DEL ANÁLISIS DE FOURIER A LAS WAVELETS ANÁLISIS DE FOURIER

RESUMEN
Durante los últimos 200 años se han desarrollado distintos métodos y técnicas de procesamiento digital, para la detección y evaluación de funciones que posteriormente se aplicaron al tratamiento de señales. El análisis espectral de una señal pretende analizar en detalle el comportamiento y aporte de sus componentes armónicas en el dominio de la frecuencia. Para determinar el espectro más simple de una función se puede recurrir a la Transformada de Fourier (FT), con sus limitaciones para ofrecer información en el tiempo; es decir no indica los instantes en los que ocurren ciertos eventos importantes para la señal. Para tener una localización temporal de las componentes espectrales se requiere la utilización de otras transformadas, que proporcionen una representación tiempo-frecuencia de la señal no estacionaria. La Transformada Corta de Fourier STFT y la Transformada Wavelet WT permiten dicho análisis en tiempo frecuencia. La Transformada Wavelet permite observar el comportamiento de diferentes eventos de la señal (tales como ruido y spikes) al descomponerla en funciones elementales derivadas de la misma señal, que pueden ser seleccionadas hasta el nivel deseado de detalle. La WT también proporciona de manera simultánea información sobre el tiempo y la frecuencia. A diferencia de la STFT, la Transformada Wavelet analiza la señal con distintas resoluciones para las diferentes frecuencias. Este documento presenta de manera sencilla las características básicas de cada procedimiento de análisis de señales, al igual que ilustra, a través de Matlab 7.0, algunos ejemplos básicos de sus implementaciones.

PALABRAS CLAVES: wavelet, Fourier, FT, DFT, STFT, FFT, WT, transformada, matlab, señal, análisis

ABSTRACT
During the last the 200 years different methods and techniques for digital processing have been developed for the detection and evaluation of signals. Among these methods is the study of the distributions time-frequency such as short-time Fourier transform (STFT), or Wavelet Transform (WT). This document introduces, in a simple way, the basic characteristics of each procedure of analysis of signals, like it illustrates, by means of Matlab 7, some basic examples of its implementations are shown.

KEYWORDS: wavelet, Fourier, FT, DFT, STFT, FFT, WT, transform, Matlab, signal, analysis

JIMMY ALEXANDER CORTÉS O.
Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jcortes@utp.edu.co

FRANCISCO ALEJANDRO MEDINA A.
Ingeniero de Sistemas.
Universidad Antonio Nariño.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Auxiliar.
Universidad Cooperativa.
Francisco_medina@cidca.edu.co

JOSÉ ANDRÉS CHAVES O.
Ingeniero Electricista.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Especialista en Pedagogía.
Universidad Nacional Abierta y a Distancia.
Candidato a Magíster en Instrumentación Física.
Universidad Tecnológica de Pereira.
Profesor Asistente.
Universidad Tecnológica de Pereira.
jachaves@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN
En las ciencias y la ingeniería es cada vez más importante la forma en que se realiza el tratamiento de las señales a fin de lograr adecuados procesos de transmisión, compresión y reconstrucción de la información. Alrededor de 150 años después de Isaac Newton (1642-1727), Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) brindó un análisis matemático para mostrar el mundo desde una perspectiva diferente a la del tiempo. Virtualmente cada vez que los científicos y los ingenieros hacen modelos de sistemas o sus predicciones se hace uso del Análisis de Fourier. Los conceptos de Fourier se utilizan en la programación lineal y en el estudio de ondas del espectro electromagnético entre otras aplicaciones. La transformada de Fourier es “El prisma matemático que descompone una función en las frecuencias que le forman” de la misma forma que lo hace un prisma de cristal con la luz. Sin embargo, el análisis de Fourier

