

## ESTUDIO DE LA MANIPULABILIDAD EN EL SCORBOT ER V PLUS

### RESUMEN

Se presenta un estudio de la manipulabilidad cinemática del brazo antropomórfico del SCORBOT ER V PLUS. El estudio incluye el cálculo de la medida de la manipulabilidad y el elipsoide de manipulabilidad propuestos por Yoshikawa y otros índices de manipulabilidad basados también en el elipsoide.

**PALABRAS CLAVES:** manipulabilidad cinemática, elipsoide de manipulabilidad, mecanismo dos eslabones, brazo antropomórfico, robótica.

### ABSTRACT

*It presents a study of kinematics manipulability for the SCORBOT ER V PLUS' anthropomorphic arm. This study includes the manipulability measure and manipulability ellipsoid calculation as Yoshikawa proposes and other manipulability indices based also in the ellipsoid.*

**KEYWORDS:** Kinematics manipulability, manipulability ellipsoid, two links mechanism, anthropomorphic arm, robotics.

### 1. INTRODUCCIÓN

Para el análisis del desempeño de manipuladores y robots se dispone de medidas e índices que proveen información útil para su diseño y posterior planeamiento de movimiento. El trabajo de Yoshikawa sobre la manipulabilidad es un referente clásico sobre tales medidas y ha sido base para diversos trabajos sobre índices de la manipulabilidad en manipuladores, robots móviles y otros dispositivos mecánicos, como lo exponen Rosenstein y Grupen [8], Gravagne y Walker [4], Pham y Chien [7], Wen y Wilfinger [9], Hamner y otros [5] y Kim y Kosla [6].

La manipulabilidad se puede entender como la capacidad de cambio en posición y orientación del efector final del manipulador en una configuración dada y está estrechamente relacionada con la capacidad del efector final para aplicar carga en la configuración analizada.

Es posible resolver el estudio de la manipulabilidad desde diferentes enfoques, principalmente, se han considerado la manipulabilidad cinemática y la manipulabilidad dinámica. La primera está relacionada con la capacidad de desarrollar velocidad en una dirección dada, la última es la extensión de la cinemática hacia las aceleraciones y tiene en cuenta los efectos de la inercia y la gravedad.

Se presenta un estudio de la manipulabilidad cinemática para el manipulador SCORBOT ER V Plus, diseño de la compañía INTELITEK, del cual la U. T. P. posee un modelo en el laboratorio del postgrado de mecánica. El estudio se limita a la manipulabilidad del brazo antropomórfico, desarrollando el elipsoide de manipulabilidad e índices asociados.

### SEBASTIÁN DURANGO I.

Ingeniero Mecánico. M.Sc.  
Profesor  
Universidad Autónoma de Manizales.  
sebasracer@gmail.com

### MARCO TULIO CALDERÓN A.

Ingeniero Electricista. M.Sc.  
Profesor  
Universidad Autónoma de Manizales.  
mtcalderon@gmail.com

### 2. CONSIDERACIONES GENERALES: ELIPSOIDE Y MEDIDA DE MANIPULABILIDAD.

#### 2.1 Elipsoide de manipulabilidad.

Basado en el trabajo del profesor Yoshikawa [10]. Considérese un manipulador con  $n$  grados de libertad, entonces las variables de junta estarán caracterizadas por un vector  $n$ -dimensional,  $\mathbf{q}$ . Un vector  $m$ -dimensional,  $\mathbf{r} = [r_1, r_2, \dots, r_m]^T$  ( $m \leq n$ ) describirá la posición y la orientación del efector final. La relación cinemática entre  $\mathbf{q}$  y  $\mathbf{r}$  está dada por

$$(1) \quad \mathbf{r} = f_r(\mathbf{q})$$

Entre tanto, la relación entre el vector de velocidades  $\mathbf{v}$  correspondiente a  $\mathbf{r}$  y las velocidades de junta  $\mathbf{q}$  es

$$(2) \quad \mathbf{v} = \mathbf{J}(\mathbf{q})\mathbf{q}$$

donde  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  es la matriz Jacobiana.

