DESCOMPOSICIÓN EN FRACCIONES PARCIALES

ALEJANDRO MARTÍNEZ A.

Licenciado en Educación con Especialidad en Matemáticas.
Profesor Auxiliar
Universidad Tecnológica de Pereira.
amartinez@utp.edu.co

RESUMEN

En este artículo se estudia el método de Heaviside para descomponer una fracción propia $f(x) = p(x)/q(x)$, es decir, p y q son polinomios, y $\text{grado}(p(x)) < \text{grado}(q(x))$. Este tipo de descomposición se utiliza en el cálculo de integrales de funciones racionales y para encontrar algunas transformadas inversas de Laplace y se basa en un teorema del álgebra avanzada, el cual establece que cada función racional, sin importar que tan complicada sea, puede rescribirse como una suma de fracciones más simples, por ejemplo $\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$.

PALABRAS CLAVES: Fracción propia., fracciones parciales.

ABSTRACT

This paper studies the Heaviside method for decomposing an own fraction $f(x) = p(x)/q(x)$. *That is to say, p and q are polynomials and* $\deg\text{ree}(p(x)) < \deg\text{ree}(q(x))$. *This type of decomposition is used to calculate integrals of rational functions and to find some inverse Laplace transforms and it's based in a theorem of advanced algebra, which it establishes that each rational function, no matter what complicated it was, can rewrites as a sum of fractions most simples, by example* $\frac{5x-3}{x^2-2x-3} = \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}$.

KEYWORDS: *Own fraction, partial fractions.*

1. INTRODUCCIÓN.

La descomposición en fracciones parciales de una fracción propia es un procedimiento utilizado muy frecuentemente cuando se va hallar una antiderivada de una función racional o cuando se quiere encontrar la transformada inversa de Laplace. En la mayoría de los textos de Cálculo no se hace un tratamiento detallado de este tema. En [3] se hacen algunas observaciones sobre el método de Heaviside, pero no se profundiza. Este tema se encuentra desarrollado en [1] y [2] de una manera más formal, de donde se ha tomado y se ha ampliado. En este artículo se asume que los polinomios $p(x)$ y $q(x)$ tienen coeficientes reales.

2. CONTENIDO.

Empezamos el desarrollo considerando los posibles caso que se presentan en la factorización de $q(x)$.

2.1. Método algebraico

Este es el método más comúnmente utilizado. A continuación se analizan los casos posibles.

CASO 1. $x = a$ es una raíz real simple de $q(x)$, es decir, $q(x) = (x-a)t_a(x)$, con $t_a(a) \neq 0$. Entonces existe una función w_a [1] tal que

$$f(x) = \frac{A}{x-a} + w_a(x)\,, \qquad (1)$$

y *A* se calcula de la siguiente manera:

Paso 1. Se multiplica en ambos lados de (1) por $x - a$ para obtener

$$\frac{p(x)}{t_a(x)} = A + (x-a)w_a(x)\,.$$

Paso 2. Se asigna a *x* el valor de *a*, de donde

$$A = \frac{p(a)}{t_a(a)}\,.$$

Este procedimiento se repite para cada raíz simple de $q(x)$.

Ejemplo 1. Calcule $\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x}dx$.

[1] Los índices en las funciones t_a y w_a se usan para indicar que dichas funciones dependen de la raíz *a*.

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2006
Fecha de Aceptación: 04 Mayo de 2006

