

CÁLCULO DEL VALOR EN RIESGO (VaR) EN EL DESPACHO HIDROTÉRMICO A MEDIANO PLAZO

Value at risk (Var) calculation in the hydrothermal dispatch at medium term

RESUMEN

El análisis de riesgos es una metodología destinada a facilitar la toma de decisiones debido a la incertidumbre implícita en los problemas reales. Una herramienta altamente utilizada, es el "Valor en Riesgo" (VaR) el cual es un método de medición del riesgo usado especialmente en análisis de tipo financiero. En este artículo, este método será aplicado al problema del despacho hidrotérmico para determinar el costo mínimo de operación que se puede garantizar ante la incertidumbre en las afluencias y la demanda.

PALABRAS CLAVES: Análisis de riesgos, valor en riesgo, despacho hidrotérmico, simulación de Montecarlo.

ABSTRACT

Risks analysis is a methodology destined to facilitate the decision making due to implicit uncertainty in real problems. A tool very used is the "Value at Risk" (VaR), which is a method to measure the risk used especially in finance analysis. In this article, this method will be applied to the hydrothermal dispatch problem to determine the guaranteed minimum operational cost due to the uncertainty in the affluence and the load.

KEYWORDS: Risks analysis, value at risk, hydrothermal dispatch, Montecarlo simulation.

1. INTRODUCCIÓN

Los sistemas eléctricos de potencia requieren herramientas que permitan determinar el comportamiento del mismo bajo condiciones de incertidumbre. El despacho hidrotérmico es una de estas herramientas y determina la relación adecuada entre generación hidráulica y generación térmica de tal forma que el costo operativo sea óptimo durante un periodo de tiempo. Garantizar un costo operativo mínimo, depende de la incertidumbre que afecta a las variables operativas como la disponibilidad del recurso hidráulico y la demanda del sistema. Ante estas condiciones, la toma de decisiones se debe realizar utilizando herramientas que minimicen el costo de operación y el riesgo asociado a ese costo de operación.

En este caso, se debe responder a la pregunta: ¿Es posible garantizar un determinado costo de operación del sistema de generación ante el comportamiento estocástico de las variables? Para dar respuesta a esta pregunta, es necesario la aplicación de herramientas de riesgo, las cuales parten de una visión probabilística del entorno, es decir, modelan las variables de operación como variables estocásticas, definiendo, la variable objetivo como estocástica.

En este artículo se propone una metodología para calcular el mínimo costo a garantizar en el despacho hidrotérmico, considerando, las curvas de costo de las plantas térmicas, las restricciones en la red de transmisión, la

ALEJANDRO GARCÉS RUIZ

Ingeniero Electricista, M.Sc
Docente Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
alejandrogarcés@gmail.com

OSCAR GÓMEZ CARMONA

Ingeniero Electricista, M.Sc
Docente Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira
jr@utp.edu.co

incertidumbre en el pronóstico de la demanda y la aleatoriedad en el recurso hídrico.

Es importante notar que en Colombia, debido a la existencia del mercado de energía eléctrica, el despacho hidrotérmico se constituye en un planeamiento indicativo denominado planeamiento energético a diferencia del planeamiento de la expansión de la transmisión (planeamiento eléctrico) el cual es obligatorio.

2. DESPACHO HIDROTÉRMICO

Para un sistema eléctrico de potencia con generación térmica e hidráulica, el despacho hidrotérmico asigna a cada una de las centrales la generación óptima, de tal forma que minimice el costo operativo total considerando las restricciones de operación, disponibilidad del recurso hídrico y abastecimiento total de la demanda.