Ahora considérese el conjunto de todas las velocidades  $\mathbf{v}$  que son realizables por velocidades de junta tal que la norma Euclidiana de  $\mathbf{q}$ ,  $\|\mathbf{q}\| = (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dots + \dot{q}_n^2)^{1/2}$  satisfaga  $\|\mathbf{q}\| \leq 1$ . Este conjunto es un elipsoide en el espacio Euclidiano  $m$ -dimensional. El efector final tiene mayor capacidad de movimiento en la dirección del eje mayor del elipsoide, por otra parte, en la dirección del eje menor la capacidad de desarrollar velocidad será menor. Dado que este elipsoide representa una capacidad de manipulación, se le conoce como elipsoide de manipulabilidad.

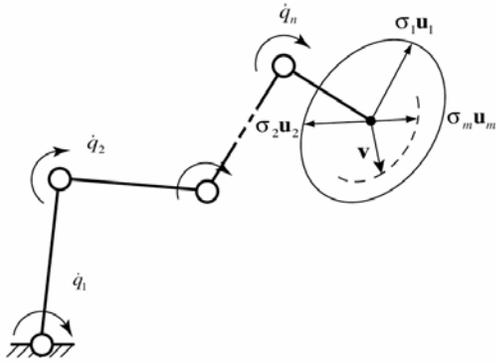


Figura 1. Elipsoide de manipulabilidad.

El elipsoide de manipulabilidad está dado por el conjunto de todos los  $\mathbf{v}$  que satisfagan

$$(3) \quad \mathbf{v}^T (\mathbf{J}^+)^T \mathbf{J}^+ \mathbf{v} \leq 1, \quad \mathbf{v} \in \mathbb{R}(\mathbf{J})$$

donde  $\mathbf{J}^+$  es la matriz pseudo inversa de  $\mathbf{J}$  y donde  $\mathbb{R}(\mathbf{J})$  denota el rango de  $\mathbf{J}$ .

En vez de calcular los valores de  $\mathbf{v}$  que satisfacen la expresión (3), es posible caracterizar el elipsoide de manipulabilidad valiéndose de sus ejes principales, para esto se requiere de una descomposición en valores singulares de la matriz  $\mathbf{J}$  que está dada por

$$(4) \quad \mathbf{J} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

donde  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{V}$  son, respectivamente, matrices ortogonales de tamaño  $m \times m$  y  $n \times n$  y donde  $\mathbf{\Sigma}$  es una matriz  $m \times n$  definida por

$$(5) \quad \mathbf{\Sigma} = \left[ \begin{array}{ccc|c} \sigma_1 & & & \mathbf{0} \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ \mathbf{0} & & & \sigma_m \end{array} \right] \mathbf{0}, \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$$

Los escalares  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m$  son los valores singulares de  $\mathbf{J}$ , y son iguales a los  $m$  mayores valores de las  $n$  raíces  $\{\sqrt{\lambda_i}, i=1,2,\dots,n\}$  donde los  $\lambda_i$  son los autovalores de la matriz  $\mathbf{J}^T \mathbf{J}$ . Siendo  $\mathbf{u}_i$  el  $i$ -ésimo vector columna de  $\mathbf{U}$ , los ejes del elipsoide de manipulabilidad estarán dados por  $\sigma_1 \mathbf{u}_1, \sigma_2 \mathbf{u}_2, \dots, \sigma_m \mathbf{u}_m$ .

**2.2 Medida de la manipulabilidad.** Una de las medidas representativas para la manipulabilidad derivada del elipsoide es su volumen. Este está dado por  $c_m w$ , donde

$$(6) \quad w = \prod_{i=1}^m \sigma_i$$

$$(7) \quad c_m = \begin{cases} (2\pi)^{m/2} / (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot m), & \text{si } m \text{ par} \\ 2(2\pi)^{(m-1)/2} / (1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (m-2) \cdot m), & \text{si } m \text{ impar} \end{cases}$$

Ya que el coeficiente  $c_m$  es una constante cuando  $m$  está fijo, el volumen es proporcional a  $w$ . Entonces, es posible usar  $w$  como una medida representativa. Se designa  $w$  como la medida de la manipulabilidad para la configuración  $\mathbf{q}$  del manipulador.

