

DESARROLLO DE UN MODELO CONSTITUTIVO PARA PROBLEMAS DE FATIGA TERMOMECAICA ACOPLADA CON EFECTOS DE TAMAÑO VIA LA MECANICA DEL DAÑO CONTINUO.

A Thermodynamics Based Damage Mechanics Model for Numerical Simulations of Thermomechanical Fatigue Problems Coupled to Size Effects.

RESUMEN

En este trabajo se discute el tratamiento computacional de problemas con materiales cuya respuesta es no-lineal y los cuales están aplicados en volúmenes susceptibles de exhibir efectos de tamaño introducidos por la presencia de dislocaciones geoméricamente necesarias.

PALABRAS CLAVES: Efectos de tamaño, Elementos finitos, Fatiga termomecánica, Modelos constitutivos, Mecánica computacional, Plasticidad por gradientes de deformación.

ABSTRACT

This work deals with the computational treatment of problems involving non-linear material behavior and applied in such small volumes that size effects are expected to occur. The physical source of the size effects has been explained in terms of an extra density of geometrically necessary dislocations.

KEYWORDS: *Computational mechanics, Constitutive modeling, Finite elements, Size effects, Strain gradient plasticity.*

1. INTRODUCCIÓN

El reciente auge de la microelectrónica y la nanotecnología a nivel mundial ha promovido el interés del estudio de ciertos materiales en volúmenes pequeños. Algunos casos se identifican en películas delgadas, sensores, actuadores y en general los denominados sistemas Micro-Electro-Mecánicos (MEMS) donde el tamaño total del sistema puede ser inferior a las $10\mu\text{m}$ [1].

De otro lado, se ha identificado evidencia experimental en metales, que muestra una dependencia de la respuesta mecánica en el tamaño del espécimen cuando este alcanza tamaños inferiores a cierta escala característica. Estos Efectos de Tamaño (ET), han sido observados en ensayos de microtorsión sobre cables de cobre [2], microflexión sobre vigas de níquel [3] y nanoindentación sobre muestras de cobre y aluminio [4]. Las observaciones indican aumentos en la resistencia en la dirección de menor tamaño de los especímenes ante la presencia de campos de deformación inelástica no-uniforme. Estos efectos de tamaño han sido explicados en términos de la acumulación de una densidad adicional de dislocaciones (geoméricamente necesarias), necesaria a la hora de acomodar los gradientes de deformación inelástica manteniendo la continuidad estructural del material, [5], [6], [7], [8], [9]. La mecánica clásica es incapaz de predecir efectos de tamaño ya que no posee escalas intrínsecas del material.

JUAN DAVID GOMEZ

Ingeniero Civil, PhD.

Profesor Asociado
Universidad EAFIT
jgomezc1@eafit.edu.co

Desde el punto de vista ingenieril, en microestructuras electrónicas con tamaños característicos como los demandados por las tendencias actuales hacia la miniaturización, se hace necesaria la disponibilidad de un marco computacional para representar las diferentes condiciones de operación y poder determinar la confiabilidad de la estructura bajo condiciones operacionales. Esta necesidad es especialmente relevante si se considera la dificultad inherente de realizar experimentos en estructuras reales a las escalas de tamaño referidas. Varios modelos constitutivos han sido desarrollados para el tratamiento de problemas de daño inducidos por fatiga pero ninguno de ellos con la capacidad de considerar de manera simultánea la presencia de efectos de tamaño. Esto es debido en parte al hecho de que los experimentos en los cuales se ha observado la presencia de ET han sido conducidos bajo condiciones de carga monotónicas. En este trabajo se presenta un modelo constitutivo y marco computacional para el tratamiento del problema de fatiga termomecánica en materiales de unión susceptibles de exhibir efectos de tamaño cuando estos son utilizados en volúmenes pequeños. El tratamiento es novedoso ya que permite la consideración de cargas cíclicas simultáneamente con efectos de tamaño.