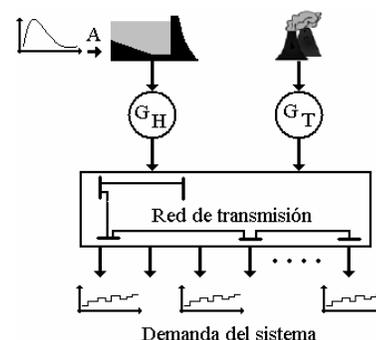


Figura 1. Despacho hidrotérmico

El problema del despacho hidrotérmico, se puede resolver a largo, mediano y corto plazo. A largo plazo, el horizonte varía entre uno y cinco años, utilizando etapas anuales o trimestrales, dependiendo de la capacidad de regulación de los grandes embalses. A mediano plazo el horizonte de estudio es generalmente un año y tiene como objetivo realizar la programación mensual o semanal de la generación; la información con la que se cuenta es más detallada que para el caso de largo plazo y está compuesta por la predicción de demanda y de disponibilidad del recurso hídrico. Finalmente, el despacho hidrotérmico a corto plazo determina la programación horaria que cumple requerimientos de confiabilidad, seguridad y economía del sistema. La principal dificultad de este problema radica en el acople temporal de las centrales de generación hidráulica haciendo que una decisión operativa presente afecte la operación futura del sistema (problema dinámico).

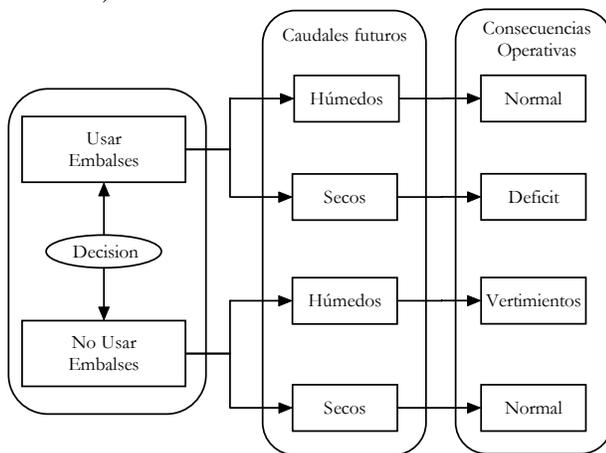


Figura 2. Acople temporal del despacho hidrotérmico

La dependencia con la hidrología y la demanda hace que el problema sea estocástico, por tanto, es posible encontrar una buena predicción de las afluencias (a mediano plazo), mediante el uso de técnicas probabilísticas [1], series de tiempo o técnicas inteligentes [2, 3]. Para que la solución sea alcanzable, algunas veces se recurre a la simplificación del problema eliminando la red de transmisión, asumiendo un comportamiento determinístico de las variables y linealizando función objetivo. Este problema ha sido ampliamente documentado [4] y se han presentado soluciones mediante diferentes métodos, tales como, la programación dinámica (determinística y estocástica) [5, 6, 7], programación lineal y entera [8], relajación lagrangiana [9], algoritmos de optimización combinatorial [10, 11, 12, 13], métodos de puntos interiores [14] y métodos híbridos [15, 16].

En la literatura internacional, algunos trabajos consideran la característica estocástica de la demanda y la hidrología mediante métodos estadísticos [17,18], funciones de membresía fuzzy [19] y análisis de escenarios [20]; pero hasta el momento, no se han utilizado técnicas de simulación probabilística para determinar el comportamiento aleatorio del despacho.

3. ANÁLISIS DE RIESGOS

La palabra riesgo se puede definir como todo aquello que atente con el logro de un objetivo. Inicialmente el análisis de riesgo se planteó como riesgo de mercado, pero pronto se amplió a otros tipos, como es el riesgo de crédito y el riesgo operacional.

En las actividades económicas, los riesgos están estrechamente relacionados con las ganancias, por lo que a mayor riesgo, mayores ganancias, creando un dilema entre lo que se desea ganar y lo que se está dispuesto a arriesgar [21].

En toda actividad (económica, crédito, operacional, etc.) los riesgos están presentes sin que se puedan eliminar, pero se pueden administrar buscando un menor impacto y exposición al mismo. Además, los riesgos están asociados a variables aleatorias las cuales crean un clima de incertidumbre, por tanto, la elección de las variables a modelar de forma estocástica, así como su representación en modelos estocásticos adecuados, afecta de manera determinante la calidad de los resultados obtenidos mediante las herramientas de riesgo.