Solución. Hay que encontrar la descomposición en fracciones parciales de $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x^2-6x}$. Es decir, hay que hallar constantes *A*, *B* y *C* tales que

$$f(x)=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+3}.$$

Como $p(x)=x+1$ y $q(x)=x^3+x^2-6x$. Al factorizar $q(x)$ se tiene $q(x)=x(x-2)(x+3)$. Luego,

$$A=\frac{p(0)}{t_0(0)}=\frac{0+1}{(0+3)(0-2)}=-\frac{1}{6},$$

$$B=\frac{p(3)}{t_2(2)}=\frac{2+1}{2(2+3)}=\frac{3}{10},$$

$$C=\frac{p(-3)}{t_{-3}(-3)}=\frac{-3+1}{-3(-3-2)}=-\frac{2}{15},$$

Luego

$$f(x)=\frac{-1}{6x}+\frac{3}{10(x-2)}-\frac{2}{15(x+3)}.$$

Por lo tanto,

$$\int f(x)dx=-\frac{1}{6}\ln|x|+\frac{3}{10}\ln|x-2|-\frac{2}{15}\ln|x+3|+C$$

CASO 2. Si $x=a$ es una raíz real de multiplicidad $m>1$ de $q(x)$, es decir, $q(x)=(x-a)^m t_a(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A_m}{(x-a)^m}+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+\cdots+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\frac{A_1}{x-a}, \qquad (2)$$

en donde A_m, A_{m-1}, …, A_1 se calculan de la siguiente manera

Paso 1. Se multiplica a ambos lados de (2) por $(x-a)^m$, para obtener

$$\frac{p(x)}{t_a(x)}=A_m+A_{m-1}(x-a)+\cdots+A_1(x-a)^{m-1}+ +(x-a)^m w_a(x)$$

Paso 2. Se asigna a *x* el valor de *a*, de donde

$$A_m=\frac{p(a)}{t_a(a)}$$

Paso 3. Se multiplica en ambos lados de (3) por $(x-a)^m t_a(x)$, para obtener

$$p(x)=[A_m+A_{m-1}(x-a)+\cdots+A_1(x-a)^{m-1}+ +(x-a)^m w_a(x)]\,t_a(x).$$

Paso 4. Se efectúan los cálculos en el lado derecho para obtener un polinomio

Paso 5. Se igualan los coeficientes de las potencias correspondientes de *x* y se resuelven las ecuaciones resultantes para los coeficientes $A_{m-1},\ldots,A_2, A_1$.

CASO 3. Si $x=a=\alpha+i\beta$ es una raíz compleja simple. En este caso también lo es $\bar{x}=\bar{a}=\alpha-i\beta$, puesto que $q(x)$ tiene coeficientes reales. Es decir, $q(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,t_a(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A(x-\alpha)+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+w_a(x), \qquad (3)$$

en donde *A* y *B* se calculan de la siguiente manera

Paso1. Se multiplica en ambos lados de (3) por $(x-\alpha)^2+\beta^2$ para obtener

$$\frac{p(x)}{t_a(x)}=A(x-\alpha)+B+[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,w_a(x)$$

Paso 2. Se asigna a *x* el valor de *α*, de donde

$$B=\frac{p(\alpha)}{t_a(\alpha)}-\beta^2 w_a(\alpha).$$

Paso 3. Se asigna otro valor de *x* y se despeja *A*.

CASO 4. Si $x=a=\alpha+i\beta$ es una raíz compleja doble. En este caso también lo es $\bar{x}=\bar{a}=\alpha-i\beta$. Es decir, $q(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]\,t_a(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A(x-\alpha)+B}{[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2}+\frac{C(x-\alpha)+D}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+w_a(x), \qquad (4)$$

en donde *A*, *B*, *C* y *D* se calculan de la siguiente manera

Paso 1. Se multiplica a ambos lados de (4) por $[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2$ para obtener

$$\frac{p(x)}{t_a(x)}=A(x-\alpha)+B +[(x-\alpha)^2+\beta^2][C(x-\alpha)+\beta] +[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2\,w_a(x)$$

Paso 2. Despejar $p(x)$ en la expresión anterior, efectuar los productos en el lado derecho para formar un polinomio, igualar coeficientes y luego resolver el sistema resultante en *A*, *B* , *C* y *D*. Una forma alternativa es asignar valores adecuados a *x* para formar un sistema en *A*, *B*, *C* y *D* y luego resolver el sistema resultante.

