

## DISEÑO DE UN SISTEMA DE CONTROL Y OBSERVADOR DE ESTADO PARA UNA MANO ARTICULADA

### RESUMEN

En este documento se realiza el diseño de un algoritmo de control digital para una mano articulada, partiendo de un modelo para una articulación que consiste de un músculo artificial movido por un servomotor, acoplado a un sistema mecánico. Se realiza un algoritmo de control usando realimentación del estado del sistema de la articulación, el cual es de tercer orden. Las variables de estado son estimadas usando un observador de estado y el comando de referencia se diseña utilizando un modelo de servo.

**PALABRAS CLAVES:** Estado, Realimentación, Observador, Alcanzable, Servo.

### ABSTRACT

*This paper shows the design of an algorithm of digital control for an articulated hand, starting off on a model for a joint with an artificial muscle, coupled with a mechanic system. A control algorithm is made using the feedback of the state of the system of the joint, which is third order assigned. The state variables are estimated using a state observer and the command reference is designed using a servo model.*

**KEYWORDS:** State, Feedback, Observer, Reachable, Servo.

**JASON EDWIN MOLINA**

Ingeniero Electricista  
Universidad Tecnológica de Pereira  
jason@ohm.utp.edu.co

**DIDIER GIRALDO BUITRAGO**

Ingeniero Electricista, MEE  
Profesor Titular  
Universidad Tecnológica de Pereira  
dgiraldo@utp.edu.co

### 1. INTRODUCCIÓN

En la robótica existen muchas aplicaciones que requieren la aplicación de técnicas de control especiales. Muchas fuentes utilizan técnicas de control moderno para estas aplicaciones, y pocas de estas utilizan la teoría de control clásica. El control clásico tiene una técnica que ha resultado ser muy eficiente en sistemas lineales, la cual es la realimentación lineal del estado.

En este artículo se muestra cómo se puede utilizar la técnica de realimentación del estado en esta aplicación, además se propone el diseño de un observador del estado del sistema, pues como es normal en estos sistemas no se tiene acceso al estado del sistema sino sólo a la medición de una salida. El observador determina el estado a partir de la medición disponible si el sistema es observable desde esa salida. Se propone además un modelo de estado para un servo que realice la tarea de procesar la referencia y hacer que la salida del sistema siga la referencia en el estado estacionario.

### 2. SISTEMA FÍSICO

El sistema físico propuesto se define mediante un sistema de actuadores y sistemas de transmisión para una mano, con movimiento por medio de articulaciones, en cada dedo. Las componentes son [1]:

- Servomotor de corriente continua basado en músculo artificial.

- Poleas para transmisión de potencia.
- La articulación.

Un músculo artificial es un actuador lineal que transforma el movimiento rotacional del motor en movimientos axiales usando engranajes planetarios. La forma esquemática de la estructura se presenta en la figura 1, y el diagrama del modelo en la figura 2.

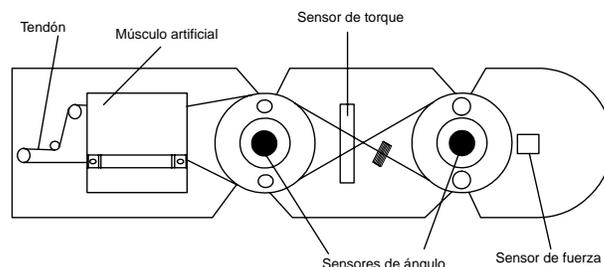


Figura 1. Esquema de la unidad.

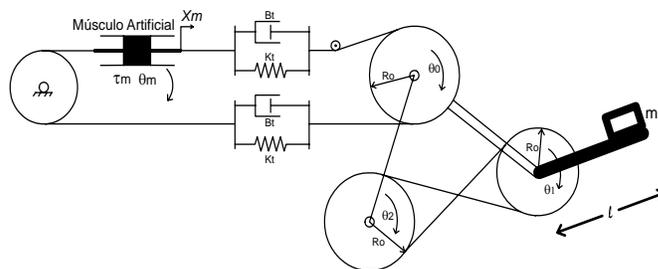


Figura 2. Modelo de la unidad.

