MÉTODO DE FRONTERA DE ECUACIONES INTEGRALES PARA LA SOLUCIÓN DEL PROBLEMA MIXTO DE LA ECUACIÓN ESTACIONARIA DEL CALOR

Boundary element method applied to the solution of stationary heat problem

RESUMEN
En este artículo se pretende dar solución al problema de frontera mixto de Dirichlet y Newmann para la ecuación del estado estacionario del calor utilizando el método de frontera de ecuaciones integrales. Este método conlleva a un sistema de ecuaciones integrales que puede resolverse con cualquier método numérico.

PALABRAS CLAVES: *Fredholm, funciones de Green, método de frontera de ecuaciones integrales.*

ABSTRACT
In this paper the solution for the boundary problem of Dirichlet and Newmann for Laplace equation utilizing the integral boundary element method is given. Applying this method we obtain a system of integral equations to be resolved with any numerical method.

KEYWORDS: *Fredholm , Green's functions, Boundary element method.*

JOSÉ RODRIGO GONZÁLEZ GRANADA
Matemático, Ph.D.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
jorodryy@utp.edu.co

ABEL ENRIQUE POSSO AGUDELO
Matemático, Ph.D
Profesor Titular
Universidad Tecnológica de Pereira
posoa@utp.edu.co

CARLOS MARIO ESCOBAR CALLEJAS
Ingeniero Civil, M.Sc
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
ccescobar@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los métodos para la solución de problemas de frontera de la ecuación estacionaria del calor es el método de las funciones de Green.
Como es sabido la obtención de las funciones de Green es complicado y sólo se conocen funciones explícitas para un numero limitado de regiones sencillas que presenten algún tipo de simetría [3-7].
En este trabajo para la solución del problema de frontera mixto se utilizará el método de frontera de ecuaciones integrales [1, 2].

2. CONCEPTOS PRELIMINARES

Consideremos la ecuación bidimensional del estado estacionario

$$\Delta \vec{u} = div(\nabla u) = 0. \quad (1)$$

Un problema de valor de frontera interior requiere que se resuelva (1) en la región D delimitada por una curva cerrada C sujeta a las siguientes condiciones

$$\phi = f_1(x,y), \quad para \quad (x,y)\in L$$
$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = f_2(x,y), \quad para \quad (x,y)\in \Gamma, \quad (2)$$

Donde las funciones f_1 y f_2 son dos funciones conocidas, las curvas L y Γ no se intersecan y además $L \cup \Gamma = C$ (figura 1).

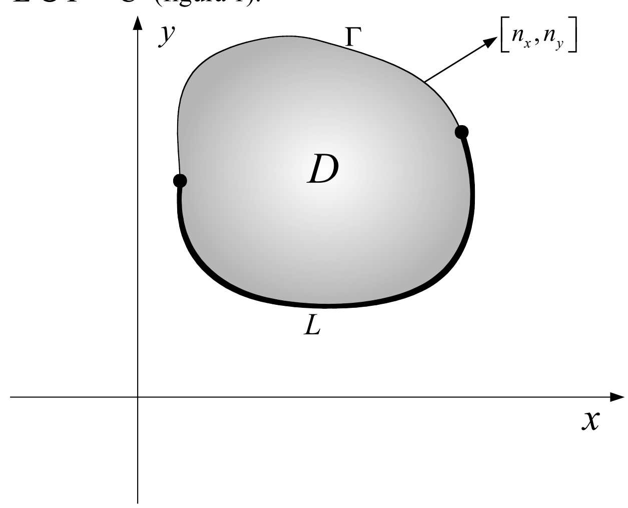

Figura 1. Partición de la frontera C.

La derivada normal en (2) está definida como

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \phi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

aquí n_x y n_y son las componentes del vector normal a C.

Fecha de Recepción: 06 Septiembre de 2007
Fecha de Aceptación: 04 Diciembre de 2007

Las condiciones (2) se asumen como bien planteadas, es decir que el problema de valor inicial posee una única solución $\phi(x,y)$.

Para el problema de conducción de calor se asume que $\phi(x,y)$ denota la temperatura del estado estable de un cuerpo sólido isotropito.

En términos generales es complicado resolver el problema (1)-(2) debido a la complejidad de la región D. Las soluciones exactas pueden ser halladas para regiones simples, para regiones con geometrías más complejas es necesario utilizar métodos numéricos para su solución.

En este trabajo se estudiará la solución del problema (1)-(2) utilizando el método de frontera de ecuaciones integrales.

