

## CONTROL ADAPTIVO POR REUBICACIÓN DE POLOS

### RESUMEN

Se presentan los resultados de aplicar diferentes algoritmos de identificación y control adaptivo a una planta de tercer orden a partir del modelo regresor de la misma. Entre los algoritmos de identificación se incluyen proyección, proyección ortogonal, mínimos cuadrados y filtro de Kalman. La técnica de control utilizada es el control por reubicación de polos. Se incluye el control un paso adelante y el control dead-beat como casos específicos del control por reubicación de polos. Se muestra cómo el tiempo de muestreo se convierte en un parámetro fundamental en el diseño del sistema. La mejor respuesta de la planta en lazo cerrado se obtiene usando el control dead-beat.

**PALABRAS CLAVES:** Filtro de Kalman, Control por Reubicación de Polos, Dead Beat.

### ABSTRACT

*In this article, the authors present the results of the application of several identification and control algorithms for a third order plant using its regressive model. Among the identification algorithms, there are projection algorithm, orthogonalized projection algorithm, least-squares algorithm and Kalman filter. Control technique applied is pole assignment. We include one step-ahead control and dead-beat control as special cases of the pole assignment algorithm. It is shown how the sampling time becomes an important parameter for the design of the system. Best results for the closed-loop system are obtained using dead-beat control.*

**KEYWORDS:** Kalman filter, pole assignment algorithm, dead-beat control.

## 1. INTRODUCCIÓN

La mayoría de las técnicas para el diseño de sistemas de control se basan en un buen entendimiento de la planta bajo estudio y su ambiente. Sin embargo, en un número de tareas, la planta a ser controlada es muy compleja y los procesos básicos internos en ella no se entienden del todo. Debido al poco conocimiento que se puede tener de un sistema, se hace necesario el uso de técnicas adaptivas que permitan controlar el sistema [10].

Básicamente la técnica de control se fundamenta en una estimación paramétrica en línea del sistema, modelo al cual se le puede implementar diferentes tipos de control, generando así varias técnicas de control adaptivo o controladores auto-sintonizados.

Las técnicas de identificación paramétrica utilizadas son proyección, proyección ortogonal, mínimos cuadrados y filtro de Kalman [6],[7]. En el fondo un buen esquema de control adaptivo dependerá de la buena estimación de los parámetros realizada por el algoritmo de identificación.

El esquema de control utilizado es reubicación de polos. Se incluyen como casos particulares de este último el control paso adelante y el control dead-beat.

Para la identificación en tiempo real se necesita de un tiempo de muestreo muy preciso, por tal motivo se utiliza el *supertimer* de *Borland C++ Builder*, que permite

### DIDIER GIRALDO

MEE  
Profesor Titular  
Programa de Ingeniería Eléctrica  
Universidad Tecnológica de Pereira  
dgiraldo@utp.edu.co

### MAURICIO ÁLVAREZ

Ingeniero Electrónico  
Profesor  
Universidad Tecnológica de Pereira  
malvarez@ohm.utp.edu.co

### CRISTIAN GUARNIZO

Ingeniero Electricista  
Profesor  
Universidad Tecnológica de Pereira  
cdguanizo@utp.edu.co

controlar la prioridad y así mejorar la precisión en los instantes de adquisición.

Primero se introduce el modelo DARMA (*deterministic autoregressive moving average model*) y los algoritmos de identificación. Luego se presenta la técnica de control por reubicación de polos y sus casos particulares: un paso adelante y dead-beat. Finalmente se muestran los resultados y se concluye.

