}_p$. Se escribe entonces el vector de estado como

$$x = \begin{bmatrix} y_c \\ \alpha_p \\ \dot{y}_c \\ \dot{\alpha}_p \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{posición del carro} \\ \text{ángulo de la grúa} \\ \text{velocidad del carro} \\ \text{velocidad angular de la grúa} \end{matrix} \quad (25)$$

se reescribe la ecuación de estado

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.0038 & -15.556 & 0 \\ 0 & -30.675 & 142.28 & -0.0686 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 26.667 \\ -243.91 \end{bmatrix} u \quad (26)$$

y se diseña el observador de la figura 2.

En la figura 5 se muestra la respuesta del sistema cuando no se tiene una restricción para el ángulo.

Para calcular el vector de ganancias K se seleccionan las matrices Q y R de la ecuación (5) de la forma

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.1 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$R = 1$$

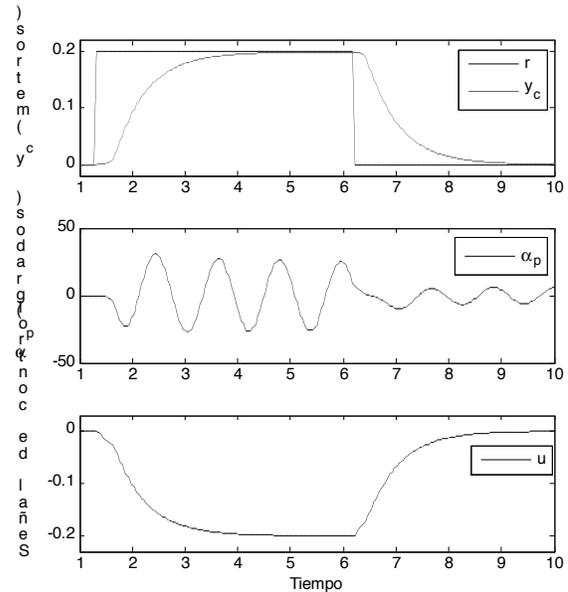


Figura 5. Respuesta del sistema sin restricción en el ángulo.

En la ecuación (27) se consideran en la matriz Q restricciones para el ángulo α_p y para la velocidad angular $\dot{\alpha}_p$. Los valores de la diagonal en la matriz Q se seleccionan de acuerdo a las variables que se quieran penalizar de acuerdo al criterio de la ecuación (9). La matriz de ganancias de realimentación obtenidas para los valores dados de Q y R es

$$K = [1 \quad -1.2851 \quad 0.5032 \quad -0.2209] \quad (28)$$

Los polos para el observador de orden mínimo se seleccionan de forma que responda más rápido que el sistema de control. Para este caso los polos del

observador se seleccionan en -120 y -100 . Para este caso se observa el resultado de la figura 6.

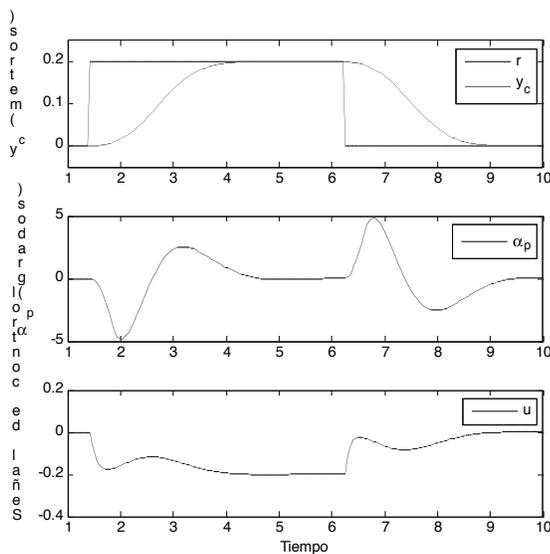


Figura 6. Respuesta del sistema con restricción en el ángulo.

Se observa que el tiempo de establecimiento es el mismo que para el caso mostrado en la figura 5, pero la oscilación en el ángulo en el segundo caso no supera los 10 grados.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La aplicación de un controlador óptimo cuadrático con las etapas de regulación y seguimiento, permite encontrar un buen desempeño en sistemas multivariables. En el caso del puente grúa se consiguió una reducción considerable en la oscilación de la grúa con el mismo tiempo de respuesta que el sistema sin restricciones.

Adicionalmente, la estimación de las variables de estado con un observador de orden reducido (mínimo) permite utilizar sistemas de control basados en realimentación por variables de estado estimando únicamente las variables que no pueden ser medidas directamente.

7. BIBLIOGRAFÍA

[1] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, New Jersey: Prentice Hall, 1997.

[2] K. Ogata, *Sistemas de control en tiempo discreto*, New Jersey: Prentice Hall, 1996.

[3] K. Astrom, and B. Wittenmark, *Computer controlled systems: Theory and Design*, Prentice Hall, 2002.

[4] C. Chen, *Analog and Digital Control System Design: Transfer Function, State Space, and Algebraic Methods*, Oxford University Press, 1993.

[5] B. Kuo, *Automatic Control Systems*, Prentice Hall, 1991.

[6] G. Franklin, J. Powell, and L. Workman, *Digital Control of Dynamic Systems*, Addison-Wesley, 1997.

[7] Z. N. Massoud, and M. F. Daqaq, "A graphical approach to input Shaping Control Design for Container Cranes with Hoist," *IEEE Trans. On Control Systems*, vol. 14, N. 6, pp. 1070-1077, Nov. 2006.

[8] C. Li, C. Y. Lee, and K. H. Cheng, "Pseudoerror-Based Self-Organizing Neuro-Fuzzy System," *IEEE Trans. On Fuzzy Systems*, vol. 12, N. 6, pp. 812-819, Dec. 2004.

[9] I. M. Ross, and F. Fahroo, "Pseudoespectral Methods for Motion Planning of Differentially Flat Systems," *IEEE Trans. On Automatic Control*, vol. 49, N. 8, pp. 1410-1413, Aug. 2004.

[10] T. Matsuo, R. Yoshino, H. Suemitsu, and K. Nakano, "Nominal Performance Recovery by PID+Q Controller and Its Application to Antisway Control of Crane Lifter With Visual Feedback," *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, vol. 12, N. 1, pp. 156-166, Jan. 2004.

[11] M. J. Agostini, G. G. Parker, and H. Schaub, "Generating Swing-Suppressed Maneuvers for crane Systems With Rate Saturation," *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, vol. 11, N. 4, pp. 471-481, Jul. 2003.

[12] K. Takagi, and H. Nishimura, "Control of a Jib-Type Crane Mounted on a Flexible Structure," *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, vol. 11, N. 1, pp. 32-42, Jan. 2003.

[13] G. Corrigan, A. Giua, and G. Usai, "An Implicit Gain-Scheduling Controller for Cranes," *IEEE Trans. On Control Systems Technology*, vol. 6, N. 1, pp. 15-20, Jan. 1998.

[14] A. Martinen, J. Virkkunen, and R. T. Salminen, "Control Study with a Pilot Crane," *IEEE Trans. On Education*, vol. 33, N. 3, pp. 298-306, Aug. 1990.

[15] Z. Wang, and B. W. Surgenor, "A problem With the LQ Control of Overhead Cranes," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 128, pp. 436-440, Jul. 2006.

[16] J. Moore, and B. Anderson, *Optimal Control: Linear quadratic methods*, Prentice Hall, 1989.