Sea $\phi_1 = \Phi(x,y;\xi,\eta)$ una solución fundamental [3, 5] y $\phi_2 = \phi$, con ϕ la solución del problema de frontera interior. Ya que $\Phi(x,y;\xi,\eta)$ no está bien definida en el punto (ξ,η) es válida sólo si (ξ,η) no se encuentra sobre la región $D \cup C$, es decir

$$\int_C \left[\phi(x,y)\frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi(x,y;\xi,\eta)\right)\right] ds(x,y)$$
$$-\int_C \left[\Phi(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}(\phi(x,y))\right] ds(x,y) = 0, \text{ para}$$

$(\xi,\eta) \in D \cup C$.

Para el caso que (ξ,η) se encuentre en el interior de D la ecuación

$$\int_C \left[\phi_2(x,y)\frac{\partial}{\partial n}(\phi_1(x,y)) - \phi_1(x,y)\frac{\partial}{\partial n}(\phi_2(x,y))\right] ds(x,y) = 0,$$

es válida si C se asume como $C \cup B_\varepsilon$, donde B_ε es la bola de radio ε y centro en (ξ,η) (figura 2)

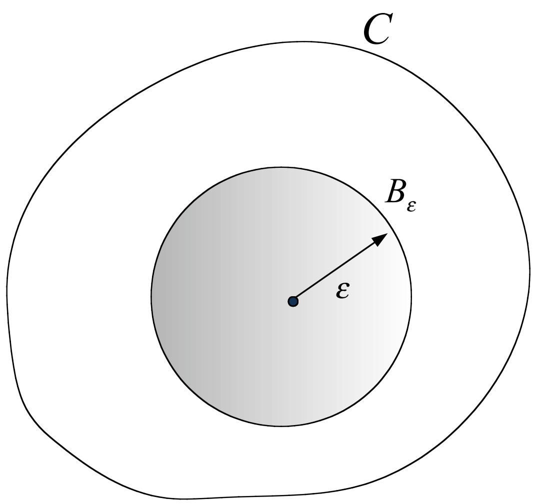

Figura 2. Bola de radio ε y centro en (ξ,η).

así para C y B_ε es posible escribir

$$\int_{C\cup B_\varepsilon} \left[\phi(x,y)\frac{\partial}{\partial n}\left(\Phi(x,y;\xi,\eta)\right)\right] ds(x,y)$$
$$-\int_{C\cup B_\varepsilon} \left[\Phi(x,y;\xi,\eta)\frac{\partial}{\partial n}\left(\phi(x,y)\right)\right] ds(x,y) = 0,$$

es decir

$$\int_C \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] ds = -\int_{B_\varepsilon} \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] ds, \text{ para}$$

$\varepsilon > 0$ de tal forma que B_ε se encuentre contenida en C.

Así, si asumimos que $\varepsilon \to 0^+$ en la última expresión, se obtiene

$$\int_C \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] ds = -\lim_{\varepsilon\to\varepsilon\to 0^+} \int_{B_\varepsilon} \left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\Phi - \Phi\frac{\partial}{\partial n}\phi\right] ds.$$

2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Analicemos el problema de distribución de temperatura estacionario (1) en una lámina de pared delgada homogénea D, de forma arbitraria (figura 3). La frontera está dada de la forma $C = \Gamma + L$.

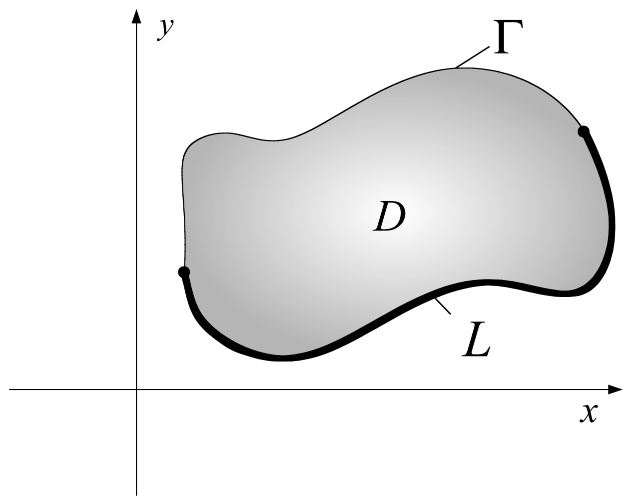

Figura 3. Partición de la frontera para la lámina de pared delgada.

