

CORRECCIÓN DE LA DISTORSIÓN DE IMÁGENES EN EQUIPOS ÓPTICOS POR MEDIO DE SPLINES Y TÉCNICAS DE ANÁLISIS DE IMÁGENES.

Images distortion correction for optical devices by means of splines and image possessing techniques.

RESUMEN

El siguiente trabajo plantea paso a paso una posible solución al problema de la corrección de la distorsión en imágenes de cualquier equipo óptico. Mediante técnicas de filtrado de imágenes, convolucion y procedimientos matemáticos como el de los splines o interpolaciones de superficies deformadas. Entregando de esta manera un método, práctico y efectivo para puesta en punto por un ingeniero en los procesos de calibración y ajuste de equipos procesadores de imágenes como cámaras, fluoroscopios o scanner entre otros.

DELIA JOHANNA MUÑOZ

Estudiante

Universidad Tecnológica de Pereira

Delia.johanna@gmail.com

PALABRAS CLAVES: Imagen, distorsión, spline.

ABSTRACT

The following work shows step by step a solution for Problem of images distortion correction on any kind of optical devices. It uses image filtration, convolutions and mathematical techniques like Thin-Plate Spline and decomposition of deformations. So, it's giving a very good method to be used by engineers in the image processing and cameras, fluoroscopes or scanner's calibration among others.

KEY WORDS: Image, distortion, spline.

1. INTRODUCCIÓN

En todo equipo óptico se presenta con frecuencia el fenómeno de la distorsión, desde una cámara fotográfica casera hasta un avanzado fluoroscopio para registrar imágenes médicas, son susceptibles a sufrir problemas de distorsión en su focalización y por ende en las imágenes que reproducen. Obviamente para algunos casos un poco de distorsión en la imagen no produce ningún problema para los fines que se requiere, en otros por ejemplo es aceptable un ajuste manual de la lente para eliminar lo mayor posible el factor de distorsión y así reducirlo al punto de que sea casi imperceptible para el ojo humano. Pero en casos mas técnicos e investigativos como la microscopia, el registrado de imágenes medicas, la scanografía CT o la fluoroscopia entre otros, la distorsión es un problema que debe ser atacado con técnicas potentes de ingeniería, puesto que aun siendo imperceptible para la vista humana, dependiendo de la aplicación específica, se pueden generar problemas de gran envergadura en un proceso o en los resultados, gracias a una persistencia de distorsión leve en el equipo utilizado.

El problema de la distorsión como tal es un problema netamente físico donde intervienen las propiedades de las lentes y de los rayos de luz, en ocasiones imposible de solucionar en su totalidad debido a la complejidad en el manejo de medidas de ajustes de ordenes menores a las micras. Afortunadamente el problema se puede abordar no desde el punto de vista físico, esto quiere decir no corrigiendo en el aparato como tal, sino en la imagen que

este produce, con la ayuda de una computadora y la programación de técnicas específicas.

Para un mejor acercamiento al problema la figura 1 muestra una común y para todos nosotros, familiar distorsión en la imagen de una cámara fotográfica, también se puede observar la misma imagen después de una corrección.



Figura 1. a. Imagen con distorsión b. imagen corregida.

La figura 2 por su parte nos muestra las representaciones de las dos clases de distorsión más comunes en los aparatos ópticos, la de barril y la de acerico, además como luciría la ausencia de ambas en la imagen.

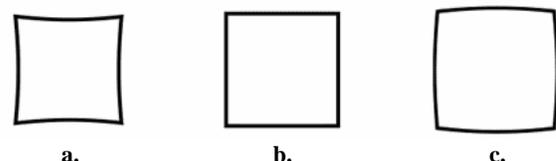


Figura 2. Distorsiones: a. Acerico b. Nula c. Barril.

Es importante aclarar que las técnicas que en este texto se tratarán se aplican a la corrección de cualquier clase de distorsión.