La medida de la manipulabilidad tiene las siguientes propiedades

$$(8) \quad w = \sqrt{\det \mathbf{J}(\mathbf{q}) \mathbf{J}^T(\mathbf{q})}$$

(9) Cuando  $m = n$ , esto es cuando se consideran manipuladores no redundantes, la medida  $w$  se reduce a  $w = |\det \mathbf{J}(\mathbf{q})|$

(10) Generalmente se cumple  $w \geq 0$  y  $w = 0$  si y sólo si  $\text{rango} \mathbf{J}(\mathbf{q}) < m$

Esto es cuando el manipulador alcanza una configuración singular. Desde esta perspectiva se puede entender la medida de la manipulabilidad como una forma de distancia de la configuración del manipulador de una singular.

**2.3. Otros índices de manipulabilidad.**

Hay otros índices de manipulabilidad basados en el elipsoide de manipulabilidad. La medida de la manipulabilidad antes descrita, y aquí denotada como  $w_1$ , corresponde con el volumen del elipsoide, y respecto a esta Pham y Chien [7] proponen: ‘La medida de la manipulabilidad tiene dos problemas: dependencia de escala y de orden. Estos no permiten la comparación entre manipuladores con diferentes dimensiones y hacen imposible determinar el sentido físico de la manipulabilidad’. Para reducir estos inconvenientes y determinar otras características inherentes a la manipulabilidad se han propuesto otros índices determinados a partir del elipsoide

$$(11) \quad w_2 = \sigma_m / \sigma_1$$

$$(12) \quad w_3 = \sigma_m$$

$$(13) \quad w_4 = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_m)^{1/m} = (w_1)^{1/m}$$

$$(14) \quad w_5 = w_1 / L^2$$

El índice  $w_2$  corresponde con la razón entre las longitudes del eje mínimo y máximo en el elipsoide, cuanto más cercana a uno es la razón, más esférico es el elipsoide. Este índice determina la uniformidad direccional del elipsoide. El índice  $w_3$  es la longitud del eje más corto en el elipsoide. Este proporciona el límite superior de la magnitud de la velocidad a la cual puede moverse el efector final en una cierta dirección. El índice  $w_4$  es la

media geométrica de del producto  $\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m$  y es igual al radio de la esfera cuyo volumen es el mismo que el del elipsoide, resuelve el problema de orden y Kim y Khosla [6] lo propusieron como la medida de manipulabilidad independiente de orden. Para el caso del problema de escala Kim y Khosla [6] proponen el índice independiente de escala  $w_5$ , donde  $L$  es una dimensión básica en el manipulador.

La elección de uno de los índices,  $w_1, \dots, w_5$  depende del propósito de la evaluación y de la facilidad de cálculo. Los índices  $w_1$  ó  $w_4$  resultan fáciles de calcular y generalmente son buenos para una evaluación basta. El índice  $w_2$  es útil cuando se requiere de una evaluación de la uniformidad de la manipulabilidad. El índice  $w_3$  se usa en casos en los que la capacidad mínima de manipulabilidad resulta ser crítica.

Los índices antes nombrados son de carácter local, en el sentido de que son funciones del vector de juntas  $\mathbf{q}$ , lo que implica que se evalúan para una configuración particular del brazo. Cuando se requiere una evaluación completa de un manipulador, se necesita algún tipo de índice global. Una de manera simple de determinar un índice global basado en índices locales es escoger una región apropiada de evaluación  $S$  en el espacio de  $\mathbf{q}$  y definir el índice  $w_{ig}$  como

$$(15) \quad w_{ig} = \min_{\mathbf{q} \in S} w_i$$

### 3. ESTUDIO DE LA MANIPULABILIDAD CINEMÁTICA DEL SCORBOT.

Se presenta un estudio para la manipulabilidad cinemática del SCORBOT ER V Plus, considerando sólo la capacidad de cambio de dirección asociada con el brazo del manipulador. Para la figura 2 y la figura 3  $l_3 = l_4 = 220$  mm y  $l_2 = 30$  mm según [3].