Fecha de Recepción: 17 Marzo de 2006
Fecha de Aceptación: 02 Marzo de 2007

presenta un gran problema al pretender determinar el instante en que ocurre un evento en particular, por lo que se hizo necesaria la implementación o el mejoramiento de los procesos de análisis vigentes[1]. En esta búsqueda aparece, en 1946, Denis Gabor quien adapta la transformada de Fourier para permitir el análisis en el tiempo aplicando la misma transforma de Fourier a pequeñas secciones de la señal; desarrollando una técnica conocida como el ventaneado. Este procedimiento no resuelve todas las dificultades por lo que en algunas ocasiones se tiene la necesidad de efectuar análisis más detallados, debido a que la misma ventana se aplica para todas las frecuencias. Posteriormente, el análisis Wavelet ha permitido resolver esta dificultad haciendo uso de intervalos de tiempo largos donde se requiere mejor información de baja frecuencia y regiones más cortas para altas frecuencias. El uso popular de las Wavelets se produce por un artículo publicado conjuntamente por Morlet y Grossmann quienes introdujeron por primera vez el término "wavelet" en el lenguaje matemático en el año 1984. En la actualidad se considera a las Wavelets la herramienta más poderosa para el análisis de señales, ya que ofrecen conocimiento del espectro tanto en la frecuencia como en el tiempo; así como también brindan grandes aportes en los procesos de compresión y reconstrucción de las señales.

2. FOURIER

La transformada de Fourier es el procedimiento matemático que descompone una función en las frecuencias que le forman de la misma manera que un prima descompone la luz en los diferentes colores y longitudes de onda. La función que inicialmente se define en el tiempo f(t) es la transformada al dominio de la frecuencia F(w). Esta nueva función F(w) se llama la Transformada de Fourier o Serie de Fourier cuando la función es Periódica. Fourier determinó que era posible expresar una función coma la suma de Senos y Cósenos de diferentes frecuencias y amplitudes hasta lograr determinar la función original. Este procedimiento fue implementado inicialmente para funciones periódicas, pero se puede extender a funciones no periódicas haciendo tender a infinito su período T.

2.1 Series de Fourier

La serie de Fourier de una función periódica se escribe frecuentemente como:

$$f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos 2\pi kt + b_k \sin 2\pi kt)$$

Ecuación 1. Serie de Fourier

Los coeficientes a1, a2, a3,… indican cuanto se aplica de las funciones trigonométricas a1*cos(1*2πt), a2cos(2*2πt), a3*cos(3*2πt), … y los coeficientes b1, b2, b3 expresan la proporción de la función sen(1*2πt), sen(2*2πt), sen(3*2πt), … A partir de la ecuación de Euler, es más adecuado expresar la serie como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \, e^{in\omega t}$$

Ecuación 2. Serie de Fourier

$$C_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-in\omega t}\, dt.$$

Ecuación 3. Coeficientes de la Serie de Fourier.

Nótese que el coeficiente Cn generaliza los coeficientes *a* y *b* respectivamente para la identidad de Euler.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Ecuación 4. Identidad de Euler.

Fourier demostró que prácticamente cualquier función periódica se puede representar como una suma de Senos y Cosenos asignándole a cada uno un coeficiente de ponderación. Como ejemplo, se ha implementado una función cuadrada de periodo 2Π y amplitud 1 con tres términos y seis coeficientes, cuya función se analiza a continuación: Los coeficientes de la función periódica son 1, 0, 1/3, 0, 1/5, 0,1/7 generando la siguiente f(t):

$$f(t) = \sin(t) + \frac{1}{3}\sin(3t) + \frac{1}{5}\sin(5t) + \frac{1}{7}\sin(7t)$$

