

## APLICACIÓN DEL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS AL PROCESO DE COMPACTACIÓN DE POLVOS METÁLICOS.

### RESUMEN

El proceso de metalurgia de polvos posee dos grandes ventajas la primera tiene que ver con la calidad de conformación del producto *Near Net Shape* y la segunda con el control de microestructura. Teniendo en cuenta la primera, los modelos matemáticos de cálculo de parámetros de carga y fluencia del material se explican a través de los diferentes tipos de mecanismos que ocurren durante el proceso de compactación de los polvos: fluencia y acomodación de las partículas, deformación plástica por carga estructural y deformación por carga térmica. El presente documento refleja los resultados obtenidos en la utilización del método de los elementos finitos aplicado a un modelo de plasticidad rigidizada, teniendo en cuenta la densificación y crecimiento de grano durante la sinterización. El desarrollo es planteado con el objeto de estimar la variación de la densidad y deformación equivalente del modelo.

**PALABRAS CLAVES:** P/M, elementos finitos, medios porosos, sinterización.

### ABSTRACT

*The process of powder metallurgy has two great advantages the first one has to do with the quality of conformation of the product Near Net Shape and the second has to do with the microstructure control. Considering the first, the mathematical models of calculation of load parameters and flow of the material are explained through the different types from mechanisms that happen during the process of compaction powder: flow and accommodation of particles, plastic deformation by structural load and deformation by thermal load. The present document reflects the results obtained in the use of the method of the finite elements applied to a model of rigid plasticity, considering the densification and growth of grain during the sintering. The development considers the variation of the density and equivalent deformation of the model.*

**KEYWORDS:** *finite element, porous media, sintering*

### 1. INTRODUCCIÓN

Los modelos que describen el proceso de densificación ocurrido en la etapa de compactación como resultado de una presión externa no son completos en el sentido de la descripción de todos los fenómenos que ocurren en el proceso de fabricación de piezas. Es de esta manera que si se desea tener en cuenta el proceso de sinterización se debería pensar en realizar el análisis de un problema acoplado.

Ahora bien, el proceso de compactación de polvos puede ser descrito en su etapa de sinterización a través del desarrollo de las siguientes fases:

*a. Etapa temprana de crecimiento del cuello*, en esta primera etapa de sinterización en estado sólido, los cuellos de las interpartículas son formados. Este proceso esta basado en la acción de los esfuerzos normales y tangenciales a nivel micro.

*b. Etapa de densificación y crecimiento de grano*, en la segunda etapa las partículas están aún conectadas por contactos aislados. Al contrario de la primera, los campos

de difusión de los cuellos están conectados y se traslapan y la superficie del poro esta cercana al equilibrio.

*c. La etapa final con el cerramiento de los espacios entre poros*, esta etapa está conectada con los procesos de recristalización. La cinética de recristalización en cerámicos y metales es diferente: en el metal los nanocristales crecen en minutos, mientras que, en el caso de los cerámicos, el proceso de los nanocristales podría durar horas. Esta etapa no esta conectada con los cambios de densidad relativa.

Teniendo esto en mente, se plantea el desarrollo de una aplicación apartir de las teorías convencionales de plasticidad en donde los aportes realizados por Kuhn [2] así como Shima en [3] y Doraivelu [4] permiten aplicar la definición de un criterio de fluencia con el objeto de determinar el estado general de esfuerzos.

Ahora bien que como el modelo plantea la densificación y crecimiento de grano durante la sinterización, es importante tener en cuenta que la deformación inducida

### PEDRO J. DIAZ GUERRERO

Ingeniero Mecánico, M. Sc.  
 Profesor Auxiliar  
 Grupo de Investigación en Diseño y  
 Procesos de Manufactura. (DPM)  
 Escuela de Ingeniería Mecánica.  
 Universidad Industrial de Santander  
[pjdiaz@uis.edu.co](mailto:pjdiaz@uis.edu.co)

por las fuerzas capilaridad es desarrollada al interior del cuerpo durante el proceso de compactación<sup>1</sup>. De esta manera se puede establecer una primera variable que represente la variación de la deformación de sinterización

$$d\varepsilon_s = \frac{\sigma_s}{3k} \quad (1)$$

Donde  $k$  representa *el módulo de elasticidad*, y  $\sigma_s$  el tensor de esfuerzos en el material sinterizado tal como lo plantea [10]. La naturaleza de esta formulación esta basada en los mecanismos de difusión y capilaridad a un nivel micro. Debido al campo de esfuerzos capilares efectivos, la porosidad de los polvos disminuye (se incrementa la densidad relativa). En esta etapa la superficie de tensión entre partículas actúa de manera tangencial y puede ser estimada como

$$F_c \cong \gamma_d DR \quad (2)$$

Donde  $D$  representa el diámetro promedio de la partícula,  $R$ , la densidad relativa del material poroso compactado y  $\gamma_d$  la energía superficial promedio.

