

MODELADO CINÉTICO TRIDIMENSIONAL DE LA RODILLA

RESUMEN

En este documento se presenta el modelado cinemático de la rodilla humana, necesario para un posterior modelamiento dinámico de esta articulación que conducirá a una simulación computacional. Estos modelos y la simulación, constituyen una herramienta para el diseño y construcción personalizada de prótesis y órtesis.

PALABRAS CLAVES: Cinemático, modelamiento, rodilla, computacional, prótesis.

ABSTRACT

This document shows the human kinetic model necessary for a further dynamic of this joint which will lead to a computer simulation. Both models and simulation is a tool for a personalized design and construction of prosthesis and orthosis.

KEYWORDS: Kinematic, kinetic model, Knee, computer, prosthesis.

1. INTRODUCCIÓN

El diseño y construcción personalizada de dispositivos protésicos y ortésicos pasa en primera instancia por el modelamiento cinemático[1]; el enfoque mecánico de la articulación permite analizarla como un par cinemático, aplicándole a ésta los principios de la mecánica clásica newtoniana resultando relativamente sencillo el modelamiento a nivel de ingeniería. Si bien el modelado cinemático y dinámico articular no son nuevos en el mundo, para Colombia su aplicación es bastante complicada dado que el estado del arte de la investigación de las variables antropométricas, fisiológicas y anatómicas de la población colombiana es bastante pobre.

El modelo presentado se ha pensado para una persona sana, que sirva como variable de control, ya que tal modelamiento no tiene en cuenta las diversas patologías, por ejemplo la artritis reumatoide. Un modelado bajo patologías específicas puede abordarse a partir del presente trabajo.

Basados en la fisiología articular tibio femoral[2] se caracteriza la articulación, que tiene 6 grados de libertad. Asignando los ejes de coordenados de manera anatómica, se determinan los puntos de contacto y se garantiza la compatibilidad geométrica.

Debe hacerse hincapié en que “grado de libertad” usado aquí debe entenderse en el sentido que la frase define en la mecánica, porque la mayoría de los anatomistas y las personas médicas tiene una comprensión diferente de este concepto (por ejemplo, Steindler y MacConaill implican que el número máximo de grado-de-libertad requirió para el movimiento anatómico es tres[3]; no obstante, la acepción ingenieril común tampoco debe aplicarse llanamente, dado que esto implicaría una ausencia total del par; el análisis de 6 grados de libertad se hace teniendo en cuenta que: 1) un elemento articular es el marco referencia inercial –en este caso la tibia- lo cual permite abarcar todos los posibles mecanismo de lesión y, 2) La juntura de seis grados de libertad (la juntura general) permite todos los posibles movimientos entre los dos segmentos del cuerpo.

JAVIER TORRES OSORIO

Ingeniero Electricista
Profesor Depto de Física
Universidad Tecnológica de Pereira
oscur@utp.edu.co

ALEXANDER BALLESTEROS

Ingeniero Mecánico.
abp@utp.edu.co

Entre las principales dificultades para el modelamiento y posterior simulación, se encuentra la determinación de las variables anatómicas (superficies articulares, constantes de deformación de tejido suave, entre otras)[4] y [5] para lo cual los investigadores utilizan Métodos Ópticos[6], Resonancia Magnética[7], y Análisis de Elementos Finitos[8] y [9]. No obstante, la cuantificación de la cinemática articular se efectúa normalmente usando las técnicas basadas en video[10] y [11], las uniones espaciales instrumentadas (ISLs)[12] y [13] o los sistemas de rastreo electromagnético[14] y [15]. Tales sistemas de cuantificación tienen cada uno sus ventajas y desventajas, por lo que el investigador debe ser muy cuidadoso a la hora de su implementación.

2. CONSIDERACIONES FISIOLÓGICAS [2].

La rodilla es la articulación intermedia del miembro inferior, compuesta por las articulaciones tibio-femoral y patelofemoral, cuyo movimiento es una mezcla de traslación y rotación puras[16] y [17].

Principalmente, es una articulación dotada de un solo sentido de libertad de movimiento: la flexión–extensión, que le permite acercar o alejar el extremo del miembro a su raíz, o lo que es lo mismo, regula la distancia que separa el cuerpo del suelo. En esencia, la rodilla trabaja comprimida por el peso que soporta.

Además, la articulación de la rodilla posee un segundo sentido de libertad: la rotación sobre el eje longitudinal de la pierna, que sólo aparece cuando la rodilla está en flexión.