## 2. MODELO DARMA

El modelo general DARMA puede expresarse como

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t) \quad (1)$$

donde  $q^{-1}$  es el operador de retardo y

$$A(q^{-1}) = I + A_1q^{-1} + \dots + A_nq^{-n} \quad (2)$$

$$B(q^{-1}) = q^{-d}(B_0 + B_1q^{-1} + \dots + B_{n_1}q^{-n_1}) \quad (3)$$

$$= q^{-1}B'(q^{-1})$$

El modelo de la ecuación (1) puede expresarse en la forma de predictor de  $d$  pasos adelante, en la siguiente manera

$$y(t+d) = \alpha(q^{-1})y(t) + \beta(q^{-1})u(t) \quad (4)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} q^{-(n-1)} \\ &= G(q^{-1}) \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \beta(q^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{n_1+d-1} q^{-(n_1+d-1)} \\ &= F(q^{-1})B'(q^{-1}) \end{aligned} \quad (6)$$

### 3. IDENTIFICACIÓN DE PARÁMETROS

Los esquemas de identificación en línea producen una estimación de los parámetros actualizados del modelo DARMA (los polinomios  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ , ec. (1)). El orden del modelo se puede encontrar por ensayo y error o por consideraciones adicionales sobre el sistema, como el número de elementos almacenadores de energía, etc. Es deseable que el algoritmo de identificación sea simple y fácil de implementar [6],[8].

#### 3.1 Métodos de error

Las características de entrada-salida de una gran clase de sistemas dinámicos determinísticos lineales o no, puede ser descrito por un modelo de la siguiente forma:

$$y(t) = \phi(t-1)^T \theta_0 \quad (7)$$

donde  $y(t)$  es la salida del sistema en el instante  $t$ ,  $\phi(t-1)$  es un vector compuesto por las entradas y salidas pasadas y  $\theta_0$  es el vector de parámetros (desconocido) (ver ecuación (1)). Basados en este modelo se pueden plantear diversos algoritmos de identificación.

#### 3.2 Algoritmo de proyección

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T \phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (8)$$

El anterior algoritmo puede ser explicado geoméricamente como se observa en la figura 1. Dado, todos lo posibles valores que satisfagan la ecuación (7) se selecciona entre todos los valores candidatos a ser  $\theta_0$ , aquel denotado por  $\hat{\theta}(t)$ , el cual es el más cercano a  $\hat{\theta}(t-1)$ . Entonces el criterio  $J$  dado a continuación es minimizado:

$$J = \frac{1}{2} \|\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(t-1)\|^2 \quad (9)$$

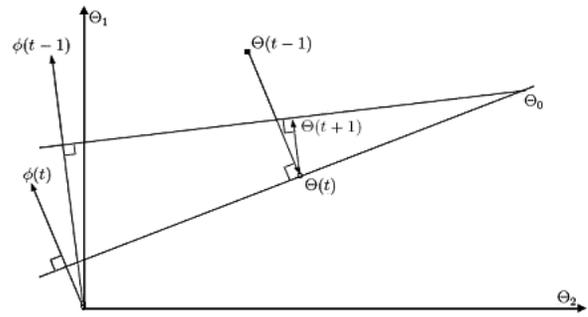


Figura 1. Explicación geométrica del algoritmo de proyección.

Algunas propiedades de este algoritmo aseguran que  $\hat{\theta}(t)$  nunca estará más lejos de  $\theta_0$  que  $\hat{\theta}(0)$ . Otra propiedad implica que cuando el modelo de error,  $e(t)$ , esté apropiadamente normalizado, la suma de los errores al cuadrado es finita. Esto se vuelve una condición suficiente para establecer una convergencia global.

#### 3.3 Algoritmo de Proyección Ortogonal

A partir de la figura 1 se puede observar que si  $\Phi(t)$  fuera ortogonal a  $\Phi(t-1)$ , entonces  $\hat{\theta}(t)$  coincidiría con  $\theta_0$ . Esto último sugiere que se podría obtener un algoritmo mejorado proyectando en una dirección ortogonal a los vectores  $\Phi(\cdot)$  anteriores. Esto nos lleva a las ecuaciones (10) y (11):

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (10)$$

donde

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (11)$$

el vector  $P(t-2)\Phi(t-1)$  en el anterior algoritmo, es la componente de  $\Phi(t-1)$  que es ortogonal a todos los vectores  $\Phi(\cdot)$  previos. La matriz  $P(t-1)$  es un operador de proyección que asegura la anterior propiedad.