3.1 Herramientas de riesgo

En la práctica, los modelos de riesgo, caracterizan la distribución de probabilidad de la “variable objetivo” mediante medidas de riesgo. Algunas de las herramientas estándar a nivel internacional para la medición cuantitativa del riesgo, son las llamadas “Valor en Riesgo” (*VaR*) y “Valor en Riesgo Condicional” (*CVaR*).

El *VaR* permite saber cuanto se quiere arriesgar, es decir, la máxima pérdida que podría tener un activo en un periodo según un nivel de confianza. El *VaR* se define como la distancia desde la media de la distribución de probabilidad del beneficio hasta el centil $(1 - \beta)$ de dicha distribución de probabilidad, donde β indica el nivel de confianza deseado. [21]

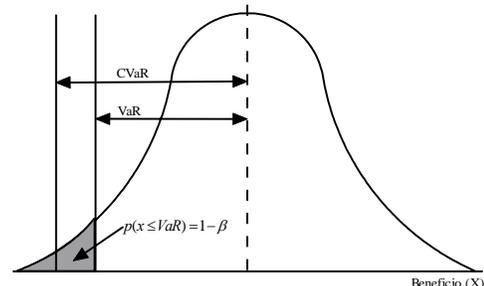


Figura 3. Interpretación gráfica del *VaR*

Para calcular el *VaR*, es necesario determinar la distribución de probabilidad $f(x)$ y la función acumulada de probabilidad $F(x)$ de la variable objetivo. A partir de la función de distribución de probabilidad inversa $F^{-1}(x)$ se puede obtener el *VaR* para un nivel de confianza β determinado (ver Figura 4):

$$p(x \leq VaR) = 1 - \beta \quad (1)$$

$$p(x \leq VaR) = F(VaR) = 1 - \beta \quad (2)$$

$$VaR = F^{-1}(1 - \beta) \quad (3)$$

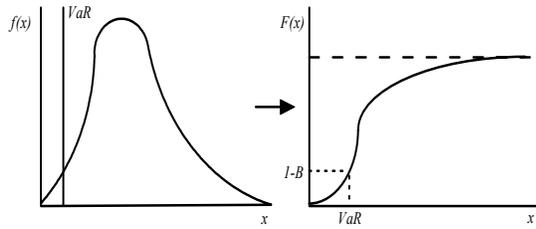


Figura 4. Interpretación gráfica del VaR en la función acumulada.

4. CÁLCULO DEL VaR EN EL DESPACHO HIDROTÉRMICO A MEDIANO PLAZO.

Para calcular el VaR en el despacho hidrotérmico, es necesario definir la variable objetivo y las variables operativas. La variable objetivo o de decisión es aquella que depende de la incertidumbre en las variables operativas y su comportamiento se puede obtener mediante experimentos con el modelo matemático que la representa, por ejemplo, mediante simulación de Montecarlo. En el despacho hidrotérmico, la variable objetivo es el costo operativo en el periodo de estudio.

4.1 Variables operativas

Entre las variables operativas se encuentran: los coeficientes de costo de las plantas térmicas, los parámetros de la red de transmisión, el pronóstico de la demanda y las afluencias. De las anteriores variables, existe una incertidumbre implícita en la demanda y las afluencias pronosticadas.

a. Modelamiento de la demanda.

La demanda futura del sistema eléctrico de potencia, es un fenómeno aleatorio que depende de variables económicas, demográficas, políticas y sociales; y no es posible determinar en forma exacta cuál será su valor futuro. Para determinar la demanda futura y su comportamiento, se realizan dos tipos de estudios: pronóstico de la demanda (load forecasting), en el cual se predice para un año futuro el valor de la demanda máxima dentro de un rango probable de ocurrencia (incertidumbre) y modelamiento de la demanda (load modeling), en el que se captura el patrón de comportamiento.

Para modelar la demanda, se utilizarán curvas de demanda de potencia mensual para cada nodo de carga del sistema tal forma que coincida con el modelamiento a mediano plazo y se conserven los comportamientos típicos de demanda, además, se considerará un nivel de incertidumbre en el pronóstico de la demanda (Figura 5).