En una parte de la frontera Γ es dada la función u en la otra parte L es dada su derivada normal $\dfrac{\partial u}{\partial n}$.

2.2 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Para la función armónica $u(x,y)$ en el punto N_o, de la región D, se cumple que la representación integral está dada de la siguiente manera

$$U(N_o) = \frac{1}{2\pi}\int_C \frac{\partial u}{\partial n}\ln\left(\frac{1}{r_{N_o p}}\right) ds$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C u\frac{\cos\left(\overline{r}_{N_op},\overline{n}_p\right)}{r_{N_op}}ds, \qquad (3)$$

donde $p(\xi,\eta)$ es el punto actual en la frontera $C=\Gamma+L$; $\overline{r}_{N_op}$ es la distancia entre el punto N_o y p; $\left(\overline{r}_{N_op},\overline{n}_p\right)$ es el ángulo entre los vectores $\overline{N_op}$ y la normal exterior a la frontera $\overline{n}_p$.

La transición desde el punto N_o hasta el punto N, que pertenece a la frontera C está dado de la forma

$$U(N)=\frac{1}{2\pi}\int_C\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\left[\int_C u_p\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds+\pi u(N)\right],$$

es decir en la frontera C se cumple la relación

$$U(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_C\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_C u_p\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds, \qquad (4)$$

donde β es el ángulo entre $\overline{n}_p$ y el vector $\overline{NP}$.

Si tenemos en cuenta que en Γ,

$$u|_\Gamma=f,$$

y sobre L

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_L=g,$$

con f y g funciones conocidas, obtenemos que para cualquier posición del punto N en la frontera C las siguientes integrales son funciones conocidas

$$\frac{1}{\pi}\int_{P\in L}g(P)\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds_p=G(N);$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{P\in\Gamma}f(P)\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds_p=F(N).$$

Utilizando la fórmula (4) para los puntos N, pertenecientes a L y Γ, obtenemos un sistema de ecuaciones integrales dependientes de las funciones desconocidas

$u|_\Gamma=f^*$, $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_L=g^*$ para $N\in\Gamma$.

$$f(N)=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma g^*(P)\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds_p$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_L f^*(P)\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds_p+G(N)+F(N),$$

para $N\in L$. (5)

$$f^*(N)=\frac{1}{\pi}\int_\Gamma g^*(P)\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds_p$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_L f^*(P)\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds_p+G(N)+F(N).$$

La determinación de las funciones desconocidas del sistema (5) junto con las condiciones de frontera $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_L=g$ y $u|_\Gamma=f$ dan la posibilidad de encontrar el valor de la temperatura u al igual que el campo de temperaturas en cualquier punto de la región D haciendo uso de (3).

2.3 CONCLUSIONES

El método descrito anteriormente puede utilizarse para la solución de los principales problemas de Dirichlet y Newmann (en la frontera C es dada la función o la derivada normal exterior). Utilizando el método de frontera de ecuaciones integrales se reduce a la solución de las ecuaciones integrales correspondientes del tipo Fredholm. Es decir:

a) En el problema de Dirichlet la función desconocida $\left(\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)_L=f^*$ se determina de la ecuación integral

$$\frac{1}{\pi}\int_C f^*\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds_p+\frac{1}{\pi}\int_C f\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds_p-f=0.$$

b) En el problema de Newmann para $u|_C=g^*$ se cumple la ecuación de Fredholm de segundo orden

$$g^*=\frac{1}{\pi}\int_C g\ln\left(\frac{1}{r_{Np}}\right)ds_p$$
$$+\frac{1}{\pi}\int_C g^*\frac{\cos\beta}{r_{Np}}ds_p.$$

3. BIBLIOGRAFÍA

[1] F. Rizzo, El método de frontera de ecuaciones integrales, Moscú: Mir, 1978.

[2] S. L. Sobolev, Ecuaciones de la física matemática, Moscú: Nauka, 1966.

[3] V.P. Mijaylov. Ecuaciones en derivadas parciales, Nauka, Moscú 1976.

[4] L. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, Providence, 1998.

[5] J.R. González, A.E. Posso, Método del promedio esférico en la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo hiperbólico. Scientia et Technica Ano XII, No 32, Diciembre de 2006. UTP.

[6] John Fritz. Partial Differential Equations 4th ed., Springer-Verlag, New York, 1982.

[7] Robert C. McOwen Robert. Partial Differential Equations: methods and applications, Prentice Hall, New Jersey 1996.