#### 3.4 Algoritmo de mínimos cuadrados

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (12)$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \frac{P(t-2)\phi(t-1)\phi(t-1)^T P(t-2)}{1 + \phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (13)$$

Este algoritmo resulta de la minimización de la siguiente función cuadrática:

$$J_n(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y(t) - \phi(t-1)^T \theta)^2 + \frac{1}{2} (\theta - \hat{\theta}(0))^T P_0^{-1} (\theta - \hat{\theta}(0)) \quad (14)$$

Básicamente, la función de costo anterior representa la suma de los errores al cuadrado. El segundo término de la

derecha ha sido incluido para considerar las condiciones iniciales.

**3.5 Filtro de Kalman**

De una forma similar a los algoritmos anteriores pero utilizando un nuevo parámetro  $\mu$ :

$$L(t) = \frac{P(t-2)\phi(t-1)}{1 + \mu\phi(t-1)^T P(t-2)\phi(t-1)} \quad (15)$$

$$\hat{\theta}(t) = \hat{\theta}(t-1) + \mu L(t) [y(t) - \phi(t-1)^T \hat{\theta}(t-1)] \quad (16)$$

$$P(t-1) = P(t-2) - \mu L(t)\phi(t-1)^T P(t-2) \quad (17)$$

**3.6 Comparación de los algoritmos de identificación**

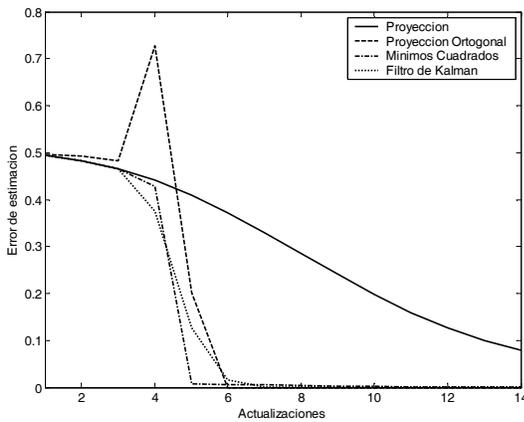


Figura 2. Comparación de los algoritmos identificación.

Como se puede observar en la figura 2, el algoritmo de proyección ortogonal converge más rápido que los otros, pero presenta un error grande antes de converger, esto no es recomendable si se está identificando y controlando la planta al mismo tiempo. Por otro lado, el algoritmo de mínimos cuadrados, a pesar de no converger tan rápidamente, presenta mejor acercamiento que los otros algoritmos.

**4. CONTROL ADAPTIVO**

Para el control de sistemas, se conocen diversos procedimientos de diseño para casos en los cuales los parámetros de la planta son constantes y el sistema resultante es invariante en el tiempo. Cuando los parámetros de la planta son escasamente conocidos o varían durante la operación normal, el uso de técnicas adaptivas se requiere para obtener un alto desempeño de los sistemas de control. El control adaptivo se considera como cualquier estrategia de control que usa estimación de los parámetros de la planta en tiempo real (identificación recursiva). El controlador adaptivo a ser diseñado está basado en el principio de equivalencia de certidumbre: se diseña el controlador suponiendo que los parámetros de la planta son conocidos y debido a que

estos en realidad no se conocen, en el tiempo  $k$  se reemplazan por su estimado [5].