2. DESCRIPCIÓN EL PROBLEMA

Para corregir la distorsión en la imagen de una aparato óptico cualquiera que este sea, necesitamos una objeto de calibración, en este caso particular dicho objeto es una rectángulo de acrílico blanco que posee grabada en su cara frontal una grilla de 11x11 puntos, perfectamente medidos y ajustados a una distancia de tres centímetros entre cada punto (de la exactitud milimétrica del ajuste de los puntos de esta grilla, depende en gran parte la calidad de la corrección en la distorsión). Luego de ajustar manualmente lo máximo posible nuestro equipo óptico, tomamos con él, una imagen de alta calidad del objeto de calibración en la cual la grilla de puntos sea el objetivo primordial. Al hablar de alta calidad se habla de una imagen perfectamente frontal y sin movimiento, con la mejor resolución posible y además suponiendo que el equipo esta empotrado en la posición justa donde continuará registrando imágenes después de la calibración (para referirnos a algo mas común, lo anterior podría ser una cámara acomodada en su respectivo trípode).

Luego de obtener dicha imagen obviamente esta registrará de manera cuantificable el factor de distorsión actual en el equipo, pues la grilla de la imagen será nada más que una representación de nuestra grilla de calibración pero distorsionada (quiere decir que los puntos en la imagen ya no estarán perfectamente equidistantes, sino separados según la distorsión actual). De manera que en este momento en la imagen contamos con dos cosas: la posición distorsionada de los puntos en la imagen (habrá que averiguarla analizando la imagen) y la posición DESEADA de los puntos en la imagen, esto es debido a que la posición de los puntos en una imagen con distorsión nula, debería ser igual o proporcional a la de los puntos en nuestro objeto de calibración, y por tanto con un espacio igual entre todos ellos.

Por lo tanto y asumiendo en este caso que la imagen es del tamaño real del objeto de calibración (quiere decir que cualquier distancia en la imagen es igual en el objeto o que no hay factor de magnitud que intervenga, imagen calibrada), nuestro problema se divide en dos partes fundamentales. La primera es hallar la posición real de los puntos de la grilla en la imagen por medio de un tratamiento de análisis. Y la segunda teniendo las posiciones obtenidas en la primera parte (Posición real en la imagen) y las posiciones deseadas en la imagen para una imagen no distorsionada (las posiciones equidistantes de la grilla en el objeto real). Asumiremos las posiciones deseadas como un conjunto de n puntos $P = \{P_1, P_2, P_3 \dots P_n\}$, pertenecientes a R^2 y muestreados de una superficie S (plano), y las posiciones reales en la imagen como la representación de los mismos puntos anteriores,

pero si la superficie S se hubiese deformado deformándose en S' , así $V=P' = \{P'_1, P'_2, P'_3 \dots P'_n\}$. Y con estos dos conjuntos de puntos trataremos de interpolar la superficie deformada S' en su totalidad, puesto que ya conocemos la posición donde debería estar o posición deseada para cada P_i , $i: 1,2,3 \dots n$, pero nos interesa conocer la posición deseada de todos los demás puntos distorsionados (ósea que pertenecen a S') pero que no necesariamente están sobre la grilla o el conjunto V que es lo mismo al resto de puntos que rellenan la foto.

La figura 3 Muestra la imagen tomada al objeto de calibración (se ha punteado una línea para que se pueda ver la distorsión en una serie de puntos). También se muestra la representación de estos puntos después de su localización en la imagen, V . Finalmente muestra la representación de la grilla perfecta P , y una sobre posición de los puntos V sobre los P para captar con más facilidad la distorsión actual en el equipo.

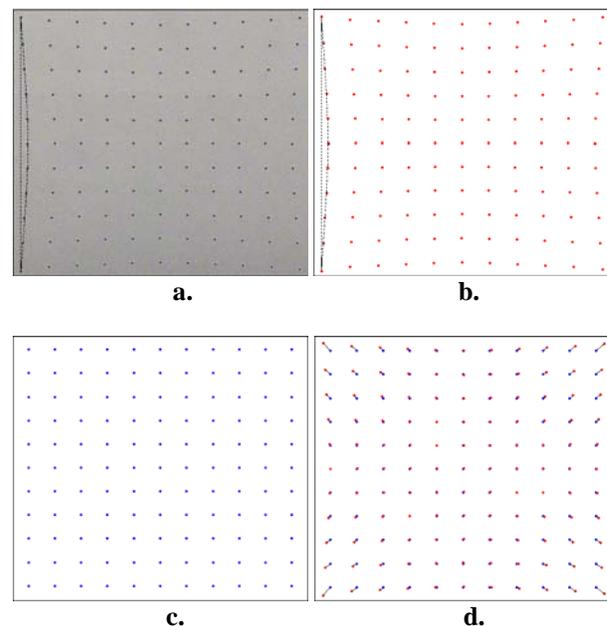


Figura 3. a. Foto tomada al objeto de calibración
b. Representación de la ubicación de los puntos de la Foto V.
c. Representación de la ubicación de la grilla real P.
d. Sobre posición de a y b, para mostrar la distorsión