El sistema para el actuador de la articulación tiene un modelo deducido a partir de las leyes de Newton, el cual puede ser reducido a un integrador debido al bajo valor de algunos parámetros de la tabla 1, como se muestra en la ecuación (1). El modelo mecánico del sistema se determina a partir del análogo eléctrico, fuerza-torque-corriente. En la tabla 1 se dan los datos de los parámetros del motor, del músculo artificial, y del sistema de transmisión que hacen parte del modelo.

$$(B_m R_m + K_l K_b) \dot{\theta}_m = K_l i_m - R_m v$$

$$x_m = n \theta_m \tag{1}$$

$K_l$	9e-3 Nm/A	Constante de torque
$J_m$	1,62e-7 Kg m <sup>2</sup>	Inercia total
$B_m$	1,11e-4 N/m/s	Fricción viscosa del motor
$K_b$	2e-2 V/rad/s	Constante de contra f.e.m.
$L_m$	1000 μH	Inductancia de armadura
$R_m$	7 Ω	Resistencia de armadura
$i_m$	-1 < $i_m$ < 1	Corriente de armadura del motor
$\tau_m$		Torque de salida del motor
$n$	1/323	Razón de reducción
$K_t$	2,86e4 N/m	Constante de elasticidad
$B_t$	5,6e-4 N/m/s	Fricción viscosa del cable
$m$	5 Kg	Masa equivalente de la carga
$R_0$	1e-2 m	Radio de la polea
$l$	3e-2 m	Longitud de la barra en la carga

Tabla 1. Parámetros de la planta.

Para el sistema mecánico se obtiene la siguiente ecuación que relaciona el desplazamiento del músculo artificial con la posición angular de salida del sistema,  $\theta_0$ :

$$\frac{2ml^2}{3R_0 B_t K_t} \ddot{\theta}_0 + \frac{R_0}{K_t} \dot{\theta}_0 + \frac{R_0}{B_t} \theta_0 = \frac{1}{K_t} \ddot{x}_m + \frac{1}{B_t} \dot{x}_m = \frac{n}{K_t} \ddot{\theta}_m + \frac{n}{B_t} \dot{\theta}_m$$

Con la ecuación (1) y considerando las entradas al sistema como:

$$u = i_m \quad v = T_g + T_f + n\tau_l$$

Se tiene:  $\ddot{\theta}_0 + \omega_0 \dot{\theta}_0 + \omega_1^2 \theta_0 = M \dot{u} + Nu - Qv - R\dot{v}$

Lo cual conduce al modelo de espacio de estado (2).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0 & 1 & 0 \\ -\omega_1^2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ M \\ N \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ -R \\ -Q \end{bmatrix} v$$

$$\theta_1 = \theta_0 = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

En donde:

$$x_1 = \theta_0 \quad \omega_0 = \frac{3R_0^2 B_t}{2ml^2}, \quad \omega_1^2 = \frac{3R_0^2 K_t}{2ml^2}$$

$$M = \frac{3nK_l R_0 B_t}{2ml^2 (B_m R_m + K_l K_b)}, \quad N = \frac{3nK_l R_0 K_t}{2ml^2 (B_m R_m + K_l K_b)}$$

$$Q = \frac{3nR_m R_0 K_t}{2ml^2 (B_m R_m + K_l K_b)}, \quad R = \frac{3nR_m R_0 K_t}{2ml^2 (B_m R_m + K_l K_b)}$$

La entrada  $v$  es una perturbación de tipo constante, dada por la fricción, la gravitación y la carga. La entrada  $u$  corresponde a la corriente de armadura, la cual está limitada por la potencia del motor; de acuerdo con [1], el torque de salida del músculo artificial es de 150 N, a una velocidad máxima de 50 mm/s, lo que corresponde a una potencia máxima de:  $150 \times 50 \times 10^{-3} = 7,5$  W.

