

## OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS DE BIFURCACIÓN DE ENVOLTURAS Y PLACAS DE PAREDES DELGADAS.

### Obtaining the bifurcation points of thin-walled shells and plates.

#### RESUMEN

En este trabajo se da de forma detallada la obtención la ecuación que determina los puntos de bifurcación de envolturas elástico-plásticas.

**PALABRAS CLAVES:** *Bifurcación, deformación, envoltura, lámina.*

#### ABSTRACT

In this work the detailed description of obtaining the equation for determines the bifurcation of elastic-plastic shells and plates is given

**KEYWORDS:** *Bifurcation, deformation, plate, shell.*

**JOSÉ RODRIGO  
GONZÁLEZ GRANADA**

Matemático, Ph.D.

Profesor Asistente

Universidad Tecnológica de  
Pereira

jorodryy@utp.edu.co

**OSCAR FERNÁNDEZ  
SÁNCHEZ**

Ms.C. Matemáticas

Profesor Asociado

Universidad Tecnológica de  
Pereira

oscarf@utp.edu.co

**CARLOS MARIO ESCOBAR  
CALLEJAS**

Ingeniero Civil, M.Sc

Profesor Asistente

Universidad Tecnológica de  
Pereira

ccescobar@utp.edu.co

## 1. INTRODUCCIÓN

Para resolver el problema que permite obtener los puntos de bifurcación del proceso de deformación de envolturas y placas elásticas hechas de materiales de paredes delgadas utilizamos la teoría de Donnel- Mushtari - Vlasov (DMV) [artículo rev 46-tor potencial]. La aplicación de esta teoría para el caso de pequeñas rotaciones ha sido analizado por Sanders y Koyter. La aplicación de esta teoría para el estudio de la estabilidad de envolturas elásticas ha sido diseñada por Budyanskii y las para envolturas elástico-plástico por Hutchinson [2].

## 2. CONSTRUCCIÓN DE LA ECUACIÓN QUE DETERMINA LOS PUNTOS DE BIFURCACIÓN

Antes de construir la ecuación que determinar los puntos de bifurcación del proceso de deformación es necesario formular un principio variacional para el problema linealizado de envolturas y láminas similares al principio variacional [1] de un cuerpo en tridimensional.

$$\delta H = 0. \quad (1)$$

donde

$$H(v_i) \equiv \int_{V_0} \tau^{ij} \dot{\eta}_{ij} dV + \int_{V_0} R^{ijkl} v_{i,j} v_{k,l} dV$$

$$-2 \int_{S_p} \dot{T}^i v_i dS$$

aquí y en adelante “ $\cdot_j$ ” significa que la derivada se toma con respecto a “ $x_j$ ”.

Supongamos que en el punto de bifurcación y después de este el comportamiento de la deformación de la envoltura está sujeta a las hipótesis de Kirchhoff–Lyava. Representemos el campo de velocidades de desplazamiento en el cuerpo elástico-plástico de la siguiente manera:

$$v_\alpha = \dot{u}_\alpha(x^1, x^2) - x^3 \dot{w}_\alpha(x^1, x^2),$$

donde  $v_\alpha$  es la velocidad de desplazamiento en un punto arbitrario del cuerpo;  $\dot{u}_\alpha, \dot{w}_\alpha$  son las velocidades de desplazamiento de la superficie media de la envoltura.

Para determinar la posición de cualquier punto de la envoltura, que se encuentre fuera de la superficie media, se introduce una tercera coordenada  $x^3$ , que representa la distancia a lo largo de la normal desde el punto  $(x^1, x^2)$  de la superficie media hasta el punto  $(x^1, x^2, x^3)$  ver figura 1.

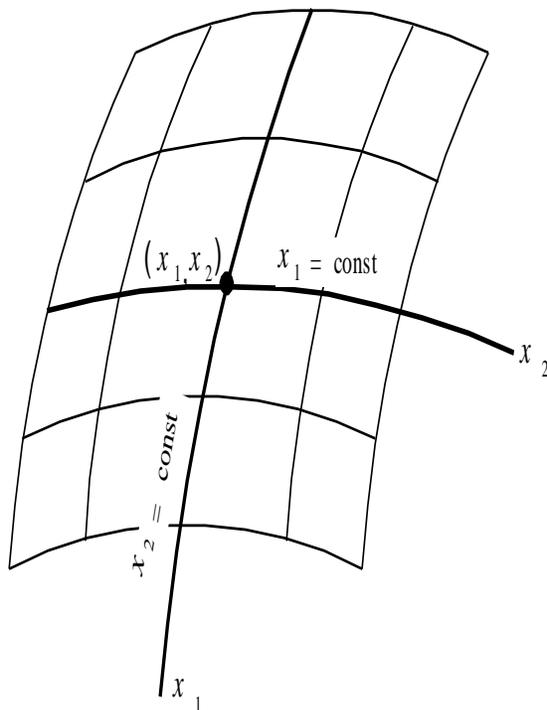


Fig. 1 Superficie media de la envoltura

De esta forma el elemento lineal de la envoltura en este sistema de coordenadas se determina de la siguiente manera