2. ANTECEDENTES.

El problema de efectos de tamaño y de la consideración de la densidad de dislocaciones geoméricamente

necesarias en modelos de plasticidad de metales ha sido abordado principalmente a través de dos estrategias. Inicialmente por medio de un modelo general donde se incorporan todos los términos del tensor gradiente de desplazamientos. Es decir, deformaciones y rotaciones para el caso de un sólido bajo condiciones de deformación infinitesimal. Este modelo puede enmarcarse en la clase de sólidos considerados por [10] y [11] donde es necesario también considerar tensiones de orden superior como conjugadas a los gradientes de los desplazamientos de segundo orden. En una estrategia posterior se consideran solo los gradientes de las componentes rotacionales, es decir las curvaturas. Dicho modelo cabe dentro de los sólidos desarrollados por Cosserat y Cosserat [12] y se denominará en lo que sigue como un Sólido de Cosserat (CS). En este caso la transmisión de fuerzas sobre ambos lados de una superficie infinitesimal no solo involucra fuerzas por unidad de superficie como en la teoría clásica, sino también momentos por unidad de superficie. Las tensiones de momento resultantes se convierten en conjugadas a las curvaturas. En ambos tratamientos es necesaria la introducción de nuevos parámetros constitutivos con el fin de mantener la consistencia dimensional. Estos parámetros con dimensiones de longitud son precisamente los que permiten la consideración de efectos de tamaño inclusive bajo condiciones elásticas. Tratamientos computacionales basados en sólidos de Cosserat han sido desarrollados por [2] y [13], mientras que modelos fundamentados en tensiones de orden superior han sido propuestos por [14], [15], [16] y más recientemente por [1] y [17]. Como se hizo alusión, ninguno de estos modelos permite la aplicación de cargas cíclicas.

3. MODELO ACOPLADO PARA DAÑO POR FATIGA CONSIDERANDO EFECTOS DE TAMAÑO.

En lo que sigue se presenta un modelo constitutivo desarrollado para incorporar de manera simultánea degradación de la microestructura por fatiga y efectos de tamaño para el caso de soldaduras eléctricas del tipo Pb/Sn. El modelo se construye a partir del originalmente propuesto por [18] y posteriormente refinado por [19], [20], y [21]. Este considera la degradación por fatiga a partir de la teoría del daño continuo y en particular de los conceptos de principio de tensión efectiva y de deformación unitaria equivalente, [22]. Para considerar efectos de tamaño el modelo constitutivo basado en la teoría clásica, ha sido embebido en un marco de Cosserat. Las Ecuaciones (1) a (3) describen las ecuaciones de campo de dicho sólido, en donde σ_{ij} y τ_{ij} representan las componente simétrica y asimétrica respectivamente del tensor de tensiones, m_{ij} es el tensor de momentos por unidad de superficie, t_i, q_i son los vectores de fuerza por unidad de superficie y momento por unidad de superficie,

$\varepsilon_{ij}, \theta_i, \chi_{ij}$ representan las deformaciones unitarias, rotaciones y curvaturas respectivamente. Finalmente u_i es el vector de desplazamientos y n_i es el vector normal externo sobre la superficie del sólido.

$$\sigma_{ji,j} + \tau_{ji,j} = 0 \quad (1)$$

$$\tau_{jk} + \frac{1}{2} e_{ijk} m_{pi,p} = 0$$

$$t_i = (\sigma_{ij} + \tau_{ij}) n_j \quad (2)$$

$$q_i = m_{ij} n_j$$

$$q_i = m_{ij} n_j$$

$$\theta_i = \frac{1}{2} e_{ijk} u_{k,j}$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3)$$

$$\chi_{ij} = \theta_{i,j}$$

El bloque de tensiones de Cosserat puede consultarse en [12], [23] y [24]. La relación constitutiva entre tensiones y deformaciones se expresa en la manera usual;

$$\sigma = C \varepsilon \quad (4)$$

$$l^{-1} m = \tilde{D} l \chi$$

donde C, \tilde{D} representan tensores de propiedades elásticas y ℓ es un parámetro constitutivo con dimensiones de longitud. Cuando el tamaño característico del espécimen asociado con gradientes de deformación inelástica se aproxima a este parámetro el material comienza a exhibir aumentos en la resistencia o efectos de tamaño. Si se colapsan las variables involucradas en representaciones generalizadas de tensión y deformación es posible escribir de manera simple las ecuaciones constitutivas en forma de una teoría de flujo extendidas al caso de un sólido de Cosserat. Estas se presentan en las ecuaciones (5) a (7);