2.2 Método de Heaviside

El método de Heaviside es similar al método algebraico. Los casos se enuncian como teoremas.

Teorema 1. Suponga que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y que $x=a$ es una raíz real simple de $q(x)$, es decir, $q(x)=(x-a)t_a(x)$, con $t_a(a)\neq 0$ .Entonces existe una constante A tal que

$$f(x)=\frac{A}{x-a}+w_a(x),$$

en donde $A=\dfrac{p(a)}{t_a(a)}$ o bien $A=\dfrac{p(a)}{q'(a)}$.

Demostración.

Sea $h_a(x)=(x-a)f(x)$. De acuerdo con la teoría de fracciones parciales, existe una constante A tal que

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-a)t_a(x)}=\frac{A}{x-a}+w_a(x). \quad (1)$$

Al multiplicar por $(x-a)$ a ambos lados de (1) se tiene

$$h_a(x)=(x-a)f(x)=\frac{(x-a)p(x)}{q(x)}$$
$$=\frac{p(x)}{t_a(x)}=A+(x-a)w_a(x)$$

Al tomar límites se tiene

$$A=\lim_{x\to a}h_a(x)=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{p(x)}{t_a(x)}=\frac{p(a)}{t_a(a)}.$$

Al aplicar la regla de L'Hôpital se tiene

$$A=\lim_{x\to a}h_a(x)=\lim_{x\to a}(x-a)f(x)$$
$$=\lim_{x\to a}(\frac{(x-a)p(x)}{q(x)}=\lim_{x\to a}\frac{[(x-a)p(x)]'}{q'(x)}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{p(x)+(x-a)p'(x)}{q'(x)}=\frac{p(a)}{q'(a)}.$$

Corolario 1. Supongamos que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y $q(x)=(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)$ con $a_i\neq a_j$ para $i\neq j$. Entonces

$$f(x)=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{x-a_2}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n},$$

en donde

$$A_i=\lim_{x\to a_i}(x-a_i)f(x) \quad \text{para } i = 1,2, \dots, n.$$

Teorema 2. Suponga que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y que $x=a$ es una raíz real de multiplicidad $m>1$ de $q(x)$, es decir, $q(x)=(x-a)^m t_a(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{A_m}{(x-a)^m}+w_a(x),$$

en donde

$$A_m=\lim_{x\to a}h_a(x)=h_a(a)=\frac{p(a)}{t_a(a)},$$
$$\vdots$$
$$A_{m-k}=\lim_{s\to a}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{p(x)}{t_a(x)}\right)$$

para $k=1,2,\dots,m-1$.

o bien

$$A_{m-k}=\frac{1}{t_a(a)}\lim_{x\to a}\left[\frac{p(x)-r_a(x)t_a(x)}{(x-a)^k}\right]$$

para $k=1,2,\dots,m-1$, donde

$$r_a(x)=A_m+A_{m-1}(x-a)+\cdots A_{m-k+1}(x-a)^{k-1}.$$

Demostración.

Sea $h_a(x)=(x-a)^m f(x)=\dfrac{p(x)}{t_a(x)}$. Existen constantes A_1, $A_2,\dots,$ A_m tales que

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{p(x)}{(x-a)^m t_a(x)}$$
$$=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\cdots+ \quad (2)$$
$$+\frac{A_{m-1}}{(x-a)^{m-1}}+\frac{A_m}{(x-a)^m}+w_a(x)$$

Al multiplicar por $(x-a)^m$ en ambos lados de (2) se tiene

$$h_a(x)=(x-a)^m f(x)=A_m+(x-a)A_{m-1}+$$
$$+(x-a)^2A_{m-2}+\cdots+(x-a)^{m-1}A_1+$$
$$+(x-a)^m w_a(x)$$

Despejando A_m, haciendo

$$s_a(x)=A_{m-1}+A_{m-2}(x-a)+\cdots+A_1(x-a)^{m-1}+$$
$$+(x-a)^{m-1}w_a(x)$$

y tomando el límite se obtiene

$$A_m = \lim_{x\to a}[h_a(x) - (x-a)s_a(x)]$$
$$= \lim_{x\to a} h_a(x) = \lim_{x\to a}\frac{p(x)}{t_a(x)} = \frac{p(a)}{t_a(a)}.$$

Una vez hallado A_m, procedemos a encontrar A_{m-k} para k = 1, 2 , … , $m-2$, $m-1$.