$$dl^2 = H_a H_b dx^a dx^b + (dx^3)^2$$

donde los coeficientes de Lamé  $H_a = H_a(x^1, x^2)$  tienen el siguiente aspecto

$$H_a = h_\alpha (1 + b_\alpha x^3).$$

La longitud del segmento normal en este punto a la superficie media y acotada por las directrices de la envoltura, es el espesor de la envoltura. En si el grosor de la envoltura en términos generales puede ser variable, es decir  $h = h(x^1, x^2)$  (Fig. 2). Aquí sólo analizaremos el caso cuando el grosor es constante.

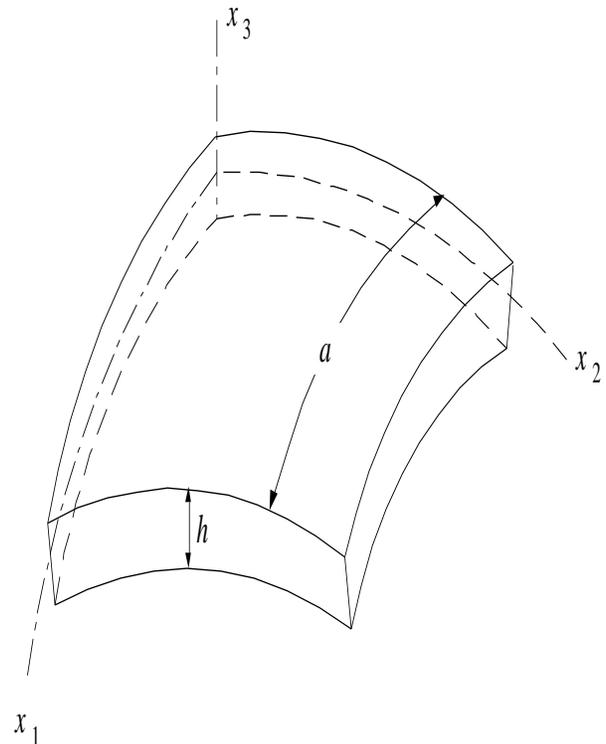


Fig.2. Elemento de envoltura.

Supongamos que en el punto de bifurcación y después de este el comportamiento de la deformación de la envoltura está sujeta a las hipótesis de Kirchhoff–Lyava.

Teniendo en cuenta (2.10) representemos el campo de velocidades de desplazamiento en el cuerpo elástico-plástico de la siguiente manera:

$$v_\alpha = \dot{u}(x^1, x^2) - x^3 \dot{w}_{,\alpha}(x^1, x^2), \quad (2)$$

donde  $v_\alpha$  es la velocidad de desplazamiento en un punto arbitrario del cuerpo,  $\dot{u}_\alpha, \dot{w}$  son las velocidades de desplazamiento de la superficie media de la envoltura. Conociendo el campo de velocidades de desplazamiento (2) construimos el campo de velocidades de deformación

$$\dot{\varepsilon}_{ab} = \dot{h}_{ab} + x^3 \dot{k}_{ab}, \quad (3)$$

donde

$$\dot{h}_{ab} = \frac{1}{2}(\dot{u}_{a,b} + \dot{u}_{b,a} + \dot{u}_{k,a} \dot{u}_{k,b} + u_{k,b} \dot{u}_{k,a}^k),$$

aquí

$$\dot{k}_{ab} = -\dot{w}_{,ab}.$$

El funcional  $H(v_i)$ , utilizando la expresión para de  $B_{ijkl}$  (1.00) se puede escribir de la siguiente manera:

$$H(v_i) = H_1(v_i) + H_2(v_i), \quad (4)$$

donde

$$H_1(v_i) \equiv \int_{V_0} \tau^{ij} \dot{\eta}_{ij} dV,$$

$$H_2(v_i) \equiv \int_{V_0} R^{ijkl} v_{i,j} v_{k,l} dV - 2 \int_{S_p} \dot{T}_i v_i dS. \quad (5)$$

De esta forma encontramos que

$$v_{a,b} = \dot{u}_{a,b} - x^3 \dot{w}_{,ab}, v_{3,a} = \dot{w}_{,a}, \\ v_{a,3} = -\dot{w}_{,a}, v_{3,3} = 0, \quad (6)$$

Para el funcional  $H_1(v_i)$  se tiene que

$$H_1(\dot{u}_\alpha, \dot{w}) = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G^{\alpha\beta\gamma\delta} [\dot{\eta}_{\gamma\delta} + x^3 \dot{\kappa}_{\gamma\delta}] [\dot{\eta}_{\alpha\beta} + x^3 \dot{\kappa}_{\alpha\beta}] dx^3 dA.$$