#### 3.1 Manipulabilidad en un mecanismo de dos eslabones.

En manipuladores industriales es común que funcionalmente se reserve la tarea de posicionar el efector final al brazo, mientras la muñeca deberá resolver la orientación requerida por la tarea propuesta. En el caso del SCORBOT el brazo está constituido por las tres primeras juntas, configuradas en una disposición antropomórfica. Es posible simplificar el estudio de la manipulabilidad del SCORBOT considerando los efectos de algunas juntas de manera independiente; particularmente, las juntas 2 y 3, presentadas en la siguiente figura, actúan en un plano que siempre será perpendicular al eje de la primera junta.

Con tales consideraciones, es posible analizar un mecanismo plano, de dos eslabones, dos juntas rotacionales y con dos grados de libertad, en el que es

posible aislar los efectos sobre la manipulabilidad de las juntas 2 y 3 para una configuración dada de la junta 1.

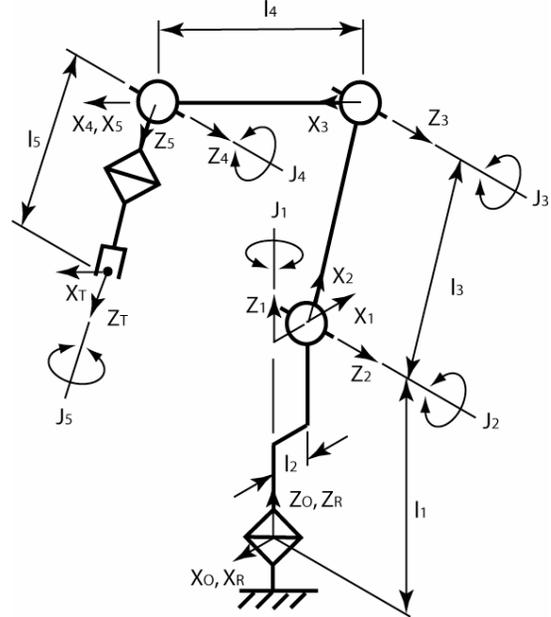


Figura 2. Asignación de marcos usando notación MDH: SCORBOT.

Dado que el mecanismo sólo tiene dos grados de libertad y que interesa medir la capacidad de cambio en la posición, el problema cinemático se reducirá a que el robot puede resolver dos de las tres coordenadas del espacio en el que existe, entonces, si se considera como punto de interés el extremo del mecanismo, el vector que determina la posición de tal punto será  $\mathbf{r} = [x, z]^T$  y la correspondiente matriz Jacobiana queda dada por

$$(16) \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} -l_3 \sin \theta_2 - l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) & -l_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\ l_3 \cos \theta_2 + l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) & l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) \end{bmatrix}$$

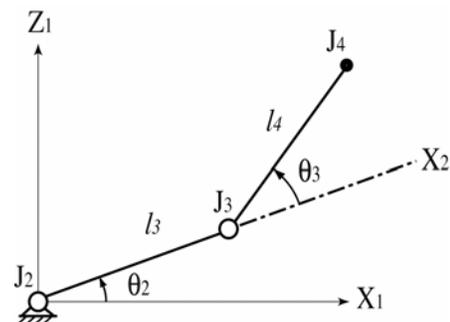


Figura 3. Mecanismo con dos eslabones.

En el mecanismo de dos eslabones  $m = n = 2$ , entonces la medida de la manipulabilidad  $w$  se reduce a

$$(17) \quad w = |\det \mathbf{J}| = l_3 l_4 |\sin \theta_3|$$

Por lo cual el manipulador esta en una configuración óptima de manipulabilidad cuando  $\theta_3 = \pm 90^\circ$ , sin importar los valores de  $l_3$ ,  $l_4$  y  $\theta_2$ .

### 3.1.1 Determinación de los ejes del elipsoide de manipulabilidad y otros índices de manipulabilidad.

Dado que el procedimiento de descomposición en valores singulares de manera analítica reviste cierta complejidad, se usó un enfoque numérico asistido con MatLab para la determinación de los valores singulares y de las direcciones de los ejes del elipsoide de manipulabilidad. Los cálculos están desarrollados sobre la función  $svd(\mathbf{X})$  que resuelve la descomposición en valores singulares de forma numérica para la matriz  $\mathbf{X}$ .