**4.1 Control por reubicación de polos**

La figura 3 muestra la estructura general de la realimentación

En forma general la ecuación del sistema en lazo cerrado está dada por

$$[L(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})P(q^{-1})]y(t) = B'(q^{-1})M(q^{-1})y^*(t) \quad (18)$$

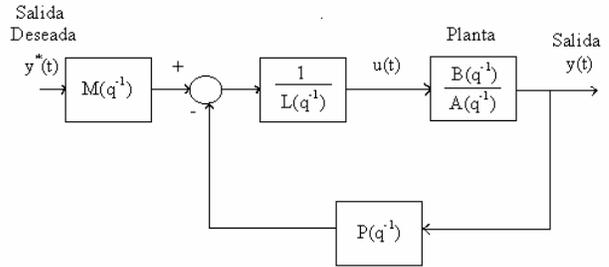


Figura 3. Estructura General de la Realimentación

Se puede demostrar que para obtener un polinomio  $A^*(q^{-1})$  arbitrario de grado  $(2n-1)$ , que exprese los polos deseados en lazo cerrado, es decir:

$$L(q^{-1})A(q^{-1}) + q^{-d}B'(q^{-1})P(q^{-1}) = A^*(q^{-1}) \quad (19)$$

$A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$  deben ser primos relativos y la constante  $n$  debe ser igual al grado máximo entre  $A(q^{-1})$  y  $B(q^{-1})$ . Si estas condiciones se cumplen, los coeficientes de  $L(q^{-1})$  y  $P(q^{-1})$  están dados por:

$$\begin{bmatrix} l_0 \\ \vdots \\ l_{n-1} \\ p_0 \\ \vdots \\ p_{n-1} \end{bmatrix} = M_c^{-1} \begin{bmatrix} a_0^* \\ a_1^* \\ \vdots \\ a_{2n-2}^* \\ a_{2n-1}^* \end{bmatrix} \quad (20)$$

donde  $M_c$  está dada por:

$$M_c = \begin{bmatrix} a_0 & & & & b_0 \\ a_1 & a_0 & & & b_1 & b_0 \\ \vdots & a_1 & \ddots & & \vdots & b_1 & \ddots \\ a_n & \vdots & \ddots & a_0 & b_n & \vdots & \ddots & b_0 \\ & a_n & \ddots & a_1 & b_n & \ddots & b_1 \\ & & \ddots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ & & & a_n & & & b_n \end{bmatrix} \quad (21)$$

La señal de control se obtiene de la ecuación

$$L(q^{-1})u(t) = -P(q^{-1})y(t) + M(q^{-1})y^*(t+d) \quad (22)$$

**4.2 Control un paso adelante**

Por medio del control un paso adelante se lleva  $y(t+d)$  a un valor deseado  $y^*(t+d)$ , en un paso.

El control un paso adelante se puede considerar como un caso particular del control por reubicación de polos. En este caso,  $A^*(q^{-1})$  en la ecuación (19) y  $M(q^{-1})$  en la ecuación (22) están dados por

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= B'(q^{-1}) \\ M(q^{-1}) &= 1 \end{aligned} \quad (23)$$

**3.3 Control dead-beat**

El control dead-beat es un caso especial del control por reubicación de polos, en el cual los polos se encuentran en el origen. En este caso,  $A^*(q^{-1})$  en la ecuación (19) y  $M(q^{-1})$  en la ecuación (22) están dados por

$$\begin{aligned} A^*(q^{-1}) &= 1 \\ M(q^{-1}) &= P(q^{-1}) \end{aligned} \quad (24)$$

La característica del control dead-beat es que alcanza la referencia en un número de períodos igual al orden del sistema y una vez alcanzada la referencia, la respuesta en estado estable no tiene oscilaciones [1],[9].

**5. RESULTADOS**

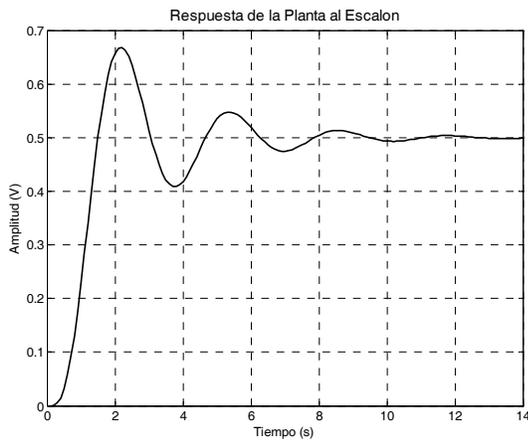


Figura 4. Respuesta de la planta en lazo abierto al escalón.