Es de tener en cuenta que el funcional  $H_1$  no posee términos los coeficientes  $G^{ijkl}$  en el índice 3. De esta relación y después de integrar sobre  $x^3$  hallamos

$$H_1(\dot{u}_\alpha, \dot{w}) = \int_A [H_1^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\eta}_{\gamma\delta} \dot{\eta}_{\alpha\beta} + 2H_2^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\kappa}_{\gamma\delta} \dot{\eta}_{\alpha\beta} \\ + H_3^{\alpha\beta\gamma\delta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\gamma\delta}] dA, \quad (7)$$

aquí  $H_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\delta}$  se determina por

$$H_{(i)}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G^{\alpha\beta\gamma\delta} (x^3)^{i-1} dx^3. \quad (8)$$

De la misma forma se determina  $H_2(\dot{u}_\alpha, \dot{w})$ :

$$H_2(\dot{u}_\alpha, \dot{w}) = h \int_A \tau^{\alpha\beta} [\dot{u}_{\alpha,\chi} \dot{u}_{\chi,\beta} \\ + \frac{h^2}{12} \dot{w}_{,\chi\alpha} \dot{w}_{,\chi\beta} + \dot{w}_{,\alpha} \dot{w}_{,\beta}] dA \quad (9)$$

En la expresión anterior (9) los términos entre los corchetes poseen diferentes órdenes. Obteniendo la siguiente estimación

$$\dot{w}_{,i} = \frac{f}{\lambda} \dot{w}_{,i} = \frac{f}{\lambda}, \quad (5)$$

$$v_{i,j} = f \frac{h}{\lambda^2}, \quad (10)$$

donde  $f, \lambda$  son la deflexión y el tamaño característico de la lámina en el plano medio respectivamente.

Es sabido que la hipótesis de las rectas normales incluye un error geométrico del orden de  $h/R$ . Tomando entre los corchetes de (9) por la unidad y despreciando los términos restantes, que en este caso son del orden  $\frac{h^2}{\lambda^2}$ , es decir del mismo orden que en la hipótesis de Kirchhoff-Lyava, el funcional  $H_2(\dot{u}_\alpha, \dot{w})$  toma el siguiente aspecto:

$$H_2(\dot{u}_\alpha, \dot{w}) = \int_A N^{\alpha\beta} \dot{w}_{,\alpha} \dot{w}_{,\beta} dA, \quad (11)$$

aquí

$$N^{\alpha\beta} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau^{\alpha\beta} dx^3. \quad (12)$$

Teniendo todo esto en cuenta, el funcional  $H(\dot{u}_\alpha, \dot{w})$  se puede representar de la siguiente manera:

$$H(\dot{u}_\alpha, \dot{w}) = \int_A \left[ H_1^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\eta}_{\alpha\beta} \dot{\eta}_{\chi\delta} + 2H_2^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\eta}_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\chi\delta} \right. \quad (13)$$

$$\left. + H_3^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\kappa}_{\alpha\beta} \dot{\kappa}_{\chi\delta} + N^{\alpha\beta} \dot{w}_{,\alpha} \dot{w}_{,\beta} \right] dA - 2 \int_S \dot{T}^i v_i dS.$$

siendo  $dA$  el elemento sin deformar de la superficie media la envoltura.

Para establecer la relación entre las velocidades de deformación y tensión, utilizamos las relaciones constitutivas de la teoría de plasticidad [1].

Teniendo en cuenta que la deformación de desplazamiento cero, utilizando (1) para la tensión plana se tiene

$$\dot{\tau}^{\alpha\beta} = G^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\eta}_{\chi\delta}, \quad (14)$$

donde los índices  $\alpha, \beta, \chi, \delta, \kappa, \gamma$  recorren los valores 1 y 2. Los componentes de la matriz de rigidez en este caso están dados por:

$$G^{\alpha\beta\chi\delta} = L^{\alpha\beta\chi\delta} - L^{\alpha\beta 33} L^{33\chi\delta} / L^{3333}, \quad (15)$$

Escribamos las relaciones entre las fuerzas generalizadas y los desplazamientos :

$$\begin{aligned} \dot{N}^{\alpha\beta} &= H_{(1)}^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\eta}_{\kappa\gamma} + H_{(2)}^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\kappa}_{\kappa\gamma}, \\ \dot{M}^{\alpha\beta} &= H_{(2)}^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{E}_{\kappa\gamma} + H_{(3)}^{\alpha\beta\chi\delta} \dot{\kappa}_{\kappa\gamma}. \end{aligned} \quad (16)$$

En la teoría de las envolturas elásticas, la integración en (7) se realiza una sola vez para todas las integrales.