Observemos pues que la figura 3 (c) nos muestra los puntos P que supuestamente muestreamos de un plano o superficie S y la misma figura 3 (b) enseña el muestreo de los mismos puntos anteriores pero si antes hubiésemos deformado a S (efecto de la distorsión). Imaginemos entonces que en este caso y para una distorsión de acerico, la deformación de S no fue mas que haber tomado sus 4 esquinas y haber tirado un poco hacia fuera como se observa mejor en (d), y por lo tanto aun la superficie S' sigue siendo en dos dimensiones (no hubo deformación en el eje Z o de altura) de modo que podemos asumir una deformación de solo dos dimensiones, no obstante los métodos a tratar a continuación podrían aplicarse a una deformación mas

complejas donde se deforme la coordenada Z y las superficies se salgan entonces de un plano. Estos casos ya son distorsiones severas en una lente y poco comunes en la práctica.

Para obtener una imagen sin distorsión a partir de la distorsionada debemos transformar todos los puntos de la posición real a su posición ideal, esto es inmediato para los puntos de la grilla, pues conocemos de antemano su posición ideal, pero para los puntos intermedios de la grilla y que conforman la imagen en su totalidad interpolaremos la superficie deformada S' y averiguaremos la correspondencia de todo punto de S' en S , ósea la posición no distorsionada en la imagen, de todo punto distorsionado de la imagen, independiente mente de si el punto pertenece o no a la grilla, pues la imagen la conforman todos los puntos que pertenecen a S y/o S' , así que podemos decir con razón que S es un plano que representa la foto de donde obtuvimos unas muestras P y S' es la superficie que representa a la imagen distorsionadas de donde obtuvimos unas muestras V para con la ayuda de P interpolarla en su totalidad y poder averiguar la correspondencia uno a uno de esta con la superficie o imagen no distorsionada S .

3. DETECCIÓN DE PUNTOS (MARKERS)

Entra al sistema un la imagen en escala de grises (cada píxel varia de 0 "negro" hasta 255 "blanco") y la figura 4 (a) nos muestra un acercamiento a gran escala de cómo luciría un punto a detectar en dicha imagen.

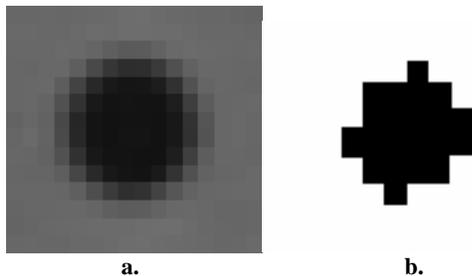


Figura No 4. a. Acercamiento a un punto de la imagen
b. El mismo punto después de aplicar un filtro de corte.

Por lo tanto debemos halla la posición del centro de cada uno de los puntos que trae la imagen, teniendo en cuenta que en la practica estos puntos no son círculos perfectos ni siquiera tienen un perímetro definido. El procedimiento para calcular sus centros es el siguiente:

Se usa un filtro de corte con cierto umbral para que polarice la imagen a blancos y negros (por ejemplo todo valor menor 155 se convierte en 0 y mayor se convierte a 255). El resultado de esta filtración para un punto de la imagen se muestra en la misma figura 4 (b) y así será para todos los puntos de la imagen. Luego de tener dicha imagen en estos términos es fácil ubicar una posición medianamente acertada de cada punto negro, por ejemplo se puede diseñar una algoritmo recursivo que busque manchas negras en la imagen y las mida, entregándonos

la posición de su centro de masa. Así obtendremos una posición (no exacta aun) del centro de cada punto.