Al derivar $h_a(x)$ con respecto a x se tiene

$$\frac{d}{dx}[h_a(x)] = A_{m-1} + 2(x-a)A_{m-2} + \cdots +$$
$$+(m-1)(x-a)^{m-2}A_1 + (x-a)^m w'(x) +$$
$$+ m(x-a)^{m-1}w(x) = A_{m-1} + (x-a)r_a(x)$$

Al despejar A_{m-1} y tomar el límite se tiene

$$A_{m-1} = \lim_{x\to a}\frac{d}{dx}(h_a(x)) = \lim_{x\to a}\frac{d}{dx}\left(\frac{p(x)}{t(x)}\right)$$

Por otro lado, al multiplicar a ambos lados de (2) por $(x-a)^{m-1}$ y despejar se obtiene

$$(x-a)^{m-1}f(x) = \frac{A_m}{x-1} + A_{m-1} + (x-a)A_{m-2} + \cdots +$$
$$+(x-a)^{m-2}A_1 + (x-a)^{m-1}w_a(x)$$

$$A_{m-1} = (x-a)^{m-1}f(x) - \frac{A_m}{x-a} -$$
$$-(x-a)\left[A_{m-2} + \cdots (x-a)^{m-3}A_1 + (x-a)^{m-2}w_a(x)\right]$$
$$= \frac{(x-a)^{m-1}p(x)}{(x-a)^m t_a(x)} - \frac{A_m}{x-a} = \frac{p(x)}{(x-a)t_a(x)} - \frac{A_m}{x-a}$$
$$= \frac{p(x) - A_m t_a(x)}{(x-a)t_a(x)}.$$

Al tomar el límite se tiene

$$A_{m-1} = \frac{1}{t_a(a)}\lim_{x\to a}\left(\frac{p(x) - A_m t_a(x)}{x-a}\right).$$

El último límite se puede evaluar mediante la regla de L'Hôpital porque es de la forma $\frac{0}{0}$. Recuérdese que $A_m = \frac{p(a)}{t_a(a)}$. Es decir,

$$A_{m-1} = \frac{1}{t_a(a)}\lim_{x\to a}\left(p'(x) - A_m t_a(x)\right) = \frac{p'(a) - A_m t_a'(a)}{t_a(a)}.$$

Derivando nuevamente, despejando y tomando límites se tiene

$$2A_{m-2} = \lim_{x\to a}\frac{d^2}{dx^2}\left(h_a(x)\right) = h_a''(a).$$

De donde

$$A_{m-2} = \frac{1}{2}h_a''(a) = \frac{1}{2}\lim_{x\to a}\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{p(x)}{t_a(x)}\right)$$

También

$$A_{m-2} = \frac{1}{t_a(a)}\lim_{x\to a}\left(\frac{p(x) - A_m t_a(x) - A_{m-1}(x-a)t_a(x)}{(x-a)^2}\right).$$

El último límite se puede evaluar mediante la regla de L'Hôpital porque es de la forma $\frac{0}{0}$. Este procedimiento se generaliza para llegar a la siguiente expresión

$$A_{m-k} = \lim_{x\to a}\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{p(x)}{t_a(x)}\right), \text{ para } k = 1,2,\cdots,m-1.$$

Corolario. Si $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ y $q(x) = (x-a)^m$, entonces

$$f(x) = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_m}{(x-a)^m},$$

en donde

$$A_m = P(a),\ A_{m-1} = P'(a),$$
$$A_{m-2} = \frac{1}{2}P''(a), \ldots A_{m-k} = \frac{1}{k!}p^{(k)}(a),$$

para $k = 1,2,\cdots,m-1$.