Ahora es necesario caracterizar el modelo de compactación de materiales porosos que requiere en primera instancia de una función de fluencia que tome en cuenta el cambio de volumen del medio poroso [3]. Es por esto que el flujo de material poroso depende del primer invariante del tensor de deformación. Entre otros Doraivelu en [4] plantea la utilización de una función de fluencia para materiales porosos que involucra el segundo invariante del tensor desviador de tensiones así como el primer invariante del tensor de tensiones, ahora que es importante recordar que las fuerzas que controlan la reducción de los poros están representadas a través del un tensor de esfuerzos de sinterización  $\sigma_s$  de manera que el tensor de esfuerzos estará representado por uno equivalente

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^s \quad (3)$$

De manera que la función de fluencia expresada por [4] debe ser desarrollada teniendo en cuenta el esfuerzo al cual son sometidos los poros del material, de manera que la función quedaría

$$Y_R = \sqrt{\delta} Y_0 = [AJ_2 + BI_1^2]^{1/2} \quad (4)$$

Así como los valores de las constantes establecidas [4] donde para este caso,

$$A = 2 + \nu, \quad B = \frac{1 - 2\nu}{3}, \quad \delta = (2R^2 - 1) \quad (5)$$

Ello teniendo en cuenta que los invariantes han de ser modificados por la Ec. ( 3 ), si se tiene que el primer invariante  $I_1$  sería reemplazado por su equivalente

$$\bar{I}_1 = I_1 + s \quad (6)$$

Donde  $s$ , representa un parámetro que depende de la densidad relativa del material poroso. De manera que la formulación para la función de fluencia teniendo en cuenta [4], sería modificada

$$Y_R = \sqrt{\delta} Y_0 = [AJ_2 + B\bar{I}_1^2]^{1/2} \quad (7)$$

## 2. MODELO DE CARGA

Ahora bien, planteada la función de fluencia es necesario determinar el valor del potencial plástico ó dicho de otra manera, *la ley de flujo*, y con ella establecer la variación de la deformación con el fin de determinar el trabajo de deformación plástica, de manera que,

$$d\varepsilon_{ij} = d\lambda \frac{\partial Y_R}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8)$$

Se determina el valor de la variación de deformación volumétrica reemplazando Ec. ( 5 ) en Ec. ( 8 )

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_{kk} = d\lambda [(2 + R^2)\sigma_{ij} - 3R^2\sigma_m] \quad (9)$$

Ahora bien, este valor de variación permite expresar la deformación del material base como un valor de deformación equivalente de manera que el trabajo plástico realizado puede ser expresado como,

$$dw_p = \sigma_{ij} R d\bar{\varepsilon} = \sigma_{ij} R d\lambda \frac{\partial Y_R}{\partial \sigma_{ij}} \quad (10)$$

Esta expresión del trabajo plástico, permite expresar la variación de la deformación plástica equivalente del material poroso  $d\bar{\varepsilon}$  en términos de  $d\varepsilon_{ij}$ . De la Ec. ( 10 ), se obtiene una expresión para determinar el factor de proporcionalidad  $d\lambda$

$$d\lambda = \frac{d\bar{\varepsilon}}{2Y_R} + \frac{d\bar{\varepsilon}}{6Y_R^2} s \quad (11)$$

Hasta el momento se han planteado las ecuaciones constitutivas [4], que permiten establecer el comportamiento del material bajo unas determinadas condiciones iniciales y de carga.