Considerando que la alimentación del motor puede ser de 6 Vcc; para generar dicha potencia sería necesario 1,25A de corriente de armadura, y teniendo en cuenta las pérdidas de conversión de movimiento, la corriente de armadura tiene sus cotas aproximadamente en  $\pm 1A$ .

### 3. ANÁLISIS ANÁLOGO DE LA PLANTA

Para analizar el comportamiento en lazo abierto del sistema, se recurre a la simulación del modelo de espacio de estado, utilizando Matlab®, como sigue:

Los polos y ceros del sistema en lazo abierto son:

$$P_1 = 0; \quad P_{2,3} = -9,33 \times 10^{-6} \pm 30,8761 j$$

$$Z_1 = -1,5489 \times 10^{10}; \quad Z_2 = -5,1240 \times 10^7$$

La función de transferencia correspondiente es:

$$H(s) = \frac{3,497 \times 10^{-15} s^2 + 5,435 \times 10^5 s + 2776}{s^3 + 1,867 \times 10^5 s^2 + 953,3s}$$

Las figuras 3 y 4 muestran la respuesta al impulso y al escalón respectivamente, para el sistema en lazo abierto, donde se nota claramente que es un sistema inestable.

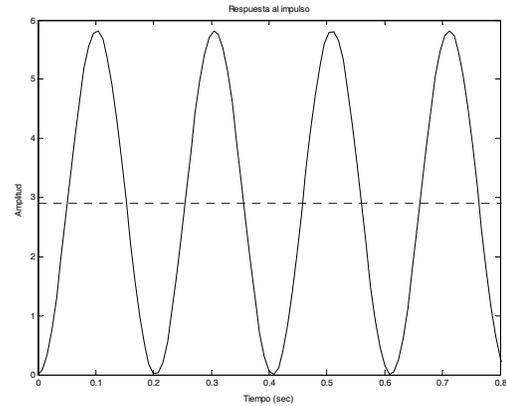


Figura 3. Respuesta al impulso.

### 4. ANÁLISIS DISCRETO DE LA PLANTA

Para determinar el modelo discretizado de la planta, se parte de la ecuación de estado (2), para llegar al modelo discreto así [2]:

$$\underline{x}(k+1) = F \underline{x}(k) + Gu(k) + G_p v(k)$$

$$\underline{y}(k) = C \underline{x}(k)$$

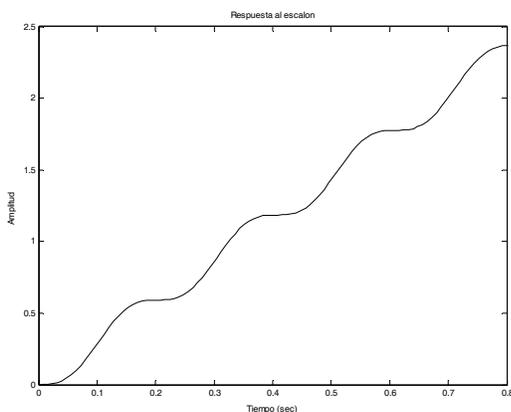


Figura 4. Respuesta al escalón.

Sean las matrices  $A, B, B_p,$  y  $C,$  las matrices del modelo de espacio de estado (3), las matrices  $F, G, G_p, C,$  se determinan a partir de estas como es usual [2], [3]:

$$F = e^{Ah}, \quad G = \int_0^h e^{As} B ds, \quad G_p = \int_0^h e^{As} B_p ds.$$

En las expresiones anteriores,  $h$  es el tiempo de muestreo, que es escogido con base en el criterio proporcionado por Aström, [4], que indica que si  $\omega_n$  es la frecuencia natural del sistema en lazo cerrado, entonces  $\omega_n h$  debe estar en el rango de 0,1 y 0,3.