Ecuación 5. f(t) aproximada de señal Cuadrada de Periodo 2Π

A continuación se incluyen líneas que representan el código en Matlab que permitió la generación de la serie a través de la función f(t), que se muestra en la Figura 1:

```
function [xt]=cuadradaf(p,t,m)
%Esta funcion permite calcular la Funcion Cuadrada
%Simetrica a partir de
%las series de Fourier para los elementos de (x) de una
%señal de periodo (p) con (m) armonicos:
%[xt]=cuadradaf(p,x,m)
%(m) numero de armónicos hace más exacta la función,
%pero prolonga su ejecución.
f=1/p ;          %frecuencia
w=2*pi*f;        %velocidad angular
c=4/pi  ;        %factor cuadrada
gt=0    ;        %Inicializacion
gtnew=0   ;      %Inicializacion
for i=1:m;
  n=2*i-1;
 gt=sin(n*w*t)/n;
 gtnew=gt+gtnew;
end;
xt=c*gtnew;
end;
```

[1] The Word According The Wavelets pág 10

La forma más sencilla de utilizar esta función, se describe a continuación:
periodo=pi;
armonicos=3;
*t=[0:0.1:3*pi]*
y=cuadradaf(periodo,t,armonicos)
plot(t,y)
grid;

Los coeficientes cero (0) corresponden a los términos con aporte coseno.

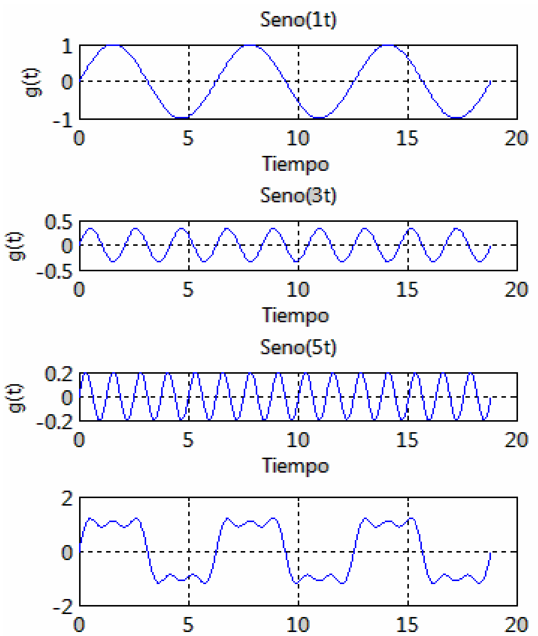

Figura 1. Señal Cuadrada con seis coeficientes

Cabe recordar que si los coeficientes de la serie no se hacen pequeños lo suficientemente rápido, la serie de Fourier diverge y por tanto no representa una función.

2.2 La Transformada de Fourier

Si se hace que el período de la función a transformar tienda a infinito, entonces se obtiene la transformada de Fourier de la función.

$$C(w) = \tfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$$

Ecuación 6. Coeficientes de Fourier

La integral impropia que aparece en estos coeficientes (conocida como la transformada de Fourier), resulta ser de gran importancia en el análisis de Fourier y en muchas otras aplicaciones. La transformada de Fourier, como se aprecia en la Figura 2 se utiliza en el estudio de señales y sistemas, así como en óptica; aparece en los equipos más modernos y sofisticados como los usados para realizar una tomografía, también surge en técnicas analíticas como la resonancia magnética nuclear, y en general, en todo tipo de instrumentación científica que se use para el análisis y presentación de datos.

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt$$

Ecuación 7. Transformada de Fourier

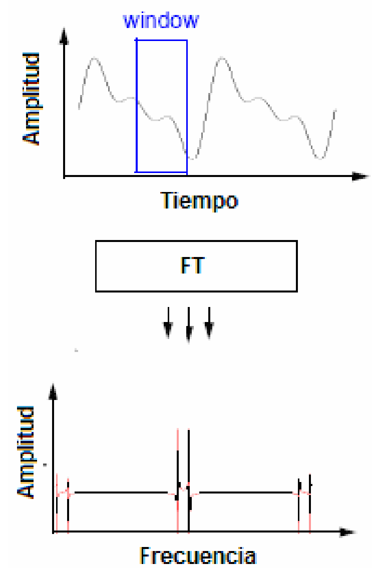

Figura 2. Paso del Dominio en el Tiempo a amplitud en Frecuencia TF

Considere la función y determine su transformada:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ e^{-at} & \text{si} \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Ecuación 8. Ejemplo de función en el dominio del tiempo