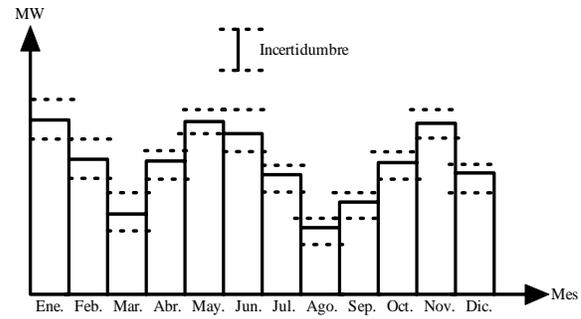


Figura 5. Modelamiento de la demanda

b. Recurso hídrico.

Muchas investigaciones realizadas sobre despacho hidrotérmico, asumen que existe total certidumbre sobre el suministro de los recursos hidráulicos, es decir el suministro es 100% confiable. Realmente, en el caso de plantas hidráulicas con embalses de poca regulación, la capacidad de generación disponible en un momento es una variable que depende de la hidrología, la cual esta controlada por fenómenos climatológicos que son de naturaleza aleatoria. Dado que se está realizando un despacho hidrotérmico a mediano plazo, se modelará las afluencias mediante funciones de probabilidad mensual, es decir, cada mes tendrá su propio modelo de probabilidad de tal forma que se conserva la dependencia hidrológica con el tiempo (meses lluviosos y secos).

4.2 Formulación del modelo matemático del problema

Se utiliza el modelo matemático presentado en [22] y que se muestra en las ecuaciones 4 – 13.

$$Min \Psi = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{N_T} \psi_{(i,t)} \quad (4)$$

s.a.

$$\psi_{(i,t)} = \frac{c_{(i,t)}}{2} \cdot P_{(i,t)}^2 + e_{(i,t)} \cdot P_{(i,t)} \quad (5)$$

$$V_{(j,t+1)} = V_{(j,t)} + \tau \cdot (A_{(j,t)} - Q_{(j,t)} - S_{(j,t)}) \quad (6)$$

$$P_{(j,t)} = \rho_{(j)} \cdot Q_{(j,t)} \quad (7)$$

$$P_{(i,t)} \Big|_{\text{mod}(i)=k} + P_{(j,t)} \Big|_{\text{mod}(j)=k} - D_{(k,t)} = \sum_{m=1}^N B_{km} \cdot \theta_m \quad (8)$$

$$-f_{km} \leq \frac{\theta_k - \theta_m}{x_{km}} \leq f_{km} \quad (9)$$

$$P_{\min(i,t)} \leq P_{(i,t)} \leq P_{\max(i,t)} \quad (10)$$

$$Q_{\min(j,t)} \leq Q_{(j,t)} \leq Q_{\max(j,t)} \quad (11)$$

$$V_{\min(j,t)} \leq V_{(j,t)} \leq V_{\max(j,t)} \quad (12)$$

$$0 \leq S_{(j,t)} \leq S_{\max(j,t)} \quad (13)$$

donde:

- i : indexa las plantas térmicas.
- j : indexa las plantas hidráulicas.
- T : cantidad de períodos.
- t : índice de período de tiempo.
- N_T : número de plantas térmicas
- k,m : indexan los nodos del sistema.
- P : potencia generada por cada unidad.
- D : demanda en cada nodo por periodo.
- ψ : función de costo de las plantas térmicas.
- Ψ : costo total de operación.
- V : volumen de cada embalse por periodo.
- Q : caudal turbinado de cada embalse por periodo.
- S : vertimientos de cada embalse por periodo.
- A : afluencia
- f : flujo de potencia máximo por cada línea.
- B : matriz de flujo DC.
- X : reactancia por línea.
- ρ : factor de turbinamiento.
- θ : ángulos nodales.
- c(i,t),e(i,t): coeficientes de costo
- τ : factor de conversión de caudal en volumen

4.3 Solución del modelo matemático

El modelo matemático del problema del despacho hidrotérmico, es solucionado mediante la técnica de Puntos Interiores (método de barrera logarítmica) presentado en [14].