## 3. EL MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

Aplicando el principio de los trabajos virtuales [7,8] se plantea la sumatoria de los trabajos plástico, de fricción así como el generado por las cargas externas aplicadas en

<sup>1</sup> Un mecanismo de micro nivel representa el factor básico para la redistribución de la densidad relativa en el cuerpo ya deformado.

el proceso de compactación. El trabajo de fricción depende de las fuerzas tangenciales que actúan entre las superficies elementales, así como el esfuerzo de corte en las fronteras el cual es igual al esfuerzo de corte multiplicado por el factor de fricción  $\mu$ , de esta manera el esfuerzo de fluencia por corte esta representado por la función de fluencia asumida en la Ec. ( 4 ), y se puede expresar de la siguiente manera,

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu Y_R \tag{12}$$

Para establecer las condiciones iniciales y de frontera se plantea que  $n_j$  son las componentes del vector de tracción normal a la superficie  $S_p$  en consideración al punto  $x_i, p_i$  sobre la superficie,

$$\sigma_{ij} n_j = p_i \tag{13}$$

De aquí que el balance de los trabajos realizados sería,

$$\int_V \sigma d\varepsilon_0 R dV + \int_{S_f} \tau_i v_i - \int_{\Omega} \sigma d\varepsilon_s dV = \int_{S_p} p_i v_i ds \tag{14}$$

Donde  $V$  es el volumen del cuerpo deformado,  $S_f$  es la superficie de fricción y  $S_p$  la superficie de tracción. Tal como lo plantea [8], se pueden expresar las componentes de la variación de la deformación como una función de las velocidades de los puntos nodales, de manera que

$$\{d\varepsilon\} = [\partial][N]^T \{q^e\} = [B]\{q^e\} \tag{15}$$

Por su parte la matriz de funciones de forma  $[N]$  aproxima los valores de la velocidad en los puntos nodales de manera que:

$$d\varepsilon_v = \{d\varepsilon\}^T \{e\} = \{q^e\}^T [B]^T \{e\} = \{e\}^T [B]\{q\}^T = \{C\}^T \{q^e\} \tag{16}$$

Ahora que reemplazando el valor de la Ec. ( 15 ) en la Ec. ( 16 ) se tiene que el valor de la expresión para variación de la deformación equivalente,

$$d\bar{\varepsilon} = \left( \frac{2}{A} \{d\varepsilon\} [I_1]^T \{d\varepsilon\} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{6B} + \frac{1}{A} \right) \{d\varepsilon\}^T \{e\} \{e\}^T \{d\varepsilon\} \right)^{1/2} = (\{d\varepsilon\}^T [D] \{d\varepsilon\})^{1/2} \tag{17}$$

Donde la matriz  $D$  es una matriz que representa el comportamiento del material tal como lo plantea [9], ahora que reemplazando Ec. ( 15 ) en Ec. ( 17 ) se tiene,

$$d\bar{\varepsilon} = (\{q^e\}^T [B]^T [D] [B] \{q^e\})^{1/2} \tag{18}$$

Ahora que si se asume un modelo 2D que esta sometido a condiciones de deformación plana se puede establecer que,

$$\int_V \frac{\sigma_{ij}}{d\varepsilon} \{q^e\}^T [N][B]^T [D][B][N]^T \{q^e\} dV - \int_{\Omega} \frac{S}{3} \{C\}^T \{q^e\} dv + \int_{S_f} \{\bar{\tau}^e\}^T \{q^e\} dS = \int_{S_p} \{w\}^T [N] \{q^e\} dS \tag{19}$$

Donde la matriz de rigidez elemental esta dada por,

$$[K^e] = \int_V \frac{\sigma_{ij}}{d\varepsilon} [N][B]^T [D][B][N]^T dV \tag{20}$$

Y los vectores de término independiente,

$$\begin{aligned} \{f^e\} &= \int_{S_p} \{w\} [N]^T dS \\ \{f_\tau^e\} &= - \int_{S_f} [N]^T \{\tau\} dS \\ \{f_s^e\} &= \int_{\Omega} \frac{S}{3} \{C\} dV \end{aligned} \tag{21}$$

De esta manera se podría plantear una formulación matricial equivalente a la realizada a través de los trabajos virtuales en la Ec. ( 14 )

$$[K^e] \{q^e\} = \{f^e\} + \{f_\tau^e\} + \{f_s^e\} \tag{22}$$

#### 4. EL MÉTODO UTILIZADO PARA LA SOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES

El objeto que realiza la solución del sistema de ecuaciones<sup>2</sup> puede ser expresado a través de un conjunto tales que  $R(d)=f(d)$  donde  $R(d)$  es una función de  $d$  que denota la reacción del modelo a las cargas dadas por  $f$  el cual puede ser una función de  $d(f(d))$ . Para poder resolver este sistema de ecuaciones es necesario definir un residuo de prueba,

$$r(d) = R(d) - f(d) = 0 \tag{23}$$

Para poder resolver este nuevo sistema de ecuaciones  $r(d)$  se utiliza un proceso iterativo construyendo una sucesión de residuos  $r^0, r^1, r^2, \dots, r^k, r^{k+1}$  que convergen a 0. Si se desarrolla  $r^{k+1}$  en series de Taylor se tiene que

$$r^{k+1} \cong r^k + \left. \frac{dr}{dd} \right|_k \Delta d^k + \dots = 0 \tag{24}$$