$$\dot{\Sigma} = (1-D) M (\dot{E} - \dot{E}^{vp} - \dot{E}^{\theta}) \quad (5)$$

$$F(\Sigma, \alpha) = \sqrt{\xi^T P \xi} - \sqrt{\frac{2}{3}} K(\alpha) \quad (6)$$

$$\mathcal{E}^{vp} = \gamma \frac{P \xi}{(1-D)}$$

$$\mathcal{E}^{\theta} = \sqrt{\frac{2}{3}} \gamma (1-D) \sqrt{\xi^T P \xi} \quad (7)$$

$$\mathcal{E}^{\alpha} = \gamma \frac{2}{3} H'(\alpha) (1-D) \xi$$

En estas ecuaciones el punto representa diferenciación respecto al tiempo, Σ, E y M son las medidas generalizadas de tensión, deformación unitarias, y la matriz generalizada de elasticidad, F es una función de cedencia donde ξ representa la componente desviadora del tensor de tensiones y α es un parámetro de endurecimiento controlando el radio $K(\alpha)$ y la posición del centro de la superficie de cedencia. El modelo

considerado tiene en cuenta el efecto de Bauschinger (o de endurecimiento cinemático) mediante el tensor generalizado de tensiones de retorno X . Las ecuaciones evolutivas de la componente viscoplastica de la deformación y los parámetros de endurecimiento se presentan en la ecuación (7). Finalmente el escalar D representa un parámetro de daño, ver por ejemplo [21]. Para completar las ecuaciones correspondientes a la teoría de flujo para el sólido de Cosserat propuesto se fijan condiciones de complementariedad y consistencia; $\gamma \geq 0, F(\Sigma, \alpha) \leq 0$ y $\gamma F(\Sigma, \alpha) = 0$ (8)

$$\gamma F(\Sigma, \alpha) = 0 \tag{9}$$

donde γ es un parámetro de consistencia. En el tratamiento con elementos finitos la solución se construye a partir de soluciones en pequeños incrementos con la solución durante cada incremento encontrada a partir de un algoritmo de Newton-Raphson. Durante cada incremento el problema puede considerarse como controlado por desplazamientos en el siguiente sentido. Al comienzo de cada incremento los campos de deformación total y viscoplastica, así como otras variables de estado internas se asumen como conocidas. Asumiendo que el desplazamiento incremental $\Delta \bar{u}$ es conocido, el problema básico consiste en actualizar las variables a sus valores al final del incremento pero de manera consistente con las ecuaciones constitutivas (5) a (7). Este modelo constitutivo es integrado mediante un algoritmo de transformación por retorno a la superficie de flujo como lo describen en [25]. Un esquema de regresivo de Euler genera las siguientes versiones algorítmicas de las ecuaciones (7).

$$\begin{aligned} E_{n+1} &= E_n + \Delta E_{n+1} \\ \alpha_{n+1} &= \alpha_n + \Delta \gamma (1-D) \sqrt{\frac{2}{3} \xi_{n+1}^T P \xi_{n+1}} \\ X_{n+1} &= X_n + \Delta \gamma \frac{2}{3} H'(1-D) \xi_{n+1} \end{aligned} \tag{10}$$

La técnica clásica de partición del operador define el siguiente estado de ensayo.

$$\Sigma_{n+1}^{rr} = \Sigma_n + (1-D) M \Delta E_{n+1} \tag{11}$$

Haciendo uso de (11) y la ley de Hooke generalizada es posible escribir;

$$\begin{aligned} \Sigma_{n+1} &= \Sigma_{n+1}^{rr} - M \Delta \gamma P \xi_{n+1} \\ \xi_{n+1}^{rr} &= \Sigma_{n+1}^{rr} - X_n \end{aligned} \tag{12}$$

De la ecuación (12) es posible actualizar la tensión relativa en términos de la versión algorítmica del parámetro de consistencia $\Delta \gamma$;

$$\xi_{n+1} = \Xi(\Delta \gamma) \frac{1}{1 + \frac{2}{3} H' \Delta \gamma (1-D)} M^{-1} \xi_{n+1}^{rr} \tag{13}$$

donde

$$\Xi(\Delta \gamma) = \left[M^{-1} + \frac{\Delta \gamma P}{1 + \frac{2}{3} H' (1-D) \Delta \gamma} \right]^{-1} \tag{14}$$