4.4 Simulación de Montecarlo

La simulación de Montecarlo es una técnica que permite obtener el comportamiento de un escenario real, a través de experimentos con el modelo matemático que lo representa. Permite obtener información cuantificable, sobre diferentes escenarios que puedan ocurrir, facilitando la toma de decisiones. Su ventaja radica en el hecho de que considera la probabilidad de ocurrencia de los eventos y observa el efecto en el sistema. La simulación de Montecarlo aplicada al problema del despacho hidrotérmico consiste en la ejecución de los siguientes pasos:

1. Se genera un valor de afluencia para cada mes y para cada planta hidráulica del sistema mediante un número aleatorio uniformemente distribuido y la distribución de probabilidad respectiva de afluencia.
2. Se genera un valor de demanda en cada punto de carga para cada mes mediante un número aleatorio uniformemente distribuido y el rango de incertidumbre en el valor esperado de demanda mensual.
3. Se realiza el despacho hidrotérmico para las condiciones de afluencia y demanda generadas.
4. Se almacena el costo de generación, la generación hidráulica y térmica.

5. Se verifica criterio de parada (máximo número de iteraciones alcanzadas, coeficiente de variación y estabilidad de la simulación), si no se ha cumplido ir al paso 1 de lo contrario, ir a 6.
6. A partir de las observaciones de costos, generaciones hidráulicas y térmicas obtenidas, construir las respectivas distribuciones de probabilidad que modelen el posible comportamiento de estas variables aleatorias.

5. CASO DE ESTUDIO

El modelo propuesto es aplicado al sistema presentado en [23] con las siguientes modificaciones:

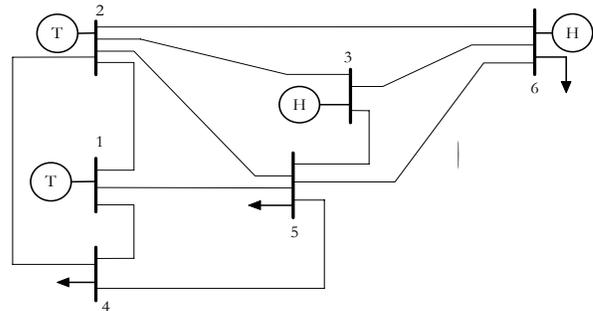


Figura 6. Caso de prueba.

Nodo	a / 2	B	P _{max} [pu]	P _{min} [pu]
1	108	1166.9	2	0
2	176	1033.3	1.5	0

Tabla 1: Plantas térmicas.

Nodo	Factor Turbinamiento	Vinicial	Vfinal	Vmax	Vmin
3	1	20	0	25	5
6	1	15	0	25	5

Tabla 2: Plantas hidráulica

Nodo	Demanda máxima
4	0.95 ± 5%
5	0.90 ± 5%
6	0.95 ± 5%

Tabla 3: Demanda máxima esperada del sistema.

Nodo \ Mes	4	5	6
Enero	0.8492	0.9189	0.8595
Febrero	0.9256	0.8870	0.9035
Marzo	0.9669	0.9065	0.9904
Abril	0.7209	0.7602	0.9124
Mayo	0.6616	0.7960	0.9124
Junio	0.7274	0.7695	0.9406
Julio	0.8488	0.8601	1.0000
Agosto	0.7262	0.8002	0.9152
Septiembre	0.8987	0.7592	0.8579
Octubre	1.0000	0.7957	0.8826
Noviembre	0.9779	0.8272	0.8574
Diciembre	0.9747	1.0000	0.8779

Tabla 4: Comportamiento de la demanda del sistema.