De manera que,

<sup>2</sup> KRATOS, software desarrollado en el CIMNE para la solución de problemas acoplados a través del método de los elementos finitos. [www.cimne.upc.es/kratos](http://www.cimne.upc.es/kratos)

$$\left. \frac{dr}{dd} \right|_k \Delta d^k = -r^k \tag{25}$$

Representa un sistema de ecuaciones  $r(d)$  que puede ser resuelto por cualquiera de los métodos conocidos para este propósito.

$$\left. \frac{dr}{dd} \right|_k \tag{26}$$

Es la matriz jacobiana del sistema y se presenta por  $J$ . esquema de iteración está definido por

$$\begin{aligned} d^{k+1} &= d^k + \delta d^k \\ r^{k+1} &= r(d^{k+1}) \\ J^{k+1} &= J(d^{k+1}) = \left. \frac{dr}{dd} \right|_{d^{k+1}} \end{aligned} \tag{27}$$

La convergencia de la solución es alcanzada cuando  $\Delta d^{k+1}$  es muy pequeño en comparación con  $d^{k+1}$  y  $r^{k+1}$  es muy pequeño en comparación con  $f(d^{k+1})$  de manera que un sistema de ecuaciones requiere un lazo control que en cada iteración resuelva un sistema de ecuaciones de la siguiente forma,

$$J \cdot \Delta d = -r = f(d) - R(d) \tag{28}$$

**5. RESULTADOS DEL MODELO**

El desarrollo de la aplicación numérica se realiza en el proceso de compactación de un cilindro como el que se muestra en la

Figura No. 1 para una densidad relativa inicial de 0.7 y un coeficiente de fricción de 0.55.

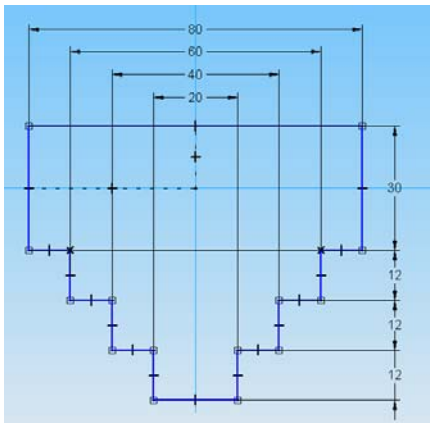


Figura No. 1a. Modelo del pin a compactar

El modelo de deformación plana plantea la utilización de elementos cuadrilaterales lineales de deformación plana de 4 nodos con dos grados de libertad por nodo. En la Figura No. 2 se observa la variación de la densidad relativa en la totalidad del modelo 2D reducido, luego de haberse deformado un 10 % en su altura, así como en la Figura No. 3 los valores de deformación equivalente

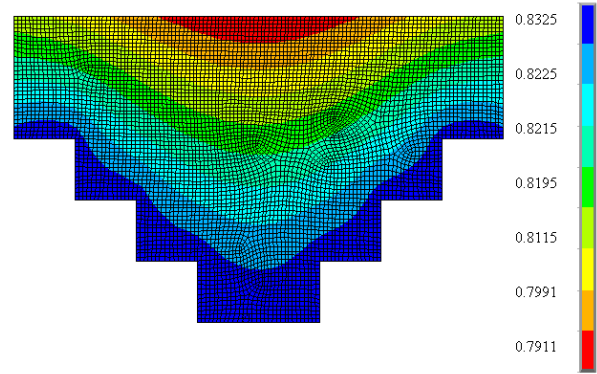


Figura No. 2 Variación de la densidad relativa después de la reducción de un 10% de la altura.