El parámetro de consistencia $\Delta \gamma$ es obtenido del criterio de fluencia y del modelo constitutivo correspondiente. En este caso en particular se utilizó una ley de fluencia correspondiente a la desarrollada por [26]. En [27] se muestran los detalles adicionales del algoritmo de integración incluyendo el módulo tangente elastoplástico consistente con el algoritmo de integración. De otro lado y con el fin de implementar el modelo en un algoritmo de elementos finitos se sigue la estrategia de [28] donde se trata la rotación ω como un grado de libertad independiente y se garantiza la restricción cinemática al desplazamiento (ver ecuación 3) a través de un método de penalización. Esta estrategia permite hacer uso de elementos de continuidad C_0 . La componente asimétrica del tensor de tensiones τ_{ij} se relaciona con las rotaciones relativas α_{ij} a través de un parámetro de penalización G_α . En estos términos el principio de desplazamientos virtuales teniendo en cuenta la restricción cinemática se expresa como;

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} m_{ij} \delta \chi_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} G_\alpha \alpha_{ij} \delta \alpha_{ij} d\Omega - \int_{\partial \Omega} t_i \delta u_i d\Gamma - \int_{\partial \Omega} q_i \delta \omega_i d\Gamma = 0 \tag{15}$$

o usando notación matricial;

$$\int_V \delta E^T \Sigma dV + \int_V G_\alpha \delta \alpha^T \alpha dV - \int_S \delta \bar{u}^T \bar{t} dS = 0 \tag{16}$$

El marco computacional propuesto ha sido implementado en el paquete computacional de uso comercial ABAQUS como un elemento de usuario a través de una subrutina UEL.

4. SIMULACIONES.

Simulación del ensayo de microflexión de Stolken y Evans (1998), [3].

Los resultados experimentales de Stolken y Evans han sido usados para validar varios modelos computacionales como por ejemplo en [29], [30] y [31]. En los ensayos de Stolken y Evans los especímenes fueron localizados en un sistema de fijación usado para imponer curvaturas por medio de un conjunto de cilindros de diámetros especificados. Luego mediante un microscopio confocal midieron las curvaturas plásticas residuales y recobraron las curvaturas después de la descarga. Ya que la descarga es elástica la curvatura recuperada puede ser usada para determinar el correspondiente momento flector. Los resultados son presentados en términos de dos descripciones normalizadas del momento contra la deformación unitaria superficial. Primero usaron la descripción M/bt^2 directamente de los resultados

experimentales donde t es el espesor de la viga y b es el ancho. La Figura 1 compara los resultados del modelo computacional contra los del ensayo de Stolken y Evans.

Microflexión de Soldaduras Eléctricas de Película Delgada.

El modelo constitutivo propuesto también ha sido usado para simular la respuesta de una soldadura de película delgada bajo condiciones de carga cíclicas. Se realizaron simulaciones con el sólido propuesto y con el correspondiente a la teoría clásica. Primero se estudió una microviga de $12.5\mu\text{m}$ de espesor bajo una carga cíclica en el extremo usando $\ell = 0.0$ y $\ell = 5.0\mu\text{m}$. Este valor (asumido) es comparable con el experimentalmente identificado en especímenes de cobre por diferentes grupos. Las Figuras 2 y 3 muestran los resultados correspondientes a ambas simulaciones. En la parte inferior de la Figura 3 se muestra la evolución del parámetro de daño debida a la fatiga microestructural del material. En el análisis considerado se aplicaron 100 ciclos de carga a condiciones de temperatura ambiente. Para una carga dada y haciendo uso de la teoría de Cosserat se determinó la carga equivalente que produciría la misma respuesta que en el modelo clásico. La relación entre las dos cargas es cercana a la obtenida por Stolken y Evans entre los resultados experimentales y las predicciones de la teoría clásica. Posteriormente se desarrolló el mismo análisis utilizando la teoría de gradiente pero con la carga del modelo clásico. La consideración de los efectos de tamaño revela cambios tanto en la respuesta tensión-deformación como en la evolución del parámetro de daño. Lo anterior significa que cuando los efectos de tamaño son considerados el número de ciclos para alcanzar cierto nivel de daño por fatiga es mayor comparativamente con el de la teoría clásica.