Planta hidráulica 1			Planta hidráulica 2		
Modelo	Alpha	Beta	Modelo	Alpha	Beta
Weibull	11.2889	2.5134	Weibull	64.4569	2.5134
Weibull	8.0687	2.0814	Weibull	34.1476	2.0814
Weibull	7.7727	2.2231	Weibull	36.2900	2.2231
Weibull	9.6440	3.1686	Weibull	86.7134	3.1686
Weibull	15.8163	3.9968	Weibull	252.5053	3.9968
Weibull	44.4621	3.7142	Weibull	583.5523	3.7142
Weibull	31.4378	2.6134	Weibull	192.3844	2.6134
Weibull	18.9764	1.9723	Weibull	83.5514	2.0282
Weibull	10.3612	1.8416	Weibull	40.4809	1.8890
Weibull	12.0016	3.4881	Weibull	134.6639	3.4881
Weibull	5.4225	3.4684	Weibull	60.0192	3.4684
Normal	0.4642	0.1967	Normal	0.2321	0.0984

Tabla 5: Modelo probabilístico de las afluencias mensuales

De la Tabla 5, alpha y beta corresponden a los parámetros de escala y forma respectivamente, de las funciones de probabilidad para cada mes del año. Los modelos anteriores se construyeron a partir de los datos reportados en [24] que consisten del registro de caudales promedios mensuales para un periodo de 35 años del río Otún en la ciudad de Pereira-Colombia. Estos datos fueron normalizados entre 0 y 1 para la correspondencia con los datos mostrados en la Tabla 2, además, se asumió una afluencia en la planta 1 del doble de la planta 2.

5. RESULTADOS

Se realizaron 211 simulaciones para obtener la convergencia de la variable de decisión (costo operativo) la cual se verificó mediante la ley de los grandes números (el valor esperado de la función de probabilidad que ajusta los datos y el promedio de los datos tienden al mismo valor) como se muestra en la Figura 7.

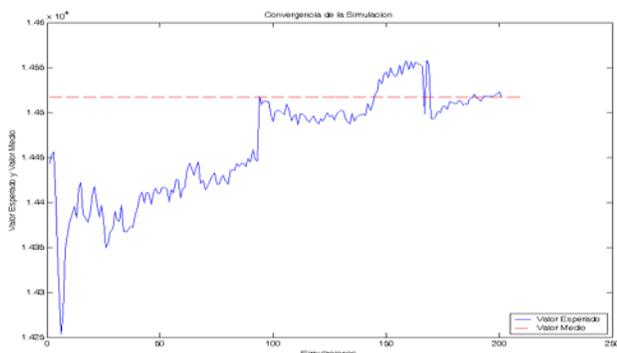


Figura 7. Convergencia de la simulación.

Mediante el histograma de datos de la variable aleatoria bajo estudio (Figura 8) se selecciona una o más funciones de densidad de probabilidad continuas que tengan forma similar al histograma. Para la distribución propuesta se estiman sus parámetros a partir de los datos utilizando el

método de la máxima verosimilitud [25] y finalmente utilizando la prueba de bondad de ajuste Kolmogorov-Smirnov; con una probabilidad crítica del 5% se determina cuál de las distribuciones propuestas es aceptada [26]. La distribución de probabilidad que mejor ajusta los datos es una distribución normal con parámetros $\mu=14516.95$ y $\sigma=686.68$.

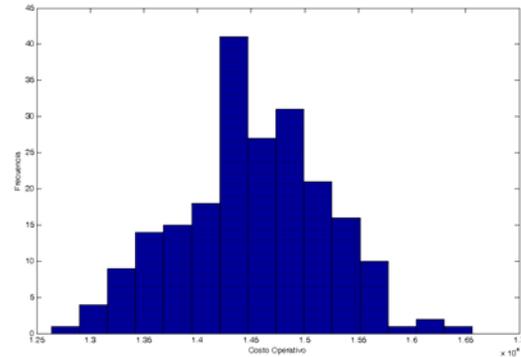


Figura 8. Histograma de frecuencias de la variable objetivo.