Para el sistema en lazo cerrado se quiere que la planta presente el comportamiento de un sistema de tercer orden, donde dos polos complejos sean los de un sistema de segundo orden con coeficiente de amortiguamiento  $\rho$  de 0,707, y frecuencia natural  $\omega_n$  de 10 rad/s, y el tercer polo, el cual es real, sea dos veces más rápido que los anteriores. Lo anterior indica que si  $\omega_n=10,$  y escogiendo  $\omega_n h$  como 0,2:

$$h = \frac{0,2}{10} = 0,02$$

Así, el modelo de espacio de estado discreto para el sistema es:

$$\begin{bmatrix} x1(k+1) \\ x2(k+1) \\ x3(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8153 & 0.01875 & 0.0001937 \\ -17.88 & 0.8153 & 0.01875 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1(k) \\ x2(k) \\ x3(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.003631 \\ 0.5377 \\ 55.51 \end{bmatrix} (u(k)+v(k))$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x1(k) \\ x2(k) \\ x3(k) \end{bmatrix} \quad (3)$$

#### 4.1. Regulación de la Planta

##### 4.1.1. Realimentación del Estado del Sistema.

Como primera acción sobre el sistema, se realizará la realimentación lineal del estado del sistema, la cual tiene como meta, estabilizarlo, es decir que todo el estado del sistema caiga al origen en tiempo finito [3], para esto se usa la ley de control:

$$u(k) = -Lx(t) \quad (4)$$

Se ubican los valores propios del sistema en lazo cerrado de tal manera que cumplan los requisitos dados en la sección anterior. Se determinan los polos con la ecuación de segundo grado para  $\rho= 0.707,$  y  $\omega_n$  de 10 rad/s, y el tercer polo como  $-1.5\rho\omega_n.$  El comando *place* en Matlab® determina la matriz  $L$  a partir de las matrices  $F$  y  $G$  del sistema y los polos requeridos [2]; la matriz  $L$  toma entonces el valor de:

$$L = [-4.1880 \quad -0.2674 \quad 0.0047]$$

La figura 5 muestra la respuesta del sistema en lazo cerrado, donde se han introducido condiciones iniciales, que lo inestabilizarían en lazo abierto, pero se nota como este la realimentación conduce al sistema al origen según las especificaciones de respuesta dadas en la sección anterior.

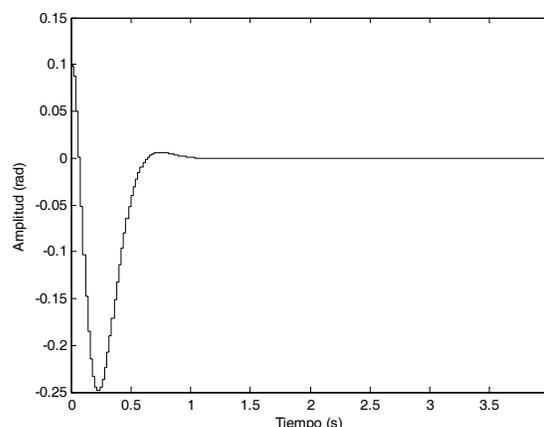


Figura 5. Respuesta del sistema en lazo cerrado a las condiciones iniciales no nulas.

##### 4.1.2. Observador del Estado del Sistema.

Hasta ahora se ha realizado la realimentación suponiendo que hay acceso total al estado del sistema. Son obvias las razones para no conocer el estado del sistema, por lo cual se realiza un observador del estado, cuya tarea es estimar el estado en un tiempo finito [3]. Esto se efectúa mediante un modelo dinámico y discreto igual al del sistema [2], que tiene en un computador digital la información del modelo de espacio de estado del sistema, pero no el estado en el instante actual; esto lleva a la estimación del estado, que se lleva a cabo mediante la realimentación del error de estimación de la salida del sistema, a través de una matriz  $K,$  cuyos valores llevarán a que el error de estimación de las variables de estado caiga al origen en tiempo finito, la velocidad con la cual se consigue esto, se da en términos de los polos del observador [4], de igual forma que para la planta: En este caso se quiere el observador tenga el mismo coeficiente  $\rho$  que la planta, pero que la frecuencia natural  $\omega$  sea el doble, para que el observador responda al doble de la velocidad de la planta, el tercer polo se ubica justo en la parte real de los anteriores dos polos.