Es más, en el estudio de las envolturas y láminas elástico-plásticas los módulos dependen de la historia de la carga y por tanto las integrales en el proceso de deformación se hallan usando las relaciones (4).

Definamos ahora la bifurcación del proceso de deformación de envolturas y las láminas. Para esto introduzcamos dos campos de velocidades para la carga externa dada. Denotandolas por  $\dot{U}_\alpha^a, \dot{W}^a, \dot{U}_\alpha^b, \dot{W}^b, \dots$  etc.

Teniendo en cuenta la teoría fundamental de bifurcación introduzcamos la diferencia de los campos de velocidad,  $\tilde{U}_\alpha = \dot{U}_\alpha^b - \dot{U}_\alpha^a, \tilde{\tau}^{\alpha\beta} = \dot{\tau}_b^{\alpha\beta} - \dot{\tau}_a^{\alpha\beta}$ , etc. Así si estas dos soluciones satisfacen las ecuaciones del problema, se tiene

$$\begin{aligned} \int_A \left[ \tilde{M}^{\alpha\beta} \tilde{\kappa}_{\alpha\beta} + \tilde{N}^{\alpha\beta} \tilde{E}_{\alpha\beta} \right. \\ \left. + N^{\alpha\beta} \tilde{W}_{,\alpha} \tilde{W}_{,\beta} \right] dA = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $N^{\alpha\beta}$  es valor real del tensor de esfuerzo generalizado y

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\tilde{U}_{\alpha,\beta} + \tilde{U}_{\beta,\alpha}) + b_{\alpha\beta} \tilde{W} \\ &+ \frac{1}{2} (W_{,\alpha} \tilde{W}_{,\beta} + W_{,\beta} \tilde{W}_{,\alpha}) \\ \tilde{K}_{\alpha\beta} &= -\tilde{W}_{,\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (18)$$

Como en el caso del cuerpo elástico tridimensional [1] se utiliza la noción de cuerpo lineal con la matriz de rigidez  $L_c^{\alpha\beta\chi\delta}$  obteniendo la matriz  $G_c^{\alpha\beta\chi\delta}$ .

Finalmente el funcional cuadrático que determina los puntos de bifurcación de envolturas y láminas elástico-plásticas está dado de la forma

$$H = \int_A \left[ \overset{c}{H}_{(3)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{K}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{\kappa\gamma} + 2\overset{c}{H}_{(2)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{E}_{\alpha\beta} \tilde{K}_{\kappa\gamma} + \overset{c}{H}_{(1)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} \tilde{E}_{\alpha\beta} \tilde{E}_{\kappa\gamma} + N^{\alpha\beta} \tilde{W}_{,\alpha} \tilde{W}_{,\beta} \right] dA, \quad (19)$$

teniendo en cuenta que

$$\overset{c}{H}_{(i)}^{\alpha\beta\kappa\gamma} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} G_c^{\alpha\beta\chi\delta} (x^3)^{i-1} dx^3. \quad (20)$$

### 3. CONCLUSIÓN

De la fórmula (20) se puede obtener los puntos de bifurcación en envolturas y placas hechas de paredes delgadas.

### 4. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Gonzalez J.R., Escobar C.M. La descripción analítica para obtener la energía potencial para envolturas. Scientia et Technica, Vol. 47, 2010.
- [2]. Hutchinson J.W. Plastic buckling. Advances in Appl. Mech. 1974, Vol.14. P. 67-144
- [3]. Dokl. AN SSSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823. Traducción del autor
- [4]. Novozhilov V.V., Kadashevish Yu. A., Chernyakov. Yu.A. Teoria plastichnosti uchitivauchya mikrodeformacia. Dokl. AN SSSR. 1985. T. 284, T.4. P.821-823. Traducción del autor
- [5]. Gonzalez J.R. Stability and Postbifurcation Behavior of Shells under Combined Loading. GAMM2001. Zurich, 2001. P. 44.

- [6]. Ilushin A.A. Plastichnost. M., 1948. 876 p.
- [7]. Kadashevish Yu. A., Novozhilov V.V. Chernyakov. Yu.A. Teoria plastichnosti i polzuchesti uchitivaushie mikrodeformacii // PMM. 1986. T.50, №6. p.890-897.
- [8]. Zelenskiy A.G., Shvayko N. Yu. Vlianie istorii nagruzenya na bifurkaciu processa deformirovanya cilindricheskoi obolochki. Dokl. A.N USSR. Ser.A. 1978. T 1. Pp. 38-43.
- [9]. Hutchinson J. W. Plastic buckling. Advances in Appl. Mech. 1974. Pp 67-144.
- [10]. eedlman A. A numerical Study of Necking in circular cylindrical bars. J. Mech. And Phys. Solids. 1972, Pp 111-127