5.1 Cálculo del VaR

Para la variable en cuestión (Costo Operativo), el VaR se puede interpretar, como el mínimo costo operativo que se puede garantizar con un nivel de confianza del 95%, dada la aleatoriedad en las variables operativas. Este valor se encontraría en la cola derecha de la gráfica, por lo tanto, considerando β como el intervalo de confianza, se tiene:

$$p(x \leq VaR) = \beta \tag{14}$$

que corresponde al área sombreada en la figura 10. El VaR se determinaría de la ecuación:

$$VaR = F^{-1}(\beta) \tag{15}$$

para este caso, dado que se tiene una distribución de probabilidad normal, implica encontrar el valor de x tal que:

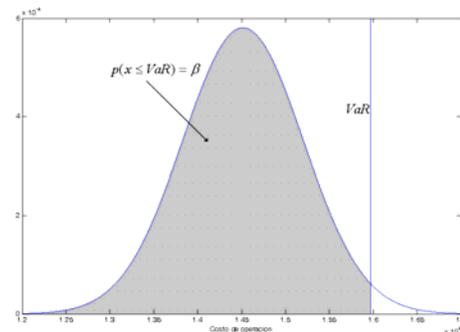


Figura 10. Interpretación del VaR en el despacho hidrotérmico

$$p = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \Pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}} \cdot dt \tag{16}$$

lo que corresponde a la función inversa de la normal. Para un nivel de confianza del 95%, el mínimo costo operativo que se puede garantizar es de **15646,43** unidades de costo.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

La técnica de simulación de Montecarlo es una herramienta eficiente en problemas dependientes de variables estocásticas. Por medio de esta herramienta se pueden obtener gran cantidad de muestras de los posibles escenarios de operación permitiendo la realización de cálculos adicionales que no pueden ser realizados mediante técnicas determinísticas.

Mediante técnicas de inferencia estadística, el resultado obtenido mediante la simulación de Montecarlo, se puede aproximar a una distribución de probabilidad continua por lo que el cálculo del *VaR* se realiza usando un modelo continuo de la variable objetivo.

A diferencia de las aplicaciones convencionales del *VaR* en donde se trata de un beneficio económico, en el despacho hidrotérmico la variable objetivo corresponde a los costos operativos por lo que la definición matemática del *VaR* debe ser ajustada.

El *VaR*, en el caso del despacho hidrotérmico, es una herramienta importante en la toma de decisiones operativas así como en el planeamiento de la expansión de la generación, dado que permite calcular los costos asegurados del sistema con un nivel de confianza determinado.

El *VaR* obtenido para el problema de despacho hidrotérmico es un valor indicativo del máximo costo de operación del sistema de generación, ante la incertidumbre en las variables operativas y puede ser utilizado en el análisis operativo del sistema así como en el planeamiento de la generación.