Estos son los movimientos naturales de la rodilla; cuando se presenta una sobrecarga dinámica se violentan estos grados de libertad y la energía es disipada por el tejido blando presente; aquí radica la necesidad e importancia de considerar a esta articulación como de 6 grados de libertad, ya que necesitamos conocer bajo que condiciones de carga se presentan desplazamientos que generan lesiones y los parámetros necesarios y suficientes para

diseñar y construir dispositivos ortésicos y protésicos[3] y [18].

Considerada desde el punto de vista mecánico, la articulación de la rodilla constituye un caso sorprendente debe conciliar dos imperativos contradictorios[2]:

- Poseer una gran estabilidad en extensión completa, posición en la que la rodilla soporta presiones importantes, debidas al peso del cuerpo y a la longitud de los brazos de palanca;
- Alcanzar una gran movilidad a partir de cierto ángulo de flexión, movilidad necesaria en la carrera y para la orientación óptima del pie en relación con las irregularidades del terreno.

3. MATEMÁTICA ARTICULAR.

Consideremos aspectos generales, que dan pie al modelamiento cinemático, necesarios para comenzar el desarrollo de las ecuaciones cinemáticas que gobiernan el movimiento articular de la rodilla.

El sistema de coordenadas utilizado en éste documento, es similar a los más comúnmente usados. Asignando dos sistemas coordenados cartesianos en la articulación, así: uno absoluto asociado con la tibia y el otro, el relativo, asociado al fémur (ver figura 1). El eje Z es alineado con el eje anatómico de la extremidad, siendo positivo en la dirección proximal[17]. El eje X perpendicular saliendo del plano sagital y positivo en la dirección anterior. El eje Y fue derivado de la regla de la mano derecha: $Y = Z \times X$. Sin pérdida de generalidad, el origen del sistema coordenado absoluto fue localizado en el punto medio del componente tibial en la dirección medial-lateral; el origen del sistema coordenado relativo fue localizado sobre el corte distal para el componente femoral, además sobre el punto medio del componente femoral en la dirección medial-lateral.

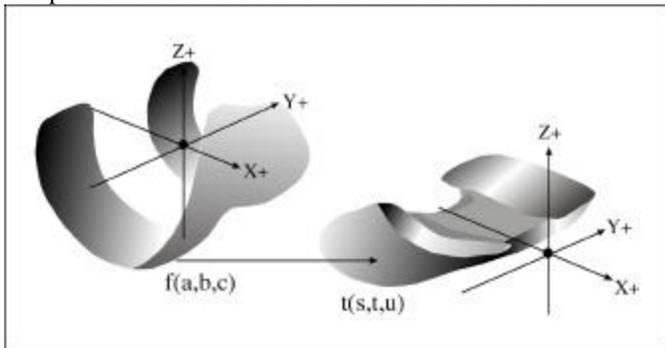
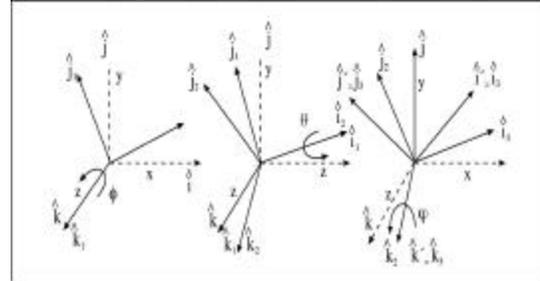


Figura 1. Dos sistemas coordenados usados. El movimiento es descrito como un campo femoral móvil que es rotado y trasladado con respecto al campo tibial fijo.

En general una matriz de transformación rotacional, T, que sigue la secuencia rotacional, θ, ϕ, ψ , a lo largo de ejes coordenados (ver gráfica 2), se representa por medio de ec (1); de acuerdo con [19]:

$$[T] = T [q, f, y] \tag{1}$$

La orientación del sistema móvil $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ es obtenido del sistema coordenado fijo $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ aplicando las rotaciones sucesivas de θ, ϕ y ψ , como se indica en la figura 3. La matriz de transformación ortogonal [T] resultante se encuentra dada por la ec (2):



a) ϕ Alrededor de \hat{k} b) θ alrededor de \hat{i}_2 c) ψ alrededor de \hat{k}_2

Figura 2. Rotaciones sucesivas de θ, ϕ y ψ sobre el sistema coordenado (x, y, z).

$$[T] = \begin{bmatrix} c\phi c\psi & c\psi s\phi & s\phi s\psi \\ -s\phi c\psi & c\psi c\phi & -s\psi c\phi \\ -c\psi s\phi + s\phi s\psi & c\psi s\phi & -s\psi c\phi & c\psi \end{bmatrix} \tag{2}$$

En la matriz anterior: $c\phi = \text{Cos } \phi, s\theta = \text{Sen } \theta$; similarmente para las otras simplificaciones.