Luego de obtener estos puntos visitamos cada una de esas posiciones en la imagen original y hacemos un cotejo (convolución) entre el punto que allí se encuentra y un punto modelo que poseamos y que es perfecto, obteniendo ahora si el centro real para cada uno de los puntos, de la siguiente manera:

Llegamos a la posición donde hallaremos un pequeño punto como el que muestra la figura 4 (a), el cual tiene unas medidas de unos pocos píxeles (talvez 8x8). Inmediatamente le hacemos un sample (en términos de análisis de imágenes) a ese sector de la imagen, ósea la muestreamos unas diez veces su tamaño real para obtener un punto mejor definido como el que muestra la figura 5 (a). Luego podemos observar que de manera matemática y sabiendo que cada píxel varia de 0 a 255, podemos ver esta figura como una gausiana con centro o máximo en el mismo lugar del centro del punto (obviamente no será en la practica una gausiana perfecta pero gracias al sample o muestreo tratará al máximo de lucir como eso), luego un marker modelo y prefabricado seria nada mas que una gasusiana de similares proporciones y esta sí perfecta, como la que muestra la figura 5 (b). Al realizar una operación de convolución entre estas dos gausianas usando como mascara el modelo, y teniendo presente el concepto de convolución de funciones, estamos seguros que el resultado será otra función gausiana cuyo máximo (centro) indicará el lugar donde se cruzó el centro de nuestra mascara modelo con el centro de nuestro punto aumentado, así hallaremos con una precisión de 0.1 píxeles (si aumentamos la imagen 10 veces, lo que se conoce como sample [1]) el centro de nuestro punto objetivo.

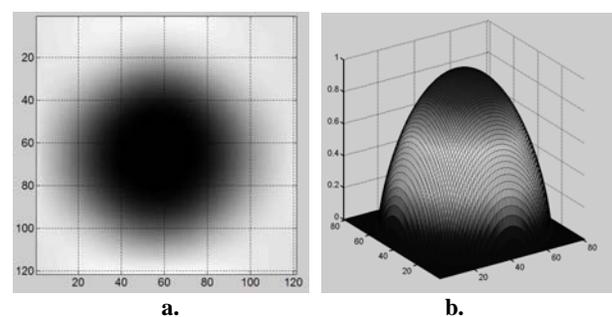


Figura 5. a. Punto de la figura 4 (a) muestreado diez veces su tamaño b. representación matemática de un punto modelo para mascara de convolución.

4. RECONSTRUCCIÓN DE LA IMAGEN

Enfoquemos el problema de reconstruir una imagen sin distorsión a partir de su respectivo par distorsionado, en adelante y de manera matemática, como la interpolación de una superficie que se deforme y de la cual poseemos varias parejas (muestras) de un punto en la superficie no deformada y su equivalente en la deformada, de esta

modo y teniéndola ya totalmente interpolada podemos averiguar para cualquier punto sobre la superficie deformada, donde está su pareja en la superficie no distorsionada y de este modo hacer el respectivo cambio de los puntos para formar así a partir de la superficie deformada, la no deformada que no es otra que la imagen sin distorsión. Para este problema matemático poseemos una precisa herramienta con la que lo solucionaremos tal y como queremos, esta herramienta es el spline, que trabaja básicamente de la siguiente manera: entregándole una serie de parejas o muestras compuestas de un punto con su respectivo par distorsionado, proporciona una ecuación matemática capaz de retornarnos el valor distorsionado de cualquier otro punto que no pertenezca a la muestra y que nos interese averiguar [1], tal y como lo ambicionamos. Sabiendo ahora que hace el spline veamos como lo hace. Y tengamos siempre en cuenta que el presente trabajo no tiene como objetivo primordial explicar la naturaleza de la técnica sino mostrar su comportamiento matemático, así que para una mejor aproximación a la esencia del spline y su origen o sustentación matemática, refiérase a [9].

La raíz del análisis del spline se basa en una función que no es mas que una aproximación algebraica de la descripción de una deformación, cuya sustentación y propuesta se puede ver con detalle en [10] y cuyo análisis esta fuera del alcance de este texto, razón por la cual solo hacemos mención a ella. Esta función esta descrita a continuación por la ecuación 1:

$$z(x, y) = -U(r) = -r^2 \log r^2$$

Ecuación 1. Función de base para el cálculo del spline

Donde r es la distancia del punto (x,y) desde el origen cartesiano $\sqrt{(x^2 + y^2)}$. Obviamente z cumple con una cantidad de propiedades en sus respectivas derivadas y en general en su comportamiento, las cuales no son de la precisa incumbencia en este texto, por lo tanto sobre esta función se basa todo el fundamento matemático del spline.