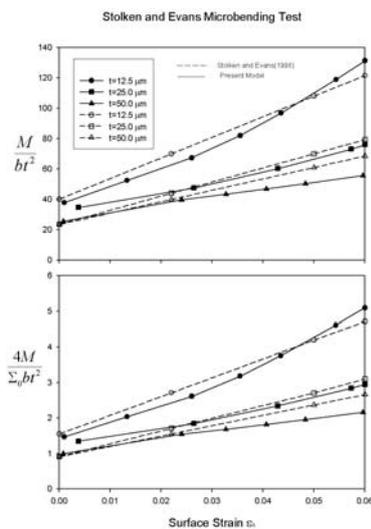


Figura 1. Comparación de los resultados numéricos (este modelo) y los experimentales (Stolken y Evans).

$$l = 5.0\mu\text{m}, E = 220.0\text{GPa}, \Sigma_0 = 103\text{MPa}$$

Con el fin de estudiar la influencia del parámetro de escala, el mismo análisis se repitió con tres valores diferentes de la escala de tamaño. Los resultados para el parámetro de daño correspondientes a tres valores del parámetro de escala se muestran en la Figura 4. Además los análisis previos se extendieron a espesores de $25.0\mu\text{m}$ y $50.0\mu\text{m}$. Puede apreciarse de las figuras 5 y 6 que los efectos de tamaño son más fuertes para la viga de $12.5\mu\text{m}$ y que disminuyen en la dirección de incremento del espesor. Los resultados de las simulaciones sugieren que la vida a fatiga se ve significativamente afectada por el parámetro de tamaño del material.

5. CONCLUSIONES.

Se ha propuesto la utilización de la teoría de sólidos de Cosserat para embeber un modelo constitutivo para fatiga termomecánica con uso potencial en sistemas del tipo MEMS fabricados de materiales metálicos susceptibles de exhibir efectos de tamaño. Las ecuaciones constitutivas han sido escritas como una teoría de flujo e integradas mediante un algoritmo de retorno a la superficie de cedencia. El marco computacional resultante se implementó en el paquete de uso comercial ABAQUS como una subrutina de usuario. El modelo ha sido verificado contra los resultados experimentales de Stolken y Evans, [3] y posteriormente aplicado sobre microvigas de aleaciones Pb/Sn bajo condiciones cíclicas de carga. Efectivamente la presencia de los efectos de tamaño afecta la vida a fatiga de las microestructuras consideradas. A menor tamaño del espécimen se ha observado un incremento en la vida a fatiga.

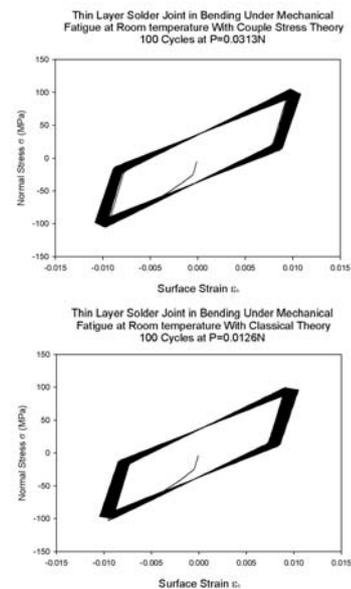


Figura 2. Soluciones mediante la teoría clásica y la teoría de Cosserat para las soldaduras eléctricas de película delgada y parámetros de escala $l = 5.0\mu\text{m}$ y $l = 0.0\mu\text{m}$

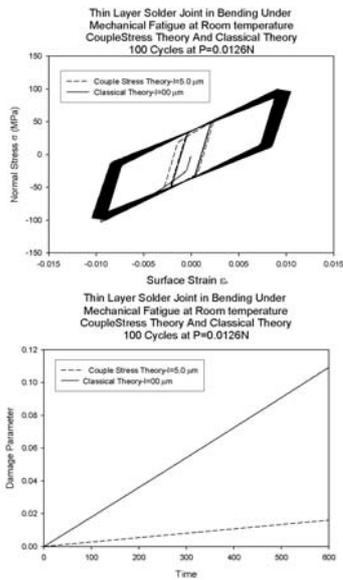


Figura 3. Soluciones mediante la teoriza clásica y la teoría de Cosserat para las soldaduras eléctricas de película delgada con carga constante y parámetros de escala $l = 5.0\mu m$ y $l = 0.0\mu m$