Aplicando la definición:

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-iwt}\,dt = \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-iwt}\,dt$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(a+iw)t}\,dt = \frac{-1}{a+iw}e^{-(a+iw)t}\Big]_{0}^{\infty} = \frac{1}{a+iw}$$

Ecuación 9. Transformada de Fourier

De igual forma, se propone la transformada inversa de Fourier para todo t:

$$F^{-1}\{F(w)\}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(w)e^{iwt}\,dw$$

Ecuación 10. Transformada Inversa de Fourier

2.3 Transformada Discreta de Fourier

Análogo a la serie, la transformada de Fourier descompone la señal en senos y cosenos de diferentes frecuencias y amplitudes. Es de destacar que el uso de esta transformada implica la solución de integrales que hacen el análisis continuo para todo tiempo. En la práctica, no siempre es posible por el consumo de tiempo o el desconocimiento de la función original, puesto que solo se poseen datos discretos resultantes de una captura. En las aplicaciones de ingeniería y tratamiento de señales, resulta más útil considerar el proceso de manera discreta y no continua, ya que los sistemas de adquisición de datos no pueden obtener ni analizar la totalidad de la información.

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

y su inversa es,

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega).e^{j\omega n} d\omega$$

Ecuación 11. Transformada de Fourier en Tiempo discreto DTFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{(-j2\pi(k)(n)/N)}$$

N = Número de Muestras
n = Enésima muestra original
k = késimo termino de la DTF

Ecuación 12. Transformada Discreta de Fourier DFT

El cálculo de la DFT requiere la suma compleja de N multiplicaciones complejas para cada una de las salidas. En total, N^2 multiplicaciones complejas y N(N-1) sumas complejas para realizar un DFT de N puntos.

x[n]={1,2,1,0}

$$k=0\ X_t[0] = \sum_{n=0}^{4-1} x[n] e^{(-j2\pi(0)n/4)} = 1e^{(-j2\pi(0)(0)/4)} + 2e^{(-j2\pi(0)(1)/4)} + 1e^{(-j2\pi(0)(2)/4)} + 0e^{(-j2\pi(0)(3)/4)} = 4$$

$$k=1\ X_t[1] = \sum_{n=0}^{4-1} x[n] e^{(-j2\pi(1)n/4)} = 1e^{(-j2\pi(1)(0)/4)} + 2e^{(-j2\pi(1)(1)/4)} + e^{(-j2\pi(1)(2)/4)} + 0e^{(-j2\pi(1)(3)/4)} = -2j$$

$$k=2\ X_t[2] = \sum_{n=0}^{4-1} x[n] e^{(-j2\pi(2)n/4)} = 1e^{(-j2\pi(2)(0)/4)} + 2e^{(-j2\pi(2)(1)/4)} + e^{(-j2\pi(2)(2)/4)} + 0e^{(-j2\pi(2)(3)/4)} = 0$$

$$k=3\ X_t[3] = \sum_{n=0}^{4-1} x[n] e^{(-j2\pi(3)3n/4)} = 1e^{(-j2\pi(3)(0)/4)} + 2e^{(-j2\pi(3)(1)/4)} + e^{(-j2\pi(3)(2)/4)} + 0e^{(-j2\pi(3)(3)/4)} = 2j$$

Por lo tanto la DFT de x[n] es $X_t[k]$ ={4,-2j,0,2j} para k= 0,1,2,3

Ecuación 13. Ejemplo de Cálculo manual de la DFT

No es difícil implementar la DFT en Matlab desde el punto de vista algorítmico; a continuación se ilustra dicha implementación:

```
function [X]=dft(xn)
N=size(xn,2) ;    %Numero de Elementos de xn
X=zeros(1,N) ;    %Inicializa DFT
for k=0:N-1;
 Xnacu=0;
 for n=0:N-1;
 Xnacu=xn(n+1)*exp((-j*2*pi*k*n)/N)+Xnacu;
  End
X(k+1)=Xnacu;
End
End
```