Fundamentalmente cuando trabajamos funciones y deformaciones en dos dimensiones el spline se compone de 2 funciones $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ (una por cada variable), Las cuales reciben como parámetro de entrada un punto (x,y) y retornan las respectivas coordenadas x' y y' deformadas correspondientes al punto de entrada de tal modo que: $(x,y) \rightarrow (x',y')$. Entonces el proceso algebraico de la construcción de un spline desemboca en hallar las ecuaciones de f_x y f_y para lo cual se recurre a un calculo matricial y la solución de sistemas lineales de tipo $AX=B$. La expresión general para $f(x,y)$ esta dada por la ecuación 2:

$$f(x, y) = a_1 + a_x x + a_y y + \sum_{i=1}^n w_i U(|P_i - (x, y)|)$$

Ecuación 2. Función de cálculo de distorsión

Donde a_1, a_x, a_y y w_i $i:1,2,3...n$, son precisamente los términos que componen la función y que debemos encontrar después del calculo algebraico.

Para el calculo matemático de $f(x,y)$ en términos generales, partimos de que poseemos de nuevo un conjunto de puntos no deformados $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$ y teniendo en cuenta que $r_{ji} = |P_i - P_j|$. Con esta información podemos conformar tres matrices P, K y L tal y como se muestra a continuación en la figura 6:

$$K = \begin{bmatrix} 0 & U(r_{12}) & \dots & U(r_{1n}) \\ U(r_{21}) & 0 & \dots & U(r_{2n}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U(r_{n1}) & U(r_{n2}) & \dots & 0 \end{bmatrix}, n \times n;$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & y_1 \\ 1 & x_2 & \dots & y_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & y_n \end{bmatrix}, 3 \times n;$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{K}{P^T} & \frac{P}{0} \end{bmatrix}, (n+3) \times (n+3);$$

Figura 6. Matrices K,P y L para el cálculo de un spline.

Finalmente poseemos $Y = (V | 0 \ 0 \ 0)^T$, un vector columna de dimensión $n+3$, donde $V = [P'_1, P'_2, P'_3 \dots P'_n]$. Ósea el conjunto de todos los pares distorsionados de los puntos $P_1, P_2, P_3 \dots P_n$. Con esto dicho podemos solucionar nuestras incógnitas a_1, a_x, a_y y w_i $i:1,2,3...n$, para conformar la función $f(x,y)$, planteada en la ecuación 2. De la siguiente manera tal y como se expresa en la ecuación 3.

$$L^{-1}Y = (W | a_1 a_x a_y)^T$$

Ecuación 3. Sistema solución de las incógnitas para la función spline.

De la correcta solución de $L^{-1}Y$ podemos pues extraer toda la información necesaria para conformar nuestra función de interpolación de superficie deformada y de este modo averiguar cualquier punto sobre ella. La solución de $L^{-1}Y$ será de tamaño $2x(n+3)$ y su primera fila estará conformada por los términos $w_1, w_2, w_3 \dots w_n$, a_1, a_x, a_y en ese estricto orden y correspondiente a $f_x(x,y)$. Del mismo modo la segunda fila satisfará a $f_y(x,y)$. Por lo tanto en el caso de prueba donde la distorsión en ambas coordenadas es 0, la solución de los términos sería: 000...0 010 y 000...0 01 para $f_x(x,y)$ y $f_y(x,y)$ respectivamente.

Para ilustrar de manera grafica el trabajo de calculo e interpolación de una superficie deformada por medio de un spline, la figura 7 nos muestra en (a) una superficie

plana de la cual se muestrean 5 puntos y en (b) nos muestra los 5 puntos (sus pares deformados) y el resto de la superficie deformada que se han conseguido por medio del calculo de splines. Además en (c) nos muestra la superficie de formada que se interpolaría con el spline si el plano de (a) hubiese sufrido leves deformaciones en una tercer coordenada z.