Ahora, aplicando éste concepto en la articulación de nuestro interés, los sistemas coordenados asignados (figura 1) están relacionados por las transformaciones que rigen un cuerpo rígido. Si \bar{r} es el vector que mide las coordenadas de un punto en un sistema, entonces sus coordenadas en el otro sistema pueden ser expresadas:

$$\bar{q} = R\bar{r} + \bar{d} \tag{3}$$

Donde R es una matriz de rotación ortogonal y \bar{d} es un vector de desplazamiento. Aquí, R es siempre descrita por 3 rotaciones sucesivas alrededor de los ejes coordenados. Para los ángulos a, b , y g abreviando $\text{Sen } (\alpha) = s\alpha, \text{Cos } (\alpha) = c\alpha$ y de manera similar para los ángulos restantes, R se obtiene como:

$$R(a, b, g) = R_y(b) R_z(g) R_x(a) \tag{4}$$

$$R(a, b, g) = \begin{bmatrix} cgc b & -sg & cgs b \\ cags b + sas b & cagc & cags b - sacb \\ sas gb - cas b & sacg & sas gb \end{bmatrix} \tag{5}$$

El vector es rotado primero en flexión (alrededor del eje Y), luego en rotación interna-externa (alrededor del eje Z), y finalmente en una angulación varus/valgus (alrededor del eje X).

La secuencia de rotaciones fue escogida de manera que la flexión fuera la primera, dado que la flexión es el principal movimiento de la rodilla [17]

Al reemplazar la matriz (5) en la ecuación (3), se obtiene la matriz de transformación, necesaria para describir el movimiento relativo de un punto, sea o no de contacto.

En general la matriz $T(\alpha, \beta, \gamma, \bar{d})$, determina el punto \bar{r} así:

$$\bar{q} = R(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{g}) \bar{r} + \bar{d} \quad (6)$$

Es útil conocer un modelo cinemático para todo el fémur, desde un enfoque sistémico, ya que lo escrito hasta ahora se centra exclusivamente en la articulación tibio-femoral (Tal desarrollo sobrepasa el objetivo del presente documento).

Tal modelo involucra la articulación en la cadera y considera a ésta como la superposición de tres pares de revoluta independientes y ortogonales; la rodilla es considerada como un par de revoluta simple [20] y [21]. Ver la figura (3).

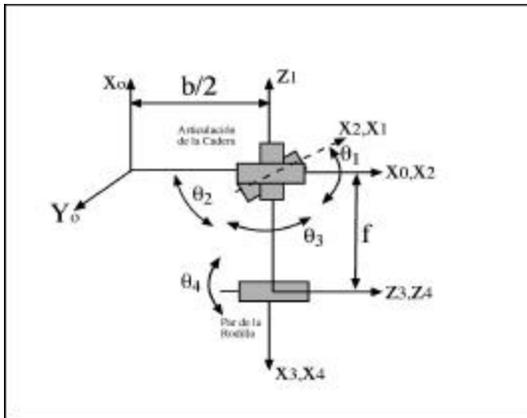


Figura 3. Modelo cinemático del fémur

Aplicando la representación Denavit-Hartemberg experimentada y propuesta en [22] por Fu K. la siguiente tabla fue aplicada y, como resultado, se han obtenido las correspondientes matrices de transformación:

Articulación	q_i	α_i	l_i	d_i
1	θ_1	-90°	0	0
2	θ_2	-90°	0	0
3	θ_3	90°	f	0
4	θ_4	0	0	0

Tabla 1. Valores para un modelo de enfoque sistémico.

$${}^0T_1 = \begin{bmatrix} cq_1 & 0 & -sq_1 & 0 \\ sq_1 & 0 & cq_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^1T_2 = \begin{bmatrix} cq_2 & 0 & -sq_2 & 0 \\ sq_2 & 0 & cq_2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2T_3 = \begin{bmatrix} cq_3 & 0 & sq_3 & fcq_3 \\ sq_3 & 0 & -cq_3 & fsq_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad {}^3T_4 = \begin{bmatrix} cq_4 & -sq_4 & 0 & 0 \\ sq_4 & cq_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Donde en las cuatro matrices anteriores: θ_i ($i = 1, 2, 3, 4$) son las variables de la articulación y f es la longitud del fémur.