Los índices de manipulabilidad  $w_1$  a  $w_5$  se calcularon para  $0 \leq \theta_2 \leq \pi/2$  y  $\theta_3 = -2\theta_2$ , mostrando la variación de la manipulabilidad mientras el extremo del manipulador se mantiene en el eje  $X_1$ . Los ejes del elipsoide y los índices de la manipulabilidad se presentan en las siguientes figuras.

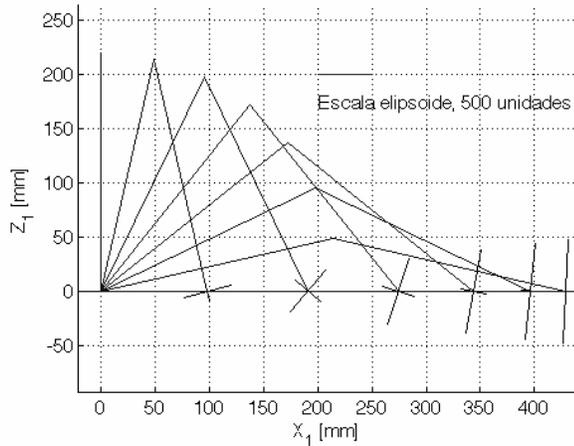


Figura 4. Ejes del elipsoide de manipulabilidad: Mecanismo dos eslabones.

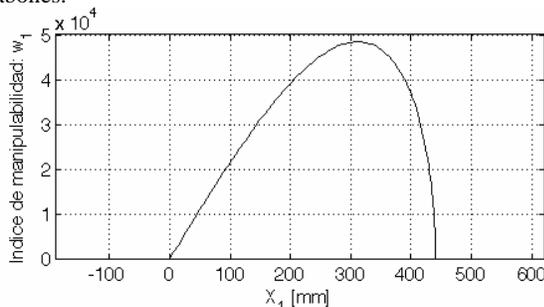


Figura 5. Medida de la manipulabilidad,  $W_1$ : Mecanismo dos eslabones.

### 3.2 Manipulabilidad en un mecanismo antropomórfico.

El mecanismo básico del brazo del SCORBOT es uno del tipo antropomórfico, formado por tres eslabones y tres pares rotacionales. El brazo resulta tener entonces tres grados de libertad que pueden resolver la posición de un punto en el espacio. El vector posición del efector

final podrá describirse como  $\mathbf{r}(\mathbf{q}) = [x, y, z]^T$ , donde  $\mathbf{q} = [\theta_1, \theta_2, \theta_3]^T$ . En este sistema hay correspondencia entre la movilidad del manipulador y el rango del vector  $\mathbf{r}$ , esto es,  $m = n = 3$ .

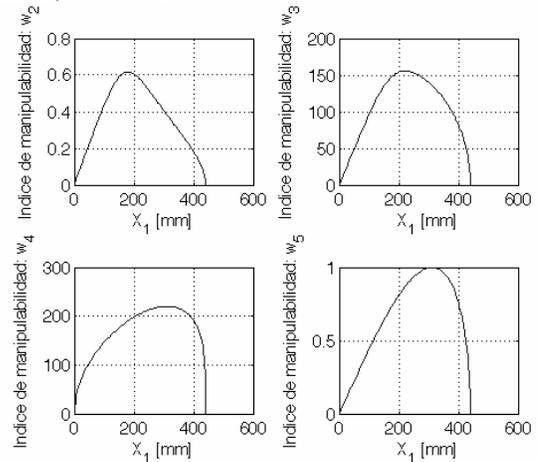


Figura 6. Otros índices de manipulabilidad: Mecanismo dos eslabones.

La figura 7 presenta el brazo del SCORBOT y la correspondiente asignación de marcos según la convención MDH, propuesta por Craig [1].