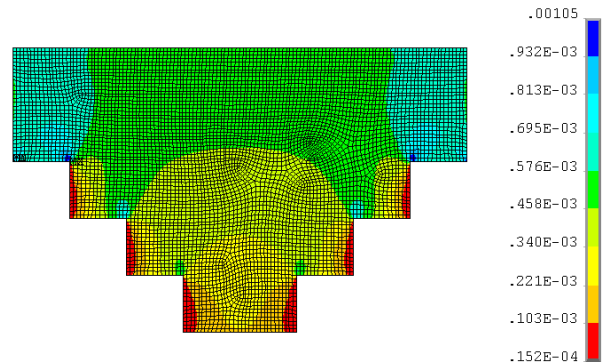


Figura No. 3 Distribución de la deformación equivalente para una reducción del 10% de la altura.

El desarrollo del modelo fue llevado a cabo a través de una librería de objetos en C++ llamada KRATOS<sup>3</sup>, que por el momento es de dominio público y que permitió llevar a cabo la programación de las funciones de forma para los elementos cuadrilaterales de deformación plana y tal como lo indican las figuras existe una relación directa entre la densidad relativa y la reducción de altura del espécimen así como la densidad relativa la cual aumenta en la medida que se disminuye la altura.

<sup>3</sup> [www.cimne.upc.es/KRATOS](http://www.cimne.upc.es/KRATOS)

## 5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Se han presentado las ecuaciones constitutivas para un modelo de plasticidad rigidizada que permite analizar el comportamiento de la etapa de densificación y crecimiento de grano dentro del proceso de sinterizado del material a través del método de los elementos finitos. Todo ello con el objeto de conocer la variación de la deformación equivalente y la variación de la densidad relativa con respecto a las diferentes variaciones de la geometría en el elemento, tal como lo planteó [4]. De igual manera se verifica que este tipo de ecuaciones pueden describir el comportamiento de un material poroso que en primera instancia se ha sometido a presión isoestática.

## 6. UNIDADES Y NOMENCLATURA

$D$	El diámetro promedio de la partícula
$\gamma_d$	La energía superficial promedio.
$I_1$	Primer invariante del tensor de tensiones
$J_2$	Segundo invariante del tensor desviador de tensiones
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Esfuerzos principales
$Y_R$	Esfuerzo de fluencia del material conformado de polvos
$Y_0$	Esfuerzo de fluencia del material base
$\delta$	Relación entre los esfuerzos aparentes aplicados al material poroso y los esfuerzos aplicados al material base
$R$	Densidad relativa del material poroso
$\lambda$	Constante de deformación plástica
$q$	Componente de las velocidades en los puntos nodales
$d\varepsilon_{ij}$	Variación del tensor de deformaciones
$d\bar{\varepsilon}$	Variación de la deformación plástica equivalente
$W$	Trabajo plástico equivalente
$[K^e]$	Matriz de rigidez elemental

## 7. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. R. J. Green, A plasticity theory for porous solids, *Int. J. Mech. Sci.*-14 – 234- (1972).
- [2]. H Kuhn. y C. Downey. Deformation Characteristics and plasticity theory of sintered powder materials. *Int. J. Powder Met.* -7- (1971).
- [3]. S. Shima y M. Oyane. Plasticity theory for porous metals. *Int. J. Mech. Sci.* 18- 285(1976).
- [4]. S. M. Doraivelu, H. Gegel, J. Gunasekera, J. Malas y J. Morgan. A new yield function for compressible P/M materials. *Int. J. Mech. Sci.* 26-527 (1984).
- [5]. Duszcyk J. New yield function for forming processes of porous materials. *Adv. Tech. Plasticity.* 2- 969, (1987).
- [6]. Corapciglou Y. y T. Zu. Constitutive equations for plastic deformation powder. *Powder Tec.* 35- 275 (1978).
- [7]. S. I. Oh, G. D. Lahoti and T. Altan .Application of a rigid plastic finite element method to some metalforming operations *J. Mech. Working Tech,* 6 - 277 (1982).
- [8]. Mori K. y K. Osakada. Analysis of the forming process of sintered powder metals by a rigid plastic finite element method. *Int. J. Mech. Sci.* 29- 229 (1987).
- [9]. Lippman H. y R Iankov. Mathematical modeling of sintering during powder forming processes. *Int. J. Mech. Sci.* 39 – 585 (1996).
- [10]. Riedel H. A constitutive model for finite element simulation of sintering distortions and stresses. *Ceramic Powder Science III,* 619 -630- (1990).