Las ecuaciones cinemáticas que describen el movimiento del fémur con respecto a un campo de referencia general, son obtenidas al multiplicar las 4 matrices anteriores. Así, la matriz general:

$${}^0G_4 = {}^0T_1 * {}^1T_2 * {}^2T_3 * {}^3T_4 \quad (8)$$

$${}^0G_4 = \begin{bmatrix} d[c2c3c4-s2s4]+d[-c2c3s4-s2c4]-c2c3-s1c3 & f(c2c2c3-s1s3) \\ sls3c4 & sls3s4 \\ s[c2c3c4-s2s4]-s[-c2c3s4-s2c4]+slc2s3+c2c3 & f(sl c2c3+cl s3) \\ cl s3c4 & cl s3s4 \\ -(s2c3c4+c2s4) & s2c3s4-c2c4 & -s2s3 & -fs2c3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

Igualmente, $\cos \theta_i = c_i$, $\sin \theta_i = s_i$ para $i = 1, 2, 3, 4$. Dado que la formulación de los modelos dinámico y cinemático, toman a la articulación, compuesta por el fémur distal y la tibia proximal, como partes de semiesfera (fémur distal) y planos (tibia proximal) que pueden tener 1, 2 o 4 puntos de contacto [3], se hace necesario definir las ecuaciones vectoriales que aseguren la colinealidad de los vectores normales unitarios, así como garantizar que el punto de contacto pertenece, simultáneamente, a las dos superficies de contacto.

3.1 Condiciones del punto de contacto.

De acuerdo a la figura 4, para cada punto de contacto, C_i , se cumple:

$$\{r_{ci}\} = \{\bar{r}_0\} + [T]^T \{r'_{ci}\} \quad (10)$$

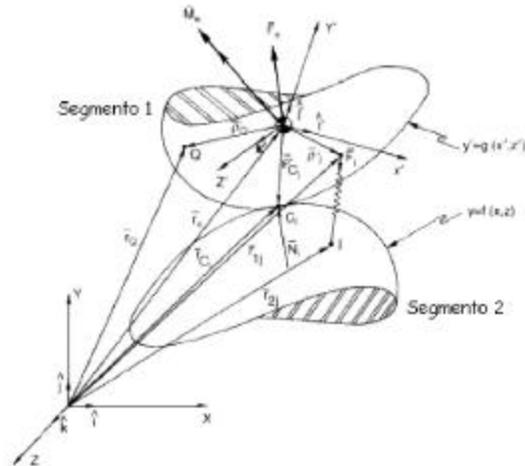


Figura 4 Articulación de los cuerpos segmentada. Segmento 1: Fémur; Segmento 2: Tibia.

Donde:

- \bar{r}_{ci} = vector de posición del punto i respecto del marco de referencia inercial.
- \bar{r}_0 = vector de posición del marco referencial relativo respecto del marco referencial inercial.
- $[T]^T$ = matriz de transformación rotacional. En este modelo se utiliza la secuencia: θ, ϕ, ψ alrededor de los ejes x, y, z , respectivamente.
- $\{r'_{ci}\}$ = vector de posición del punto i respecto del marco referencial relativo

El lector debe observar lo siguiente:

- 1) la figura 4 introduce, a diferencia de la figura 1, la noción de función generatriz de las superficies articulares: $y = g(x, z)$, $y = f(x, z)$

- 2) las ecuaciones (3) y (10) son iguales.
- 3) La matriz R, ec(5), es exactamente igual a la matriz T de la Ec. (10), observando que deben cumplir la misma secuencia de rotaciones.

De otra manera: el contacto entre las superficies articulares tibial y femoral puede ser modelado como dos puntos ideales de contacto[17], uno en el compartimiento medial y otro en el compartimiento lateral. Tomemos la cuádrupla de contacto $\{C_m, C_l, \hat{C}_m, \hat{C}_l\}$ que son puntos en la tibia medial, tibia lateral, fémur medial y fémur lateral, respectivamente, con los vectores unitarios normales correspondientes $\{n_m, n_l, \hat{n}_m, \hat{n}_l\}$ los cuales tuvieron alguna transformación T (.), tal que:

$$\begin{aligned} \hat{C}_m &= R(C_m) + \bar{d} \\ \hat{C}_l &= R(C_l) + \bar{d} \\ \hat{n}_m &= -R(n_m) \\ \hat{n}_l &= -R(n_l) \end{aligned} \tag{11}$$

Estas ecuaciones especifican que el contacto ideal ocurre cuando los puntos de la superficie coinciden en el espacio, con los vectores unitarios normales apuntando en direcciones opuestas (formando un ángulo de 180°).