El observador tiene el modelo de espacio de estado de (5), que sigue las condiciones descritas anteriormente y es de tercer orden, al igual que la planta, además es de notar que allí puede accederse a todo el estado estimado. El error de estimación de estado toma el modelo de espacio de estado de (6), donde se refleja que este caerá al origen en tiempo finito si los valores propios de la matriz  $[\phi^T - C^T K^T]$  están en el interior del círculo unitario.

$$\begin{aligned} \hat{x}(k+1/k) &= \phi \hat{x}(k/k-1) + \gamma u(k) + K(y(k) - \hat{y}(k)) \\ \hat{y}(k) &= C \hat{x}(k) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\underline{x}(k+1) - \hat{x}(k+1) = \tilde{x}(k+1) = [\phi - KC] \tilde{x}(k) \quad (6)$$

El cálculo de la matriz  $K$  se realiza de la misma manera que se calculó  $L$  para la planta, esto es, la evaluación de la fórmula de Ackermann [2], [4], excepto porque las matrices  $F$  y  $K$  se transponen y la matriz  $G$  se reemplaza por  $C$ , con lo cual se obtiene:

$$K = [0, 4296 \quad -11, 0296 \quad 76, 6741]^T$$

La ley de control ahora se da en la misma forma que antes pero ahora se usa el estado estimado  $\hat{x}(k)$ , el cual es determinado a partir del observador en cada instante de muestreo:

$$u(k) = -L \hat{x}(t)$$

La figura 6 muestra la respuesta del sistema a las mismas condiciones iniciales puestas cuando se conocía todo el estado. La figura 7 muestra la señal de control generada para lograr el objetivo principal hasta ahora, que es estabilizar el sistema. Esta señal de control es una corriente como se había dicho anteriormente limitada en  $\pm 1A$ , esta condición se ve satisfecha en el sistema, lo que hace de la señal de control, una señal posible de generar.

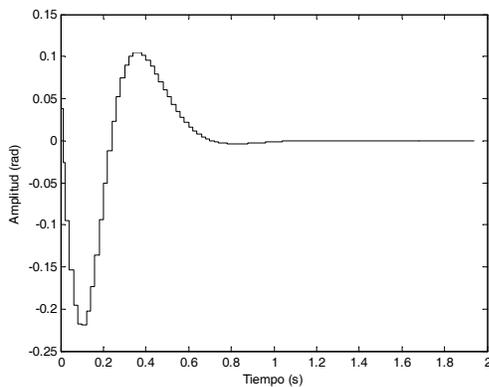


Figura 6. Respuesta del sistema a las condiciones iniciales no nulas con el observador.

La respuesta del sistema es buena comparada con la obtenida por realimentación directa del estado, considerando que ahora existen dos tiempos de respuesta: el debido al sistema y el debido al observador.

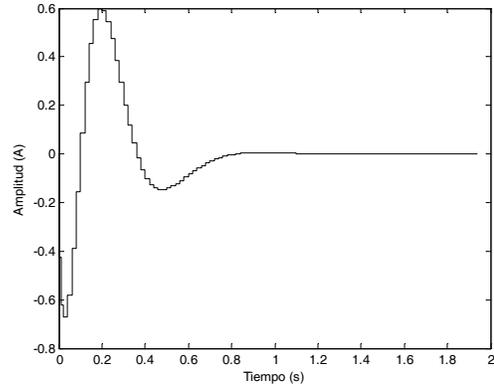


Figura 7. Señal de control generada digitalmente.