Aplicando la anterior función al vector $x[n]=\{1,2,1,0\}$:

```
v=[1 2 1 0]
dft(v)
ans = 4.0000  0.0000 - 2.0000i    0   -0.0000 + 2.0000i
```

Es de notar que el número de operaciones efectuadas por la DFT puede resultar altamente demandante en tiempo y recursos del sistema, por lo que se hace necesaria la implementación de un algoritmo recursivo que disminuya de manera exponencial el número de operaciones efectuadas por la DFT.

2.4 La Transformada Rápida de Fourier FFT

La evaluación directa de la DFT requiere (n^2) operaciones aritméticas. Mediante un algoritmo FFT se puede obtener el mismo resultado con sólo (n log n) operaciones. La FFT es el algoritmo que se utiliza para realizar la DFT de una forma eficiente y rápida. Lo que se consigue con este algoritmo es simplificar enormemente el cálculo de la DFT introduciendo “atajos” matemáticos para reducir drásticamente el número de operaciones. La idea que permite esta optimización es la descomposición de la transformada a tratar en otras más simples y así sucesivamente hasta llegar a transformadas de 2 elementos donde k puede tomar los valores 0 y 1. Una vez resueltas las transformadas más simples se agrupan en otras de nivel superior que deben resolverse de nuevo y así sucesivamente hasta llegar al nivel más alto. Al final de este proceso se ordenan los resultados obtenidos. Dado que la transformada discreta de Fourier inversa es análoga a la transformada discreta de Fourier, con distinto signo en el exponente y un factor 1/n, cualquier algoritmo FFT se puede adaptar fácilmente para el cálculo de la transformada inversa. En la Figura 3 se observa un ejemplo de aplicación de este algoritmo.

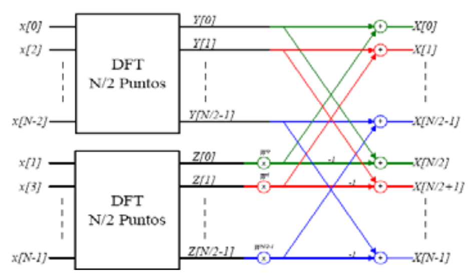

Figura 3. Diagrama Mariposa del Algoritmo de 4 puntos

Matlab ,dentro de su toolbox de signal processing, posee la FFT de manera apropiada y recurrente, pero desde el punto de vista académico se presenta una versión modesta del código desarrollado en Matlab para su evaluación y estudio.

```
function y = fftx(x)
%FFTX Tansformada rapida de Fourier.
% N -> cantidad de terminos que tiene el vector
x = x';
N = length(x);
omega = exp(-2*pi*i/N);
if rem(N,2) == 0
% Division Recursiva
k = (0:N/2-1)';
w = omega.^k;
u = fftx(x(1:2:N-1));
v = w.*fftx(x(2:2:N));
y = [u+v; u-v];
else
% La Matriz de Fourier.
j = 0:N-1;
k = j';
F = omega.^(k*j);
yv = F*x;
y=yv';
end
```

Si se aplica la función fftx al cálculo de la FFT para un vector $x[n]=\{1,2,1,0\}$ se obtiene:

```
v=[1 2 1 0]
fftx(v)
ans = 4.0000  0.0000 - 2.0000i    0   -0.0000 + 2.0000i
```

Donde se puede apreciar que los resultados de la DFT y la FFT son idénticos, la diferencia sólo radica en el tiempo de evaluación que para este caso no es considerable, pero al tomar algunos cientos de muestras y cada fracción de segundo si resulta apreciable el consumo en tiempo.

```
>> X = fft(x)
```

La FFT de Matlab del vector x genera un nuevo vector “X” de números complejos ordenados desde k=0...N-1. Se recomienda que la longitud del vector x sea una potencia de 2. Otra opción de la FFT es especificar el número de puntos con el que se quiere hacer la FFT.

```
>> X = fft(x,N)
```

Si la longitud de x es menor que N, el vector se rellena con ceros. Si es mayor, el vector se trunca.