Una cuádrupla de contacto establece la angulación varus/valgus de la articulación. Esta angulación más la traslación establecida y el ángulo de flexión dadas, determinan completamente la posición de la rodilla en esa cuádrupla. En la notación de la figura 5, dados los puntos de contacto $((y_1, z_1), (y_2, z_2))$, el valor numérico de la angulación varus esta dado por la ecuación (13):

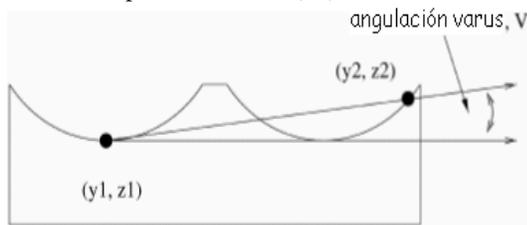


Figura.5. La angulación varus es determinada por los sitios de la cuádrupla de contacto.

$$V = \arctg\left(\frac{z_2 - z_1}{y_2 - y_1}\right) \tag{12}$$

En la práctica [17], cuando se toman las configuraciones de la geometría articular vía escaneos tridimensionales en tiempo real, las superficies (y las normales asociadas) se representan como conjuntos de puntos discretos y, generalmente, no se encuentran coincidencias exactas entre la imagen capturada y la articulación real; por tanto sea δ una tolerancia en distancia (en mm) y sea ϵ una tolerancia angular (en radianes). Usando el hecho de que el ángulo θ entre dos vectores unitarios a y b satisfacen la ecuación $\cos(\theta) = a \cdot b$, las ecuaciones vectoriales para la cuádrupla de contacto, Ec (11) se pueden describir para medidas discretas como:

$$\begin{aligned} \|\hat{C}_m - R(C_m) - \bar{d}\| &\leq d \\ \|\hat{C}_l - R(C_l) - \bar{d}\| &\leq d \\ \hat{n}_m \cdot (-R(n_m)) &\geq \cos(\epsilon) \\ \hat{n}_l \cdot (-R(n_l)) &\geq \cos(\epsilon) \end{aligned} \tag{13}$$

Una transformación que satisfaga las cuatro ecuaciones anteriores unifica el sistema de coordenadas, así que para una cuádrupla de contacto dada se presenta una transformación desde el sistema de coordenadas femorales (marco referencial móvil) en un sistema de coordenadas tibiales (marco referencial inercial).

Para la situación de tener una buena certeza al modelar las superficies articulares, se puede afirmar basado en [17] lo siguiente:

Sean (x_c, y_c, z_c) las coordenadas del punto de contacto en el sistema coordinado femoral y (x'_c, y'_c, z'_c) las coordenadas del punto de contacto en el sistema coordinado tibial. Además, sea $z_c = f(x_c, y_c)$ y $z'_c = g(x'_c, y'_c)$ las ecuaciones que describen la forma de las superficies articulares femoral y tibial, respectivamente.

Las ecuaciones vectoriales para los puntos de contacto, se pueden escribir escalarmente así:

$$\begin{aligned} x_c &= x_0 + R_{11}x'_c + R_{12}y'_c + R_{13}g(x'_c, y'_c) \\ y_c &= y_0 + R_{21}x'_c + R_{22}y'_c + R_{23}g(x'_c, y'_c) \\ z_c &= z_0 + R_{31}x'_c + R_{32}y'_c + R_{33}g(x'_c, y'_c) \end{aligned} \tag{14}$$

Las cuales son la definición matemática de punto de contacto.

3.2 Condición de compatibilidad geométrica de las superficies articulares.

Para propósitos didácticos y de simplificación en el procedimiento, la superficie articular femoral se aproximará a una esfera y, a su vez, la superficie articular tibial se aproximará a un plano. Las ecuaciones de las esferas femorales laterales y mediales son expresadas, en el sistema coordinado femoral, como:

$$f(x, y) = -\sqrt{r^2 - (x - h)^2 - (y - k)^2} + L \tag{15}$$

Los siguientes valores son proporcionados por Hefzy[9]:

Parámetro	Esfera medial (mm)	Esfera lateral (mm)
r	21	20,0
h	23,75	23,0
k	18,0	16,0
L	12,0	11,5

Tabla 2. Valores de los parámetros para la superficie articular esférica (cóndilo femoral).