La matriz Jacobiana para la asignación de marcos está dada por la siguiente expresión

$$(18) \quad \mathbf{J}_r = \begin{bmatrix} J_{r(1,1)} & J_{r(1,2)} & J_{r(1,3)} \\ J_{r(2,1)} & J_{r(2,2)} & J_{r(2,3)} \\ J_{r(3,1)} & J_{r(3,2)} & J_{r(3,3)} \end{bmatrix}$$

donde

$$(19) \quad J_{r(1,1)} = -\frac{1}{2}l_4 \sin(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}l_4 \sin(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) - \sin \theta_1 (l_3 \cos \theta_2 + l_2)$$

$$(20) \quad J_{r(1,2)} = \frac{1}{2}l_4 \sin(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}l_4 \sin(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) - l_3 \cos \theta_1 \sin \theta_2$$

$$(21) \quad J_{r(1,3)} = \frac{1}{2}l_4 \sin(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) - \frac{1}{2}l_4 \sin(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2)$$

$$(22) \quad J_{r(2,1)} = \frac{1}{2}l_4 \cos(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) + \frac{1}{2}l_4 \cos(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) + \cos \theta_1 (l_3 \cos \theta_2 + l_2)$$

$$(23) \quad J_{r(2,2)} = \frac{1}{2}l_4 \cos(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}l_4 \cos(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2) - l_3 \sin \theta_1 \sin \theta_2$$

$$(24) \quad J_{r(2,3)} = \frac{1}{2}l_4 \cos(\theta_3 + \theta_1 + \theta_2) - \frac{1}{2}l_4 \cos(-\theta_3 + \theta_1 - \theta_2)$$

$$(25) \quad J_{r(3,1)} = 0$$

$$(26) \quad J_{r(3,2)} = l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3) + l_3 \cos \theta_2$$

$$(27) \quad J_{r(3,3)} = l_4 \cos(\theta_2 + \theta_3)$$

Dado que para este sistema  $m = n = 3$ , según la condición (9), la medida de la manipulabilidad se puede determinar como

$$(28) \quad w_1 = |\det \mathbf{J}| = \frac{1}{2} l_4^2 l_3 |\sin \theta_2 - \sin(2\theta_3 + \theta_2)| + \frac{1}{2} l_3^2 l_4 |\sin(\theta_2 - \theta_3) - \sin(\theta_2 + \theta_3)| - l_2 l_4 l_3 |\sin \theta_3|$$

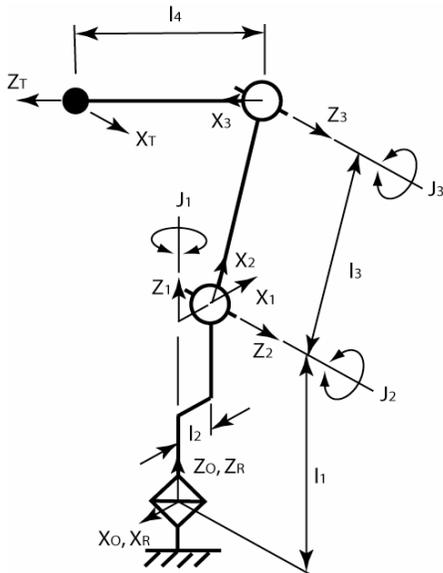


Figura 7. Asignación de marcos para el brazo del SCORBOT, convención MDH.

La mejor configuración para valores de  $l_2$ ,  $l_3$  y  $l_4$  dados se puede determinar como sigue: primero, la manipulabilidad para el mecanismo antropomórfico resulta ser independiente del parámetro cinemático  $\theta_1$ , segundo, para el SCORBOT,  $l_3 = l_4$ , entonces, asumiendo que  $\cos \theta_3 \neq -1$  y  $\sin \theta_3 \neq 0$ , se puede ver de  $\partial w_1 / \partial \theta_2 = 0$  que

$$(29) \quad \tan \theta_2 = \frac{l_4(-1 + \cos^2 \theta_3)}{\sin \theta_3(l_4 \cos \theta_3 + l_3)}$$

Evaluando la función antes descrita para  $-\pi < \theta_3 < 0$ , se encuentra el rango de valores de  $\theta_2$  correspondientes que maximizan la manipulabilidad para un  $\theta_3$  dado. La siguiente figura presenta las configuraciones del SCORBOT que se obtienen al evaluar la expresión (29) para ocho posiciones discretas bajo las condiciones antes descritas. La figura muestra que el extremo del brazo debería estar en un plano paralelo al  $X_R Y_R$ , a la altura de la segunda junta para maximizar la contribución de la de la junta 1 a la medida de la manipulabilidad,  $w_1$ .