Esta metodología puede ser igualmente aplicada a otras variables de interés en el despacho hidrotérmico, como el costo de oportunidad del agua o la probabilidad de racionamiento. Adicionalmente, la metodología se puede extender a problemas eléctricos con características estocásticas cambiando el modelo matemático y su metodología de solución.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1]. Romero Carlos A. y Vahos Mauricio A. "Modelamiento del caudal de un río para estudios de confiabilidad". Proyecto de grado en ingeniería eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira. Jul 2006.
- [2]. Velásquez H. David y Zapata G. Catalina. "Pronóstico del caudal medio mensual, con una ventana de 12 meses, usando sistemas difusos" Proyecto de Investigación. Universidad Nacional De Colombia - Medellín-UNCM. 2004
- [3]. Obregón, N., Fragala, F. y Prada, L. F. "Redes neuronales artificiales en hidroinformática". Seminario: La Hidroinformática en la Gestión Integrada de los Recursos Hídricos.
- [4]. Prasad Padhy Narayana. "Unit commitment – A bibliographical survey". IEEE Trans. Power Syst, VOL. 19, NO. 2, MAY 2004
- [5]. U. Aytun Ozturk, Mainak Mazumdar, and Bryan A. Norman. "A solution to the stochastic unit commitment problem using chance constrained programming". IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 3, august 2004.
- [6]. W. L. Snyder, Jr., H. D. Powell, Jr., and J. C. Rayburn, "Dynamic programming approach to unit commitment," IEEE Trans. Power Syst., vol. , pp. 339–347, May 1987.
- [7]. P. G. Lowery, "Generating unit commitment by dynamic programming," IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-85, pp. 422–426, May 1966.
- [8]. A. I. Cohen and M. Yoshimura, "A branch- and -bound algorithm for unit commitment," IEEE Trans. Power App. Syst., vol. PAS-102, pp. 444–451, Feb. 1983.
- [9]. N. R. Jimenez and A. J. Conejo, "Short-term hydro thermal coordination by Lagrangian Relaxation: Solution to the dual problem," in Proc. IEEE Power Eng. Soc. Winter Meeting, 1998.
- [10]. A. H. Mantawy, Y. L. Abdel-Magid, and S. Z. Selim, "Unit commitment by Tabu search," Proc. Inst. Elect. Eng., Gen. Transm. Dist., vol. 145, no. 1, pp. 56–64, Jan. 1998.
- [11]. A. H. Mantawy, Y. L. Abdel-Magid, and S. Z. Selim. "A simulated annealing algorithm for unit commitment". IEEE Trans. Power Syst., vol. 13, p. 197–204, Feb. 1998.
- [12]. K. S. Swarup and S. Yamashir. "Unit commitment solution methodology using genetic algorithm," IEEE Trans. Power Syst., vol. 17, pp. 87–91, Feb. 2002.
- [13]. N. S. Sisworahardjo and A. A. El-Kaib, "Unit commitment using ant colony search algorithm". Proc. 2002 Large Eng. Syst. Conf. Power Eng., 2002, pp. 2–6.
- [14]. Correa Carlos A., Bolaños Ricardo A. y Garcés Ruiz Alejandro. "Metodos no lineales de Puntos Interiores aplicados al problema del despacho hidrotérmico". Scientia et Technica Año XI, No 29, Diciembre de 2005. UTP. ISSN 0122-1701
- [15]. A. H. Mantawy, Y. L. Abdel-Magid, and S. Z. Selim. "Integrating genetic algorithms, Tabu search and simulated annealing for the unit commitment problem," IEEE Trans. Power Syst., vol. 14, pp. 829–836, Aug. 1999.
- [16]. C.-P. Cheng, C.-W. Liu, and C.-C. Liu, "Unit commitment by Lagrangian Relaxation and genetic algorithm," IEEE Trans. Power Syst., vol. 15, pp. 707–714, May 2000
- [17]. U. Aytun Ozturk, Mainak Mazumdar, and Bryan A. Norman. "A solution to the stochastic unit commitment problem using chance constrained programming". IEEE Transactions on Power Systems, vol. 19, no. 3, august 2004.
- [18]. Jeong-Do Park, Young-Hyun Moon and Hyun- Jong Kook "Stochastic analysis of the uncertain hourly load demand applying to unit commitment problem". 0-7803-6420-1 (c) 2000 IEEE
- [19]. Ahmed Y. Saber, Tomonobu S, Tsukasa Miyagi, Naomitsu Urasaki and Toshihisa Funabashi., "Fuzzy unit commitment scheduling using absolutely stochastic simulated annealing". IEEE Trans. Power Systems, Vol. 21, No. 2, May 2006.
- [20]. Samer Takriti, John R. Birge, and Erik Long. "A stochastic model for the unit commitment problem". IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 11, No. 3, August 1996.
- [21]. SANZ Amaya Miguel, Ocampo Hernandez Alexander. "Técnicas de medición de riesgos aplicadas a mercados eléctricos". Proyecto de Grado para optar al título de ingeniero electricista. Universidad Tecnológica de Pereira. 2006.
- [22]. GIL, Esteban; BUSTOS Julian; RUDNICK Hugh; "Short-Term hydrothermal generation scheduling model using a genetic algorithm". IEEE Trans. Power Syst. Vol 18 N° 4. Nov 2003.
- [23]. Word Allen, Wollenberg Bruce. Power generation, operation and control. John Wiley & sons. 1984.
- [24]. Romero Carlos A. y Vahos Mauricio A. "Modelamiento del caudal de un río para estudios de confiabilidad". Proyecto de grado en ingeniería eléctrica. Universidad Tecnológica de Pereira. Jul 2006.
- [25]. I. R. Miller, J. E. Freund, R. Johnson, Probability and Statistics for Engineers, Prentice Hall, 1992.
- [26]. A. M. Law, D. W. Kelton, "Simulation Modeling and Analysis", Mc-Graw Hill, 2000.