Similarmente, las ecuaciones de los planos tibiales lateral y medial en el sistema coordinado tibial:

$$g(x', y') = my' + c \tag{16}$$

Igualmente, Hefzy propone:

Parámetro	Plano medial (mm)	Plano lateral (mm)
m	0,358	-0,341
c	213	212,9

Tabla 3. Valores de los parámetros para la superficie articular plana (placa tibial).

La condición de compatibilidad geométrica de cuerpos rígidos requiere que un plano tangente único exista para cada punto de contacto a ambas superficies[19]. Para expresar tal condición en forma matemática, el vector de posición del punto de contacto en el sistema coordenado femoral

$$\vec{R}_c = x_c \hat{i} + y_c \hat{j} + z_c \hat{k} \quad (17)$$

debe ser diferenciado con respecto a las coordenadas locales (x,y) para obtener dos vectores tangentes a lo largo de esas direcciones locales. El producto vectorial de esos vectores tangentes es entonces empleado para determinar el vector unitario normal a la superficie femoral, \hat{n}_f , en el punto de contacto. Usando la ecuación $z_c = g(x_c, y_c)$, este vector unitario es expresado en el sistema coordenado femoral como:

$$\hat{n}_f = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{(x_c, y_c)} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(x_c, y_c)} \hat{j} - \hat{k}}{\left[1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (18)$$

El vector unitario normal expresado en el sistema coordenado tibial, usando la ecuación $z'_c = g(x'_c, y'_c)$, está dado por:

$$\hat{n}'_t = \frac{\frac{\partial g}{\partial x'} \Big|_{(x'_c, y'_c)} \hat{i} + \frac{\partial g}{\partial y'} \Big|_{(x'_c, y'_c)} \hat{j} - \hat{k}}{\left[1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y'} \right)^2 \right]^{1/2}} \quad (19)$$

Engin en[3], premultiplica los vectores anteriores (Ecs. 16 y 17) por sendos factores \mathbf{g} y $\mathbf{\beta}$ respectivamente, escogidos de tal manera que representen la normal saliente.

3.3 Colinealidad de vectores unitarios normales. Para que dos vectores unitarios normales sean colineales, deben satisfacer la ecuación:

$$\{n_{ci}\} = [T]^T \{\hat{n}_{ci}\} \quad (20)$$

Donde:

n_{ci} = vector unitario normal en el sistema coordenado inercial[

\hat{n}_{ci} = vector unitario normal en el sistema coordenado relativo

3.4 Cálculo de la Fuerza Ligamentosa [7], [18] y [23]. Las fuerzas de contacto y en el ligamento son las desconocidas; la fuerza presente en el j-ésimo ligamento es definida por:

$$F_j = \begin{cases} 0 & si = \begin{cases} e_j \leq 0 \\ 0 \leq e_j \leq 2e_1 \\ e_j \geq 2e_1 \end{cases} \\ K_{1j}(L_j - L_{0j}) & \\ K_{2j}(L_j - (1 + e_1)L_{0j})^2 & \end{cases} \quad (21)$$

Donde:

- K_{1j} = constante de rigidez en la región parabólica.
- K_{2j} = constante de rigidez en la región lineal.
- L_j = longitud actual del ligamento.
- L_{0j} = longitud final del ligamento.

- Asumiendo que el ligamento no tiene solicitaciones en compresión, entonces: $F_j = 0$ para $L_j < l_j$, es decir:

$$e_j \leq 0 \quad (22)$$

3.5 Fuerzas de contacto. Como el fémur se mueve respecto a la tibia, los puntos de contacto también se moverán en los respectivos compartimentos –lateral y medial-. Las fuerzas de contacto son inducidas en uno o en ambos puntos. Esas fuerzas son aplicadas en la normal de la superficie articular. Así la fuerza de contacto aplicada a la tibia es expresada como:

$$\hat{N}_i = N_i \hat{n}_i \quad (23)$$

el desarrollo de ésta variable se efectúa según [3] y [19].