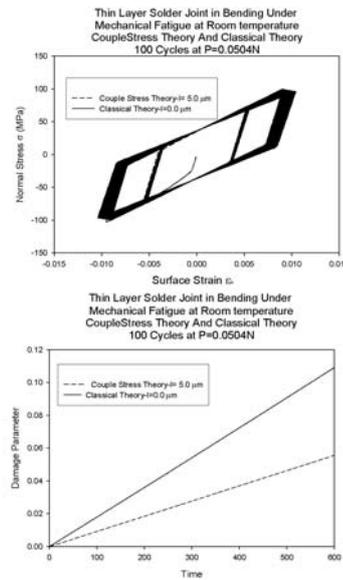


Figura 5. Soluciones mediante la teoriza de Cosserat y la clásica con igual carga para una microviga de $25.0\mu m$. [1]

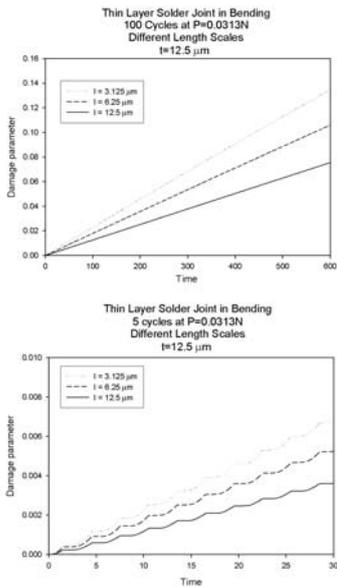


Figura 4. Soluciones mediante la teoriza de Cosserat para diferentes parámetros de escala en una microviga de $12.5\mu m$.

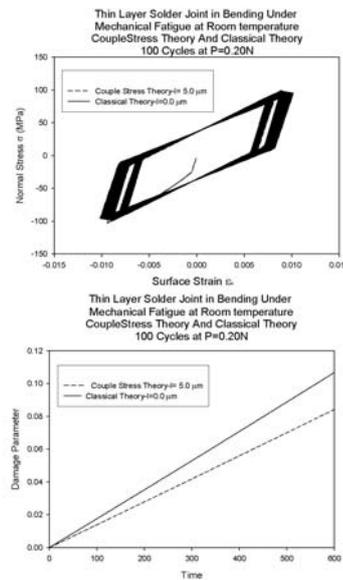


Figura 6. Soluciones mediante la teoriza de Cosserat y la clásica con igual carga para una microviga de $50.0\mu m$.

6. BIBLIOGRAFÍA

[1] Xue, Z. “The strain gradient effect on material behavior at the micron and submicron scales”. PhD Dissertation. University of Illinois at Urbana-Champaign., 2001.
 [2] Fleck, N. y Hutchinson (1993) A Phenomenological Theory for Strain Gradient Effects in Plasticity. J.Mech.Phys.Solids., Vol 41, 12,pp. 1825-1857.