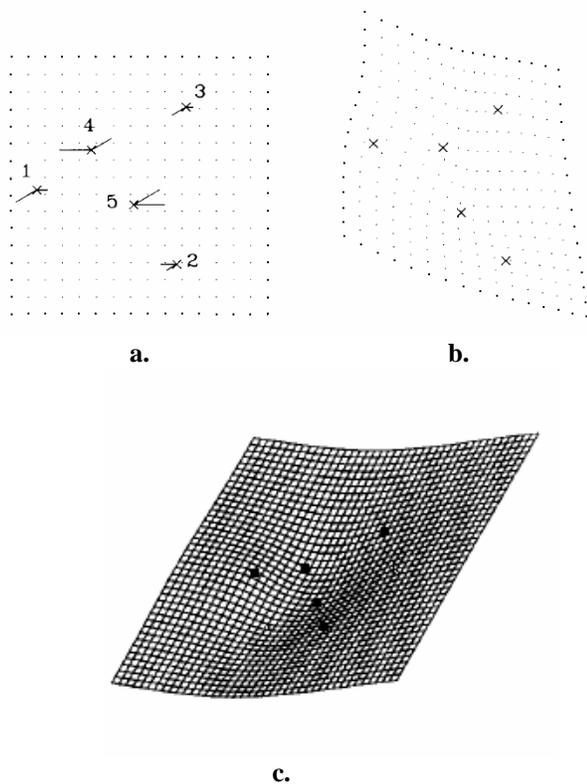


Figura 7. a. Plano en R^2 con 5 muestras, b. Mismo plano (a) y mismas muestras pero deformados y aproximados con splines, c. Mismo plano (a) y mismas muestras pero con deformaciones no solo en x,y sino también en z (superficie R^3)

Convirtiéndose el spline en la piedra angular para la eliminación de la distorsión en una imagen digital, es mas que justo cerrar esta sección con un corto ejemplo y su debida solución, con el fin de ilustrar aun mas y adquirir mayor capacidad para implementaciones en la practica.

4.1 Ejemplo de spline

Poseemos para este ejemplo un set de puntos no deformados P, y sus correspondientes pares deformados V. Para este caso particular [1] solo se ha deformado la coordenada y. Hallaremos la función general $f(x,y)$ que interpola la superficie deformada en cualquier punto, de la siguiente manera:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$V = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0.75 & 0.25 & -1.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.75 & 0.25 & -1.25 & 0.25 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$K = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 \\ 1.3863 & 0.0 & 1.3863 & 5.5452 \\ 5.5452 & 1.3863 & 0.0 & 1.3863 \\ 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$L = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 1 & 0 & 1 & \\ 1.3863 & 0 & 1.3863 & 5.5452 & 1 & -1 & 0 & \\ 5.5452 & 1.3863 & 0 & 1.3863 & 1 & 0 & -1 & \\ 1.3863 & 5.5452 & 1.3863 & 0 & 1 & 1 & 0 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 1 & & & 0 & \\ 1 & 0 & -1 & 0 & & & & \end{array} \right]$$

Entonces

$$L^{-1}V^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -0.0902 & 0.0902 & -0.0902 & 0.0902 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Y concluimos

$$f_x(x,y) = 0 + 1x + 0y + 0U_1 + 0U_2 + 0U_3 + 0U_4 = x,$$

$$f_y(x,y) = 0 + 0x + 1y - 0.0902U_1 - 0.0902U_2 - 0.0902U_3 - 0.0902U_4$$

Esto concuerda con lo dicho al principio referente a que la deformación solo recae en la coordenada y, para este ejemplo.

5. CONCLUSIONES

Para una primera aplicación del método se recomienda utilizar Matlab en cualquiera de sus versiones, pues con este software cualquier procedimiento matemático, como la convolucion, el sample o la propia implementación de splines se reducen a una simple línea de código o un comando escueto que realiza todo calculo sin menor esfuerzo. Para una aplicación más potente, rápida y robusta en un lenguaje compilado como el C++ (donde también se experimentó este trabajo) se recomienda usar para filtrados, samples y convoluciones, la librería Vtk que provee toda clase de técnicas para el análisis de imágenes incluyendo poderosas clases para las anteriores pretensiones. El manejo de splines que reviste mayor complejidad por el manejo de matrices y solución de sistemas lineales, se implementa con mayor facilidad usando la librería GSL