3.6 Ecuaciones Cinéticas. Tales ecuaciones se derivan directamente da la aplicación de las leyes del movimiento de Newton y de Euler (ver figura 4):

$$W_x + \sum_{i=1}^q N_{ix} + \sum_{j=1}^p F_{jx} = 0 \quad (24)$$

$$W_y + \sum_{i=1}^q N_{iy} + \sum_{j=1}^p F_{jy} = 0 \quad (25)$$

$$W_z + \sum_{i=1}^q N_{iz} + \sum_{j=1}^p F_{jz} = 0 \quad (26)$$

$$\left(\sum M\right)_x = I_{xx} \ddot{\Theta}_x + (I_{zz} - I_{yy}) \dot{\Theta}_y \dot{\Theta}_z = 0 \quad (27)$$

$$\left(\sum M\right)_y = I_{yy} \ddot{\Theta}_y + (I_{xx} - I_{zz}) \dot{\Theta}_x \dot{\Theta}_z = 0 \quad (28)$$

$$\left(\sum M\right)_z = I_{zz} \ddot{\Theta}_z + (I_{yy} - I_{xx}) \dot{\Theta}_x \dot{\Theta}_y = 0 \quad (29)$$

En las ecuaciones (24) a (29), las variables definidas son: q = representa el número de puntos de contacto.

P = representa el número de ligamentos en el punto de contacto.

$W_{x,y,z}$ = componentes del peso de la extremidad inferior.

$I_{x'x',y'y',z'z'}$ = momentos de inercia principales del segmento móvil, referidos al eje centroidal principal del sistema (x',y',z') .

$F_{jx,jy,jz}$ = componentes de la fuerza en el j-ésimo ligamento.

$\ddot{\Theta}_{z'x'y'}$ = componentes de la aceleración angular del segmento móvil expresados en términos de los ángulos de Euler.

$\dot{\Theta}_{z'x'y'}$ = componentes de la velocidad angular del segmento móvil expresados en términos de los ángulos de Euler.

3.7 Modelo Cinético. El modelo cinético queda conformado entonces por las ecuaciones (10), (20), y (24) a (29), las cuales forman un conjunto de 16 ecuaciones no lineales con 16 incógnitas (para el caso de dos puntos de contacto):

1) θ, ϕ, ψ los cuales determinan los componentes de la matriz de transformación [T].

- 2) x_o, y_o, z_o : las componentes del vector de posición \vec{F}_o
 3) $x_{ci}, z_{ci}, \dot{x}_{ci}, \dot{z}_{ci}$: las coordenadas del punto de contacto ($i = 1, 2$)
 4) N_i ($i = 1, 2$): las magnitudes de la fuerza de contacto.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

Con el presente modelo se cuenta con una parte fundamental para realizar la formulación del modelado dinámico de la articulación tibio femoral, además de podersele incorporar la tribología articular que considera algunas patologías como la artritis reumatoide.

Aunque el modelado cinemático es capital para ulteriores simulaciones en tiempo real, es conveniente usar más ampliamente el enfoque sistémico ya que el cuerpo humano es la suma sinérgica de una gran cantidad de sistemas interdependientes: cualquier cambio en uno de ellos afecta a los demás.

La información disponible es fundamentalmente de población estadounidense y europea, con lo cual la aplicación de un modelo a la población colombiana no es garantía de éxito. Por tal motivo es pertinente el desarrollo de proyectos en la construcción de información antropométrica, fisiológica y anatómica, de la población colombiana.