- [3] Stolken, J., y Evans, A. (1998). A Microbend Test Method For Measuring The Plasticity Length Scale. *Acta.mater.*, 14, pp5109-5115.
- [4] McElhaney, K., Vlassak, J. y Nix, W. (1998). Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiment. *J Mater Res.*, 13, pp1300-1306.
- [5] Nye, J., (1953). Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metall.*, 1., pp153-162.
- [6] McElhaney, K., Vlassak, J. y Nix, W. (1998). Determination of indenter tip geometry and indentation contact area for depth-sensing indentation experiment. *J Mater Res.*, 13, pp1300-1306.
- [7] Nye, J., (1953). Some geometrical relations in dislocated crystals. *Acta Metall.*, 1., pp153-162.
- [8] Ashby, M(1970). The deformation of plastically non-homogenous materials. *Phil Mag.* Vol 21, pp399-424.
- [9] Arselinis, A., and Parks, D. (1999). Crystallographic Aspects of Geometrically-necessary and Statistically-stored Dislocation Density. *Acta Materialia.*, 47., pp1597-1611.
- [10] Bazant, Z(2002). Scaling of dislocation-based strain-gradient plasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids.* Vol 50, pp 435-448.
- [11] Needleman, A., and Sevillano, J(2003). Preface to the viewpoint set on: geometrically necessary dislocations and size dependent plasticity. *Scripta Materialia.* Vol 48, pp 109-111.
- [12] Toupin, R. (1962). Elastic Materials with Couple-Stresses. *Arch.Rational Mech.Anal.* 11,pp385-414.
- [13] Mindlin, R. (1965). Second gradient of strain and surface tension in linear elasticity. *Int.J. Solids and Structures.*, 1,pp417-438.
- [14] Cosserat, E., and Cosserat, F. (1909). *Theorie des Corps Deformables.* Paris: A Hermann & Fils.
- [15] Fleck, N., Muller, G., Ashby, M., and Hutchinson, J(1993). Strain gradient plasticity: Theory and experiment. *Acta. Metall. Mater.* Vol 42, No 2, pp 475-487.
- [16] Fleck, N., and Hutchinson, J (1997). Strain Gradient Plasticity. In *Advances in Applied mechanics*, 33., pp295-361.
- [17] Gao, H., and Huang, Y(2001). Taylor-based nonlocal theory of plasticity. *Int.J. Solids and Structures.*, 38, pp 2615-2637.
- [18] Gao, H., Huang, Y., and Nix, W. (1999). Modeling Plasticity at the Micrometer Scale. *Natur Wissenschaften.*, 86, pp507-515.
- [19] Xue, Z., Huang, Y., and Li, M., (2001). Particle size effect in metallic materials: a study by the theory of mechanism-based strain gradient plasticity. *Acta Materialia.*, 50, pp149-160.
- [20] Basaran, C. "Finite Element Thermomechanical Analysis of Electronic Packaging Problems Using Disturbed State Constitutive Models". PhD Dissertation, Department of Civil Engineering and Engineering Mechanics, University of Arizona. 1994.
- [21] Basaran, C., and Yan, C(1998). A Thermodynamic Framework for Damage Mechanics of Solder Joints. *Journal of Electronic Packaing, Trans. ASME*, 120, pp 379-384.
- [22] Basaran, C., and Gomez, J(2003). Numerical Simulation of Monotonic and Fatigue Shear Testing of Thin Layer Solder Joints Using a Damage mechanics Based Constitutive Model. *Proceedings 2003 ASME Mechanics and Materials Conference.*, Scottsdale, Arizona.
- [23] Basaran, C., Zhao, Y., Tang, H., and Gomez, J(2005). A Damage Mechanics Based Unified Constitutive Model for Pb/Sn Solder Alloys. Accepted. *ASME Journal of Electronic Packaging.*
- [24] Lemaitre, J., (1996). *A course on damage mechanics.* Springer-Verlag., Germany.
- [25] Herrmann, L.R., (1983). *Mixed Finite Elements for Couple-Stress Analysis.* In *Mixed and Hybrid Finite Element Methods.* Eds Atluri, N, S., Gallagher, H and Zienkiewicz, O. John Wiley and Sons.
- [26] Gomez, J. "A Thermodynamics Based Damage Mechanics Framework for Fatigue Analysis of Microelectronics Solder Joints with Size Effects". PhD Dissertation. University at Buffalo-SUNY., 2006.
- [27] Simo, J., and Hughes, T., (1998). *Computational Inelasticity.* Interdisciplinary applied mathematics. Springer.
- [28] Kashyap, B., and Murty, G., (1981). Experimental Constitutive Relations for the High Temperature Deformation of a Pb-Sn Eutectic Alloy. *Material Science and Engineering.*, 50, pp205-213.
- [29] Gomez, J., and Basaran, C(2005). A Thermodynamics Based Damage Mechanics Constitutive Model For Low Cycle Fatigue Analysis Of Microelectronics Solder Joints Incorporating Size Effects. *International Journal Of Solids And Structures.* Vol 42, pp 3744-3772.
- [30] Shu, J.Y. and Fleck, N.A. (1999) Strain gradient plasticity: size-dependent deformation of bicrystals.... *J.Mech.Phys.Solids*, Vol 47, 297-324.
- [31] Gao, H., and Huang, Y(2001). Taylor-based nonlocal theory of plasticity. *Int.J. Solids and Structures.*, 38, pp 2615-2637.
- [32] Chen, S., and Wang, T(2000). Anew Hardening Law fro Strain Gradient Plasticity. *Acta Materialia.*, 48., pp 3997-4005.
- [33] Wang, W., Huang, Y., Hsia, K., Hu, K., and Chandra, A.(2003). A study of microbend test by strain gradient plasticity. *International Journal of Plasticity.*, 19, pp365-382.