2.5 La Transformada Corta de Fourier

La Transformada de Fourier ventaneada también se conoce como Transformada de Fourier de Tiempo Corto (STFT: Short Time Fourier Transform). La STFT recorre la señal en función de las variables tiempo y frecuencia. La STFT divide la señal en pequeños segmentos, y calcula la FT de cada segmento por separado; de esta forma, se logra una representación tiempo-frecuencia de la señal, que permite conocer no sólo el valor de sus componentes en frecuencia, sino también su ubicación temporal; sin embargo, la información de localización tiempo-frecuencia sólo puede obtenerse con una exactitud limitada, determinada por el ancho de la ventana temporal utilizada.

$$\mathbf{STFT}\{x(\ )\} \equiv X(\tau,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)w(t-\tau)e^{-j\omega t}\,dt$$

Ecuación 14. Definición de la Trasformada corta de Fourier

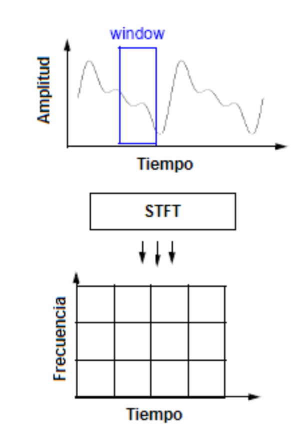

Figura 4. Paso del Dominio del Tiempo al tiempo Frecuencia STFT

En el caso del tiempo continuo, la función a ser transformada es multiplicada por una función ventana, la cual es diferente de cero por un corto instante. La transformada de fourier de una señal resultante se mueve simultáneamente con la ventana que recorre el eje del tiempo (eje x), dando como resultado una representación en dos dimensiones tiempo y frecuencia, como se aprecia en la Figura 4.

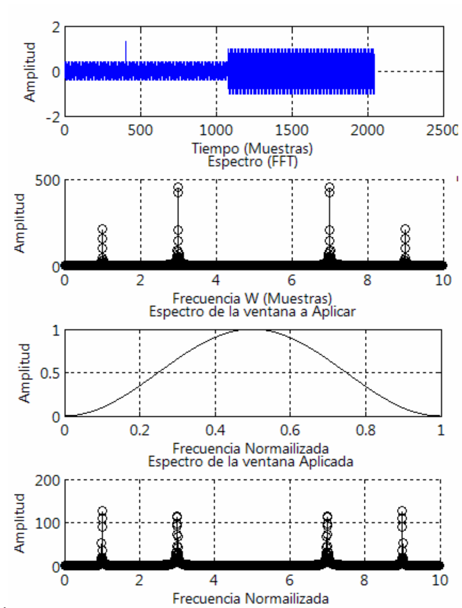

Figura 5. Análisis de una señal no estacionaria con FFT.

Como se observa en la Figura 5, la FFT no puede detectar el evento correspondiente al cambio de frecuencia de la señal no estacionaria, ni la presencia de un spike en dicha señal.

La STFT a través de su análisis espectrográfico, determina estos eventos de manera gráfica, tal como se muestra en la Figura 6.