#### 4.2. Comando de Referencia del Sistema

Para que el sistema se comporte de acuerdo a condiciones específicas y su salida siga una referencia dada en el estado estacionario, se realiza un modelo de referencia (Servo) con condiciones específicas; los polos de este modelo serán los mismos escogidos para el observador, así el modelo responderá el doble de rápido que la planta y con un sobrepaso pequeño, de modo que, como el objetivo es que el sistema siga el modelo de referencia, entonces el sistema deberá comportarse de igual forma al seguir el comando de referencia. El servo tiene entonces el modelo de espacio de estado de (7), el cual está en forma canónica alcanzable. En este modelo se parte de que sus ceros son los mismos de la planta y los polos son definidos por el polinomio  $A_m(z) = z^3 + a_1^m z^2 + a_2^m z + a_3^m$  pues la planta es de tercer orden, además se da la expresión para la señal en lazo directo  $u_{ff}(k)$ , así como la de realimentación  $u_{fb}(k)$  [3].

$$\begin{aligned} \underline{x}_m(k+1) &= \phi_m \underline{x}_m(k) + \gamma_m r(k) \\ y_m(k) &= C_m \underline{x}_m(k) \\ u_{ff}(k) &= \lambda r(k) + C_{ff} \underline{x}_m(k) \\ u_{fb}(k) &= -L(\underline{x}_m(k) - x_{fac}(k)) \end{aligned} \quad (7)$$

Si  $B(z)$  es el numerador de la planta en lazo abierto, y además se condiciona al sistema para que siga a un escalón de referencia, sin error de estado estacionario, se puede demostrar que:

$$\lambda = \frac{A_m(1)}{B(1)}$$

Con esto se tiene completo todo el algoritmo para programar el control completo de la planta.

#### 4.3. Introducción de la Perturbación

La perturbación en este sistema según se indica en [1], es de tipo constante, y puede verse que ingresa por la entrada del sistema después de multiplicarse por un factor

de escala, pues se trata de la superposición de tres torques: fricción, gravitación y carga. Puede mostrarse que, en general la perturbación no es alcanzable desde la entrada al sistema, pero si es observable [4], lo cual es lógico; y se usa este hecho para eliminar el efecto de la perturbación sobre el sistema, incluyendo un polo más al observador, por efecto de que la estimación del estado del observador incluye ahora la estimación de la perturbación [2]. Esto se realiza ampliando el modelo del observador, con el de la perturbación, el cual es:

$$V(k+1) = V(k)$$

El modelo ampliado del observador es:

$$\begin{bmatrix} \hat{x}(k+1) \\ \hat{v}(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi & \gamma \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x}(k) \\ \hat{v}(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \gamma \\ 0 \end{bmatrix} u(k) + K_A (y(k) - \hat{y}(k))$$

La matriz  $K_A$  del modelo ampliado se calcula de la misma forma descrita antes, pero ahora se incluye la condición para el cuarto polo del observador: los tres primeros polos del observador son iguales y el cuarto se escoge en el eje real y ubicado 1.5 veces más lejos que el anterior polo real.

En la figura 8 se realiza un sumario de la ubicación de polos en los diferentes tópicos que trata este documento. El diagrama que incluye todo lo relacionado en este algoritmo es el mostrado en la figura 9, el cual fue realizado y simulado con la herramienta Simulink de Matlab ®.

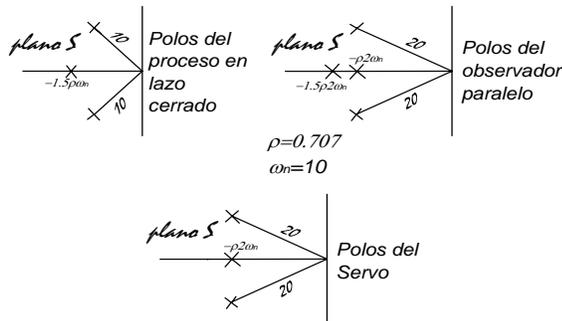


Figura 8. Ubicación de polos para todo el algoritmo.