5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] Lord. M, Turner-Smith. A. Orthopedic Prosthetics and Orthotics in Rehabilitation Biomechanical Engineering, Vol 2 Section XIV Rehabilitation Engineering Chapter 140. Ed. Joseph D. Bronzino. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [2] Kapandji I. A. The physiology of the joints, Volume II, Lower Limb. Edinburgh, Churchill-livingstone, Edinburgh. 1987.
- [3] Engin . Al E. Techniques in the Dynamic Modeling of Human Joints with a Special Application to the Human Knee. Biomechanical Systems Handbook: Techniques and Application, Vol 3: Musculoskeletal Models and Techniques. Ed. Joseph D. Bronzino. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [4] Bach. J. M. Strain In The Anteromedial And Posterolateral Bundles Of The Anterior Cruciate Ligament Under The Application Of External And Muscular Loads. 1995. Ph.D. Theses Biomedical Engineering. University of California Davis.
- [5] Chimba M. K, Et al. A Technique for the Measurement of Tension in Small Ligaments. Biomechanical Systems, Vol 3. Chapter 7. Ed. Joseph D. Bronzino. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [6] Trevor J. L, Et al. Simultaneous Measurement of Three-dimensional Joint Kinematics and Ligament Strains with Optical Methods. Journal of Biomechanical Engineering.
- [7] Jenkyn. TR, Ehman. RL, Kaufman. KR. An. K-N. In vivo skeletal muscle tension measurement using Magnetic Resonance Elastography (MRE) 2001
<http://asb-biomech.org/onlineabs/abstracts2001/pdf/021.pdf>
- [8] Weiss. J A, Gardiner. J. C, Bonifasi-Lista. C. Ligament material behavior is nonlinear, viscoelastic and rate-independent under shear loading. Journal of Biomechanics. 35. 943-950. 2002
- [9] Cordaro. N. M, Weiss. J. A., Szivek. J. A. Strain Transfer between a CPC Coated Strain Gauge and Cortical Bone during Bending. John Wiley & Sons, Inc. 2001
http://www.sci.utah.edu/~weiss/mrl/papers/jbmr_final.pdf
- [10] Kuo, L. C., Su, F. C., Chiu, H. Y., Yu, C. Y., 2002, "Feasibility of Using a Video- Based Motion Analysis System for Measuring Thumb Kinematics," Journal of Biomechanics, 35, pp. 1499-506.
- [11] An, K. N., Growney, E., and Chao, E. Y., 1991, "Measurement of Joint Kinematics Using Expertvision System," Biomedical Science Instrumentation, 27, pp. 245-52.
- [12] Kovalski, J. E., Hollis, J., Heitman, R. J., Gurchiek, L. R., and Pearsall, A. W. t., 2002, "Assessment of Ankle-Subtalar-Joint-Complex Laxity Using an Instrumented Ankle Arthrometer: An Experimental Cadaveric Investigation," J Athl Train, 37, pp. 467-474.
- [13] Kirstukas, S. J., Lewis, J. L., and Erdman, A. G., 1992, "6r Instrumented Spatial Linkages for Anatomical Joint Motion Measurement--Part 2: Calibration," Journal of Biomechanical Engineering, 114, pp. 101-10.
- [14] Hefzy, M. S., Ebraheim, N., Mekhail, A., Caruntu, D., Lin, H., and Yeasting, R., 2003, "Kinematics of the Human Pelvis Following Open Book Injury," Med Eng Phys, 25, pp. 259-74.
- [15] Meskers, C. G., Fraterman, H., van der Helm, F. C., Vermeulen, H. M., and Rozing, P. M., 1999, "Calibration of the "Flock of Birds" Electromagnetic Tracking Device and Its Application in Shoulder Motion Studies," J Biomech, 32, pp. 629-33. 20.
- [16] Kenton R. Kaufman, Kai-Nan AN. Joint-Articulating Surface Motion. Biomedical Engineering, Vol 1. Sect 3: Biomechanics. Ed. Joseph D. Bronzino. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [17] Chen. E, et al. A computational model of postoperative knee kinematics . Medical Image Analysis, 5. p 317-330. 2001.
- [18] Yanhong. B, Benjamin J. Fregly W. Sawyer. G, Banks. S, Ho Kim. N. The Relationship between Contact Pressure, Insert Thickness, and Mild Wear in Total Knee Replacements
 Resubmitted as an original full-length archival paper to the *Journal of Orthopaedic Research* March 3, 2004
- [19] Hefzy. M, Muhammed. E and Rahman A. Three-Dimensional Anatomical Modeling of the human Knee Joint. Biomechanical Systems Handbook. VOL III, Chapter 1. Ed. Joseph D. Bronzino. Boca Raton: CRC Press LLC, 2000
- [20] Dragulescu. D, Tascu. M. T and Stanciu. D.: Kinematic and Dynamic Modeling of Human Lower Limb" IASTED International Conference Robotics and Applications. Tampa Florida USA p. 112-117. 2001
- [21] Dragulescu. D., L. Rusu, H. Moldovan The Human Femur Motion And Torque In Hip Joint. Politech Din Timisoara Seria Mecanica 47(61), 2002
- [22] Fu. K. S, González. R. C and Lee. C. Robótica: Detección, Visión e inteligencia. Mc Graw-Hill, España. 1988.
- [23] Bonifasi-Lista. C. Multiaxial Viscoelastic Properties Of Human Medial Collateral Ligament. 2002. MsC Theses Biomedical Engineering. The University of Utah.