Es importante incluir en este apartado el hecho de que entre mas grande sea la grilla de calibración mejor será La corrección de la distorsión, de igual manera influye en el resultado el tamaño con que utilizemos el sample o las veces que aumentemos los puntos para la convolución. Además estos dos ítems no solo influyen en la calidad de resultados sino en el consumo de tiempo y recursos de maquina del algoritmo. Se concluye con esto y después de varias pruebas que para una imagen de tamaño 576x764 pixeles es suficiente con una grilla de 8x8= 91 puntos y una aumento en convolución de 5 veces el tamaño original del punto se logra la eliminación en un 100% de la distorsión en la imagen en un tiempo aproximado de 3 minutos y medio.

Recordemos también que el proceso de calculo solo se realiza en la imagen de calibración, pues al obtener la ecuación del spline para esta se supone que debe ser la misma que aplica para cualquier otra imagen que venga del mismo equipo sobre el que estamos trabajando (siempre y cuando este no se mueva y permanezca con la distorsión que poseía cuando se calibro), por lo tanto en adelante nuestro algoritmo solo recibirá la foto y ya con el spline calculado y almacenado realizará la transformación de la foto actual, sin necesidad de recurrir a nuevos cálculos.

Finalmente es importante comentar la experiencia de trabajar con técnicas diferentes al spline para interpolar la superficie de distorsión, con resultados mucho menos óptimos a simple vista, sobre todo reflejados en la malformación de la imagen donde se perdía mucha información y desaparecían inclusive elementos pequeños en la foto. Para esta experiencia se utilizaron métodos de interpolación lineal y cuadrática entre cada 4 puntos de la grilla, e inclusive técnicas de data fitting o ajuste de datos con polinomios promedios de alto grado. El spline es ideal para este problema ya que antes que una interpolación lo que este realiza es el calculo de la deformación de una función para después interpolar [4].

Finalmente decimos que entre mas markers mucho mas consumo de maquina a modo de convertirse este en el factor decisivo de la implementación respecto a la optimización de tiempo, puesto que también afecta el tamaño de aumento de cada marker pero en forma mucho mas tolerable que la cantidad de los mismos, una gran ventaja es que no es necesario usar muchos markers para una buena corrección de distorsión. No sobra decir que la implementación es mucho más sencilla en matlab pero mucho más rápida en ejecución en c++.

6. AGRADECIMIENTOS

El autor brinda el reconocimiento y agradecimiento al Ingeniero Juan Diego Gómez del Instituto MEM Research Center (Suiza). Por la dirección y orientación de todo el proyecto. A

demás su colaboración en la programación de códigos y diseño de algoritmos, tanto como en las deducciones matemáticas, sin él y sus conocimientos nada de esto pudo haber sido.

7. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Principal Warps: Thin-Plate Splines and Decomposition of Deformations. Fred L. Bookstein. IEEE 0162. 1989
- [2] Besl, P. J., McKay, N. D., A method for registration of 3D shapes, IEEE Trans. Pattern Anal. and Machina Intell. 14 (1992), 239–256.
- [3] Blake, A., Isard, M., Active Contours, Springer, 1998.
- [4] Boissonnat, J.D., Cazals, F., Smooth shape reconstruction via natural neighbor interpolation of distance functions, In: Proc. 16th Ann. ACM Sympos. Comput. Geom. (2000), 223–232.
- [5] Bloomenthal, J., ed., Introduction to Implicit Surfaces, Morgan Kaufmann Publ., San Francisco, 1997.
- [6] Brunnet, G., Hagen, H., Santarelli, P., Variational design of curves and surfaces, Surveys on Mathematics for Industry 3, 1–27.
- [7] do Carmo, M.P., Differential Geometry of Curves and Surfaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [8] Caselles, V., Kimmel, R., Sapiro, G., Geodesic active contours, Intl. J. Computer Vision 22 (1997), 61–79.
- [9] Spline interpolation. Basic theory and computacional aspects, S. P Singh 1984
- [10] Bajaj, C., Bernardini, F., Xu, G., Automatic reconstruction of surfaces and scalar fields from 3D scans. SIGGRAPH '95 Proceedings (1995), 193–198.