Es importante notar que en el algoritmo se hace la realimentación de la diferencia entre las variables de estado del servo y las variables de estado observadas, pero debido a que el servo tiene el estado de referencia en forma canónica alcanzable, y el observador no tiene su estado en esta forma, se hace necesario transformar las variables de estado observadas a las de la forma canónica alcanzable. Nótese de la ecuación 11, que la señal de realimentación  $u_{fb}(k)$  necesita el estado en forma canónica alcanzable para poder restarlo del estado del modelo de referencia, entonces se requiere usar una transformación lineal cuya matriz es  $T$ , que transforma las variables de estado de algún modelo dado en el modelo de la forma canónica alcanzable, la matriz  $T$  es calculada así:

$$T = \tilde{W}_c W_c^{-1}$$

Donde  $\tilde{W}_c$  es la matriz alcanzable de la forma canónica alcanzable y  $W_c$  es la matriz alcanzable del modelo de estado original:

$$W_c = [\gamma \quad \phi\gamma \quad \phi^2\gamma]$$

Además de esto la realimentación del estado tiene la matriz  $L$  calculada a partir del modelo de estado original del observador, y ahora se va a realimentar un modelo alcanzable, esto implica que la matriz de realimentación debe ser ahora transformada a la matriz de realimentación del modelo alcanzable. Puede demostrarse que esta nueva matriz es:

$$\tilde{L} = LT^{-1}$$

En general el sistema tiene la respuesta dada en la figura 10 que muestra la referencia tipo escalón, y superpuesta con ella la respuesta del sistema, atenuando las condiciones iniciales; en 3 segundos se ve como el sistema responde a la perturbación tipo escalón, la cual atenúa y alcanza el estado estacionario; luego, en 6 segundos entra el comando de referencia escalón de magnitud 0.2 rad, que lo sigue en el estado estacionario sin error y además siguiendo el modelo de referencia; con un sobrepaso pequeño.

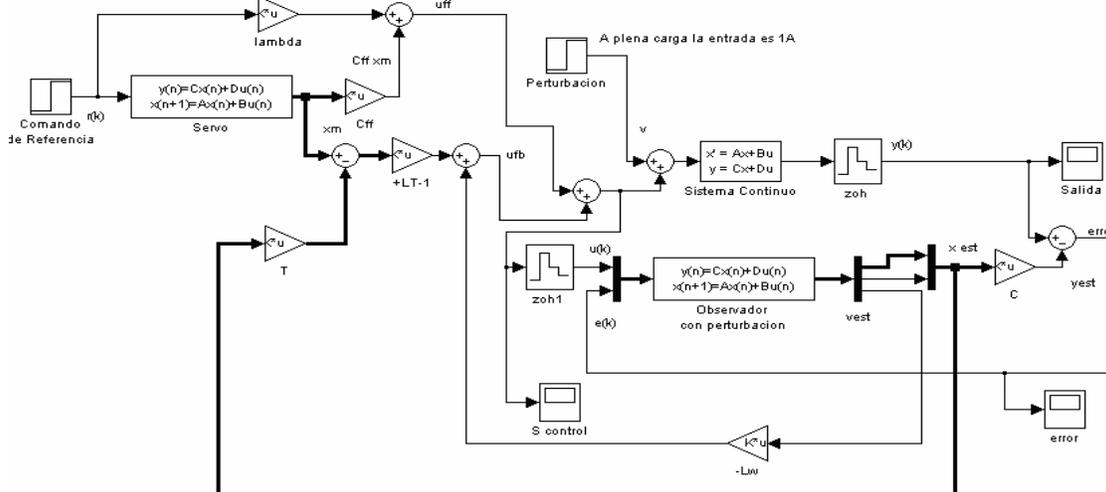


Figura 9. Diagrama completo del algoritmo descrito.

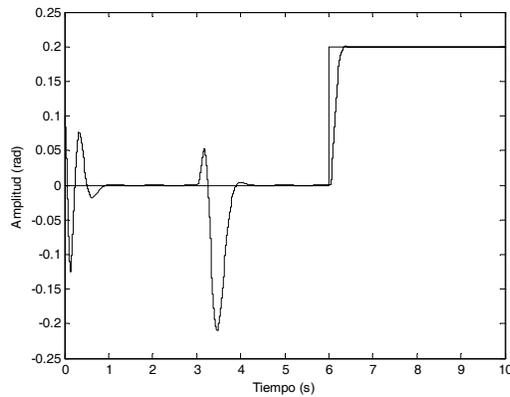


Figura 10. Seguimiento del sistema a una referencia escalón.