La evaluación de la expresión (28) para las configuraciones óptimas descritas en la figura 8 permite

determinar de manera gráfica el valor máximo de la manipulabilidad, el resultado se presenta en la figura 9.

El valor óptimo del ángulo  $\theta_3$  entre las configuraciones óptimas, será aproximadamente  $71,6^\circ$ .

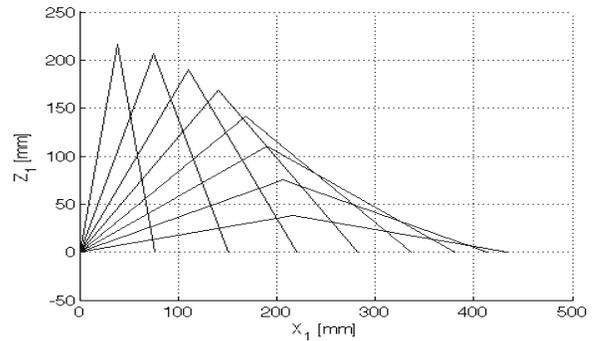


Figura 8. Configuraciones de manipulabilidad óptimas para el brazo del SCORBOT.

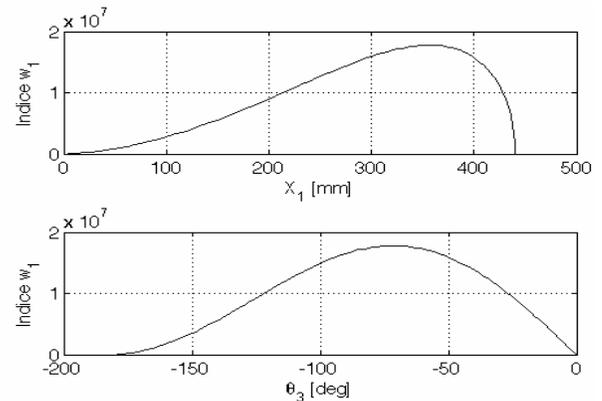


Figura 9. Medida de la manipulabilidad para las configuraciones óptimas del brazo del SCORBOT.

**3.2.1 Determinación de los ejes del elipsoide de manipulabilidad y otros índices de manipulabilidad.**

Usando una metodología homóloga a la expuesta para el estudio de la manipulabilidad en el mecanismo de dos eslabones se propone un enfoque de solución numérico para la determinación de los índices de manipulabilidad  $w_1$  a  $w_5$  y para el cálculo de los ejes del elipsoide de manipulabilidad. El estudio presentado corresponde a las configuraciones óptimas del brazo.

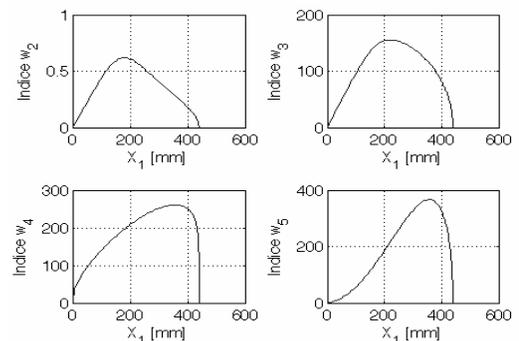


Figura 10. Varios índices de manipulabilidad para las configuraciones óptimas del brazo del SCORBOT.

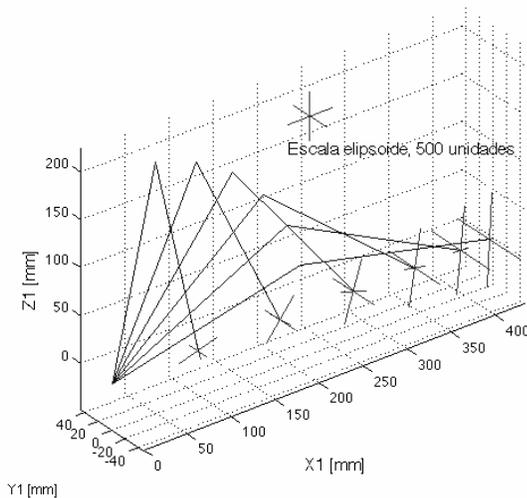


Figura 11. Ejes del elipsoide de manipulabilidad para las configuraciones óptimas del brazo del SCORBOT.