Ejemplo 2. Descomponga $f(x) = \frac{x^3 - 2x + 2}{(x+1)^4}$ en fracciones parciales

Solución.

$p(x) = x^3 - 2x + 2,\ p'(x) = 3x^2 - 2,\quad p''(x) = 6x,$
$p'''(x) = 6$. Luego

$$\frac{x^3 - 2x + 2}{(x+1)^4} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{A_3}{(x+1)^3} + \frac{A_4}{(x+1)^4}$$

$A_4 = P(-1) = 3,\ A_3 = P'(-1) = 1,\ A_2 = \tfrac{1}{2}P''(-1) = -3,$
$A_1 = \tfrac{1}{6}P'''(-1) = 1.$

Luego

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{3}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^3} + \frac{3}{(x+1)^4}.$$

Ejemplo 3. Hallar $L^{-1}\left\{\dfrac{2s^3-9s^2+15s-9}{(s-2)(s-1)^3}\right\}$, donde L^{-1} denota la transformada inversa de Laplace.

Solución. Aquí $F(s)=\dfrac{2s^3-9s^2+15s-9}{(s-2)(s-1)^3}$

$$F(s)=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2}+\frac{D}{(s-1)^3} \qquad \text{(I)}$$

Entonces

$$A=\lim_{s\to 2}(s-2)F(s)=\lim_{s\to 1}\frac{2s^3-9s^2+15s-9}{(s-1)^3}=1$$

$$D=\lim_{s\to 1}(s-1)^3F(s)=\lim_{s\to 1}\frac{2s^3-9s^2+15s-9}{(s-2)}=1\,.$$

Para el cálculo de B y C se evalúa $F(s)$ en dos valores distintos de s que no sean 1 ni 2 para obtener un sistema 2×2 en B y C, aprovechando que ya se conocen A y D.

$$F(0)=\frac{1}{-2}+\frac{B}{-1}+\frac{C}{1}+\frac{1}{-1}$$

$$\frac{-9}{2}=-\frac{1}{2}-B+C-1$$

de donde

$$B-C=3 \qquad (1)$$

$$F(-1)=\frac{1}{-3}+\frac{B}{-2}+\frac{C}{4}+\frac{1}{-8}$$

$$-\frac{35}{24}=-\frac{1}{3}-\frac{B}{2}+\frac{C}{4}-\frac{1}{8}\,,$$

de donde

$$2B-C=4 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por (1) y (2) se obtiene $B=1$ y $C=-2$.

Luego

$$F(s)=\frac{1}{s-2}+\frac{1}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}+\frac{1}{(s-1)^3}\,.$$

Por lo tanto,

$$L^{-1}\{F(s)\}=e^{2t}+e^t+te^t+\frac{1}{2}t^2e^t\,.$$

Teorema 3. Suponga que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y que $x=a=\alpha+i\beta$ es una raíz compleja simple. En este caso también lo es $\bar{x}=\bar{a}=\alpha-i\beta$, puesto que asumimos que $q(x)$ tiene coeficientes reales. Es decir, $q(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]t(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A(x-\alpha)+B}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+w_a(x)\,,$$

en donde

$$B=\operatorname{Re}(h_a(a))=\operatorname{Re}\left(\frac{p(a)}{t(a)}\right)$$

y

$$A=\frac{1}{\beta}\operatorname{Im}(h_a(a))=\frac{1}{\beta}\operatorname{Im}\left(\frac{p(a)}{t(a)}\right),$$

donde $h_a(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]f(x)$

Teorema 4. Suponga que $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ y que $x=a=\alpha+i\beta$ es una raíz compleja doble. En este caso también lo es $\bar{x}=\bar{a}=\alpha-i\beta$, es decir, $q(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2t_a(x)$. Entonces