La figura 11 muestra como el error de estimación de la salida tiende a cero en el estado estacionario cada que hay actividad sobre el sistema, excepto cuando entra la perturbación, ya que puede mostrarse que el error de estimación no es alcanzable desde la entrada [2].

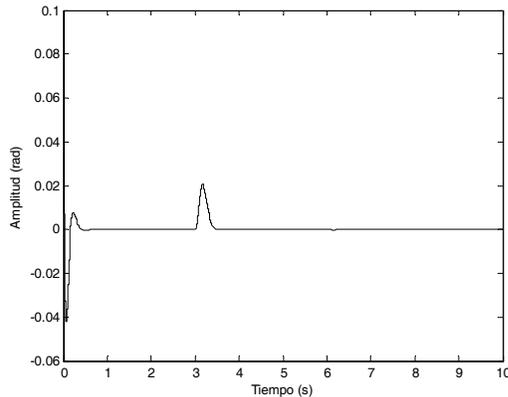


Figura 11. Error de estimación de la salida.

La figura 12 muestra la señal de control ejercida sobre el sistema, la cual no sobrepasa los límites previstos de corriente de armadura del motor, y sin embargo sí cumple todos los objetivos propuestos para el sistema.

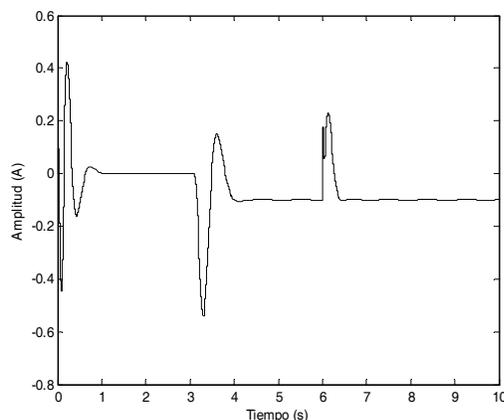


Figura 12. Señal de Control.

### 3. CONCLUSIONES

Se diseñó un algoritmo de control de posición para un sistema físico que consiste en una articulación móvil, basado en la realimentación lineal del estado, por una entrada del sistema, desde la cual este es controlable.

Un observador digital se hace necesario cuando no es conocido directamente el estado del sistema, sino solo una salida desde la cual el sistema es observable, para su posterior realimentación.

En este documento se ha realizado un observador del estado discreto que para el sistema continuo correspondería a una forma canónica *Observer*, además de incluir el algoritmo necesario para observar la perturbación de tipo escalón, y eliminar su efecto sobre el proceso en el estado estacionario.

Para que el sistema siga el comportamiento de un modelo especificado previamente se diseñó un modelo de referencia o servo el cual contiene la forma de respuesta requerida para el sistema, así como la referencia en estado estacionario.

Usualmente, como el servo tiene criterios de diseño para la forma canónica alcanzable, se opta por diseñar un modelo de estado en forma canónica alcanzable para el sistema, lo cual puede resultar poco conveniente cuando se quiere que las variables de estado tengan alguna interpretación física. Debido a ello se presentó en este artículo, una forma general para usar cualquier modelo de estado, y mediante una transformación lineal, adecuarlo al algoritmo deducido para la forma canónica alcanzable. Esto permite mayor flexibilidad en los diseños.

### 4. BIBLIOGRAFÍA

- [1] H. Liu, J. Butterfass, S Knoch, P. Meusel, G. Hirzinger, "Multisensory Articulated Hand," *IEEE Control Systems Magazine*, Volume 19 N° 2, pp. 47-61, Abril 1999.
- [2] GIRALDO, Didier, Control Digital, Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.
- [3] OGATA, Katsuhiko. Sistemas de control en tiempo discreto, Segunda edición, Prentice Hall, México, 1996.
- [4] ASTRÖM, K. J. y WITTENMARK, B. Computer-controlled systems, Theory and design, Upper Saddle River, Prentice-Hall, N.J. 1997.