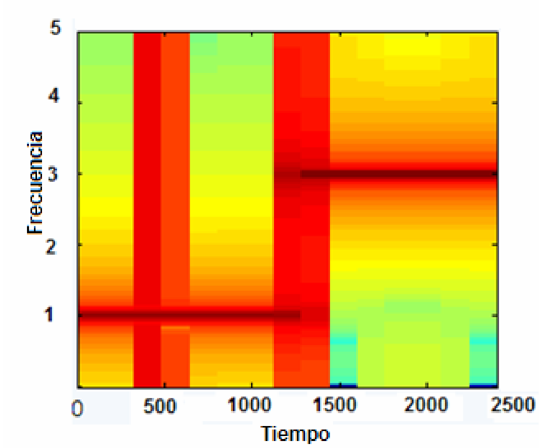

Figura 6. Análisis Espectrográfico de la Señal no Estacionaria.

El código generado para visualizar el espectrograma anterior de manera general, se puede implementar con el ejemplo aquí disponible. Primero, es necesario efectuar una función que genere el spike en un punto deseado, por lo que es necesario crear dicha función.

```
function [x]=spikes(N,H,T)
 %Genera un Spike de altura H en la posición T del
%vector de tamaño N
 spikes=zeros(0,N);
 spikes(1,T)=H;
 x=spikes;
```

Una vez implementada la función que genera los spikes, se debe efectuar el programa de visualización en Matlab.

```
w0=1;
w1=3;
A0=0.4;
A1=1;
phi=0;
N=2048;
M=900;
factor=10; % numero positivo mayor a 2
wmax=w0;
T=2*pi/(factor*wmax);
puntospike=400
n1= [0:M-1];
n0=[M:N-1];
pico=spikes(N,1,puntospike);
x0 = A0*cos(w0*n0*T+phi); % muestreada sinusoide
x1=  A1*cos(w1*n1*T+phi);  % muestreada sinusoide
x=[x0,x1]+pico;
plot(x)
grid;
figure(2);
specgram(x);
```

3. LAS WAVELETS

Una Wavelet es una forma de onda de duración limitada que tiene un valor promedio cero. A diferencia del análisis de Fourier con sus funciones seno y coseno las cuales no son delimitadas en el tiempo extendiéndose desde menos infinito hasta más infinito, las wavelets suelen ser irregulares y asimétricas.
El análisis wavelet, análogo al análisis de Fourier, descompone la señal en versiones escaladas y desplazadas de la Wavelet original o Madre. La Transformada Wavelet continua CWT se define como la suma en el tiempo de la señal Wavelet Madre escalada y multiplicada.
Debido al alcance definido en este artículo, se debe recurrir a otro documento a publicar en una próxima edición de esta revista, donde se ampliará el análisis wavelet.

4. CONCLUSIONES

El análisis de Fourier ha cambiado la forma en que la ciencia y la ingeniería han percibido el mundo, puesto que ha facilitado el florecimiento del tratamiento digital de señales con sus amplias aplicaciones en las comunicaciones, la compresión de datos y el análisis de los mismos.

Debido a su limitación en el análisis tiempo frecuencia, su detalle de ruido y los eventos que pudieran presentarse como lo son los spikes, el análisis de Fourier resulta limitadamente apropiado por lo que se presenta la aparición natural de nuevas y más sofisticadas herramientas como son las Wavelets.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] BURKE HUBBARD, Barbara. The world according to wavelets, 261 páginas, Wesllesey masachussetts.

[2] BOQUETE, Luciano, MARTÍN, José L, MAZO, Manuel, PALAZUELOS, Cira, PROVENCIO, David. Estudio de la transformada de fourier y la transformada wavelet como herramienta de análisis y clasificación de señales eeg, 4 páginas, Departamento de Electrónica. Escuela Politécnica. Universidad de Alcala.

[3] CHAN, Andrew K. Fundamental of wavelets theory, algorithms, and applications, 306 páginas, Texas a & m university a.wiley-interscience publication.

[4] MISITI, Michel, MISITI, Yves, OPPENHEIM, Georges, POGGI, Jean Michel .Wavelet Toolbox Computation Visualization Programming User's Guide Version 1, 626 páginas, MathWorks, Inc.