$$f(x)=\frac{A_1(x-\alpha)+B_1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}+\frac{A_2(x-\alpha)+B_2}{\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]^2}+w_a(x)\,,$$

en donde

$$B_2=\operatorname{Re}(h_a(a))=\operatorname{Re}\left(\frac{p(a)}{t_a(a)}\right)$$

$$A_2=\frac{1}{\beta}\operatorname{Im}(h_a(a))=\frac{1}{\beta}\operatorname{Im}\left(\frac{p(a)}{t_a(a)}\right),$$

$$B_1=\frac{1}{2\beta}\operatorname{Im}(h_a'(a))$$

y

$$A_1=\frac{1}{2\beta^2}\left[A_2-\operatorname{Re}(h_a'(a))\right],$$

donde $h_a(x)=[(x-\alpha)^2+\beta^2]^2f(x)$

Ejemplo 5. Encuentre la descomposición en fracciones parciales de $f(x)=\dfrac{2x^2-3x+4}{(x^2+4)\left[(x-1)^2+1\right]}$

Solución.

$$f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{(x^2+4)\left[(x-1)^2+1\right]}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C(x-1)+D}{(x-1)^2+1}\,.$$

Luego

$$h_{2i}(x)=(x^2+4)f(x)=\frac{2x^2-3x+4}{(x-1)^2+1}\,,\text{ y}$$

$$h_{2i}(x)=Ax+B+\frac{(x^2+a)[C(x-1)+D]}{(x-1)^2+1}$$

Entonces

$$h_{2i}(2i) = \frac{2(2i)^2 - 3(2i) + 4}{(2i-1)^2 + 1}$$
$$= \frac{-4-6i}{-4-4i+1+1} = \frac{-4-6i}{-2-4i} = \frac{2+3i}{1+2i}$$
$$= \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

$$h_{2i}(x) = A(2i) + B$$

De ahí, $A = -\frac{1}{10}$ y $\mathrm{B} = \frac{8}{5}$.

$$h_{1+i}(x) = \left[(x-1)^2 + 4\right] f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 4}{x^2 + 4}$$
$$= \frac{\left[(x-1)^2 + 1\right][Ax + B]}{x^2 + 4} + \frac{C(x-1) + D}{x^2 + 4}.$$

Entonces

$$h_{1+i}(1+i) = \frac{2(1+i)^2 - 3(1+i) + 4}{(1+i)^2 + 4} = Ci + D$$

$$\frac{2(2i) - 3(1+i) + 4}{2i + 4} = \frac{1+i}{2+4i} = \frac{1+i}{2(1+2i)}$$
$$= \frac{(1+i)(1-2i)}{2(5)} = \frac{3-i}{10} = D + iC.$$

De ahí, $C = -\frac{1}{10}$ y $D = \frac{3}{10}$. Por lo tanto,

$$f(x) = -\frac{1}{10} \cdot \left(\frac{x-16}{x^2+4}\right) - \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{(x-1)-3}{(x-1)^2+1}\right).$$

3. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El método de Heaviside resulta ser un método práctico para calcular los coeficientes en la descomposición en fracciones parciales de una fracción propia en el caso de raíces reales distintas o cuando el polinomio del denominador es una función de la forma $q(x) = (x-a)^m$.

La aplicación directa de los teoremas en algunos casos puede ser tediosa y a veces es mejor evaluar la función en valores adecuados de las variables para obtener un sistema de ecuaciones lineales en las constantes que se deben determinar.

4. BIBLIOGRAFÍA

[1] Finney, Thomas, Cálculo una variable, Pearson Educación, 9ª Edición.

[2] Kreyzig, Erwin. Matemáticas Avanzadas para Ingeniería, Vol. 1.

[3] Zill, Dennis, G. y Cullen, Michael R. Ecuaciones Diferenciales con problemas de valores en la frontera, Quinta Edición, Thomson, 2002.