#### 4. CONCLUSIONES

El estudio de la manipulabilidad del SCORBOT permite tener parámetros de decisión para la selección de configuraciones en la solución de labores específicas. Los índices expuestos se adaptan a diferentes necesidades, pudiéndose estudiar la capacidad de cambio de posición, su uniformidad direccional y el límite superior que la restringe en una configuración dada. Para el caso del brazo antropomórfico en el SCORBOT se determinó que siendo este tratado como un mecanismo plano de dos eslabones (figura 3) la manipulabilidad resulta ser independiente de la configuración de la junta 2 (figura 2) y alcanza su mayor valor cuando la junta 3 se configura a  $90^\circ$ .

Al introducir el efecto de la primera junta se configura el brazo antropomórfico y el aporte de la primera junta a la manipulabilidad resulta relevante, aunque su valor resulta ser independiente de esta. Se encontró que hay una serie de configuraciones óptimas cuando se mantiene el extremo del brazo a la altura de la segunda junta y entre estas se obtiene la mayor manipulabilidad cuando la junta 3 se configura a  $71,6^\circ$ .

Aunque aquí no se expuso, la manipulabilidad cinemática resulta ser inversamente proporcional a la capacidad para aplicar carga de manera estática del manipulador, entonces, para una configuración particular las direcciones en las que hay mayor capacidad de cambio de posición resultan ser las que menor capacidad de aplicación de carga tienen.

No debe entenderse la medida de la manipulabilidad como un criterio de calificación para un manipulador, si no más bien entender que resulta ser una herramienta de análisis que tiene aplicación según una situación particular.

Se espera ampliar la aplicación de la manipulabilidad al estudio de cadenas cinemáticas cerradas, esto buscando

generalizar la aplicación de conceptos en la mecánica. Un ejemplo de esta idea se puede ver en [2] donde se muestra el estudio cinemático de mecanismos usando técnicas para el análisis de robots.

#### 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] CRAIG, John J. Introduction to Robotics: Mechanics and Control. 2 ed. Reading : Addison – Wesley, 1989. 450 p.
- [2] CALLE, Gabriel, CALDERON, Marco T. y DURANGO, Sebastián. Análisis Cinemático de Cadenas Cerradas usando Técnicas para el Análisis de Robots. Ibagué : Memorias del Congreso Nacional de la ACA, 2004.
- [3] ESHED ROBOTEC. SCORBOT-ER V plus: User's Manual. s. l. : ESHED, 1982. 144 p.
- [4] GRAVAGNE, Ian A. y WALKER, Ian D. Manipulability, Force and Compliance Analysis for Planar Continuum Manipulators. En: IEEE Transactions on Robotics and Automation. No. 3, v. 18 (2002), p 263-273.
- [5] HAMNER, Bradley S. *et al.* Motion Planning for a Mobile Manipulator with Imprecise Locomotion. s. l.: IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems (IROS '03), 2003.
- [6] KIM, J y KOSLA, P. Dexterity Measures for Design and Control of Manipulators. s. l.: IEEE/RSJ Int. Workshop on Robots ans Systems IROS'91. 1991. p 758-763.
- [7] PHAM, Huy Hoang y CHEN, I-Ming. Optimal Synthesis for Workspace and Manipulability of Parallel Flexure Mechanism. Tianjin: Proceedings of the 11th World Congress in Mechanism and Machine Science. 2003.
- [8] ROSENSTEIN, Michael T. y GRUPEN, Roderic, A. Velocity-Dependent Dynamic Manipulability. s. l.: Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. v. 3 (2002), p 2424-2429.
- [9] WEN, John Ting-Yung y WILFINGER, Lee S. Kinematic Manipulability of General Constrained Rigid Multibody Systems. En: IEEE Transactions on Robotics and Automation. No. 3, v. 15 (1999), p 558-567.
- [10] YOSHIKAWA, Tsuneo. Foundations of Robotics. Cambridge : The MIT Press, 1990. p 127-154.