La figura 4 muestra la respuesta al escalón de la planta a controlar en lazo abierto. El sistema en lazo abierto tiene un tiempo de asentamiento de 14 s, sobrepaso de 0.1684 V que ocurre en un tiempo igual a 2.102 s y una respuesta oscilatoria antes de llegar al estado estable. El modelo nominal de la planta es el siguiente:

$$H(s) = \frac{4}{s^3 + 2.8 s^2 + 5.6 s + 8} \quad (25)$$

La figura 5 muestra la respuesta que se observa en el programa C++ *Builder* al realizar el control por reubicación de polos. En este caso, todos los polos se ubican en el plano z en  $z_i=0.4$ , donde i se refiere al número de polos. La figura 6 muestra la respuesta respectiva en el osciloscopio. En este caso, el tiempo de muestreo es igual a 100 ms.

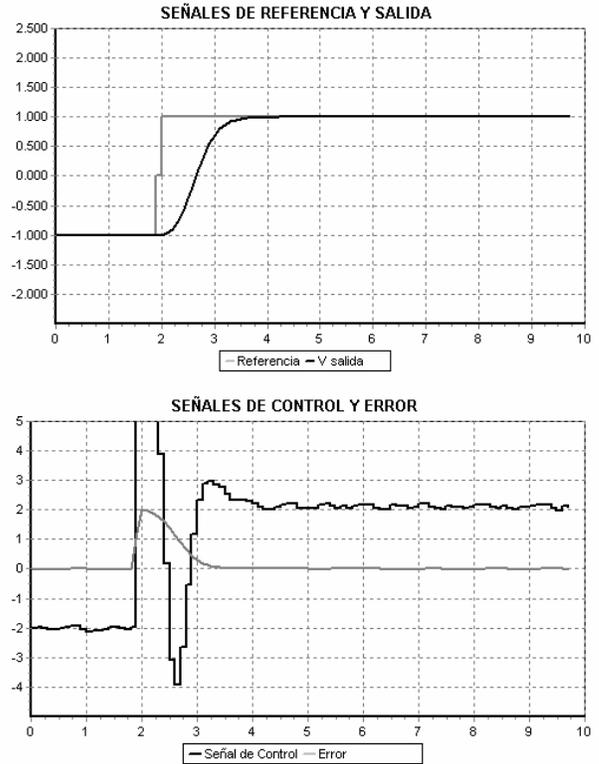


Figura 5. Salida de la planta y señal de control para el control por reubicación de polos del programa realizado en C++ Builder.

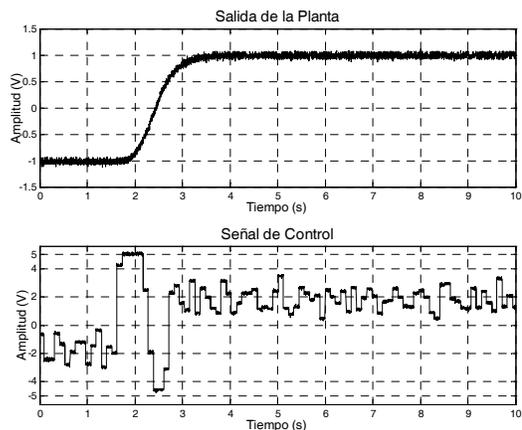


Figura 6. Salida de la planta y señal de control para el control por reubicación de polos.

Para lograr el control paso adelante es necesario aumentar el tiempo de muestreo a 1.5 seg. Como se ve en la figura 7, la señal de salida sigue la referencia en

exactamente un paso. Sin embargo, al observar la salida en el osciloscopio (figura 8), la señal de salida oscila durante algunos períodos de muestreo más hasta alcanzar la referencia.

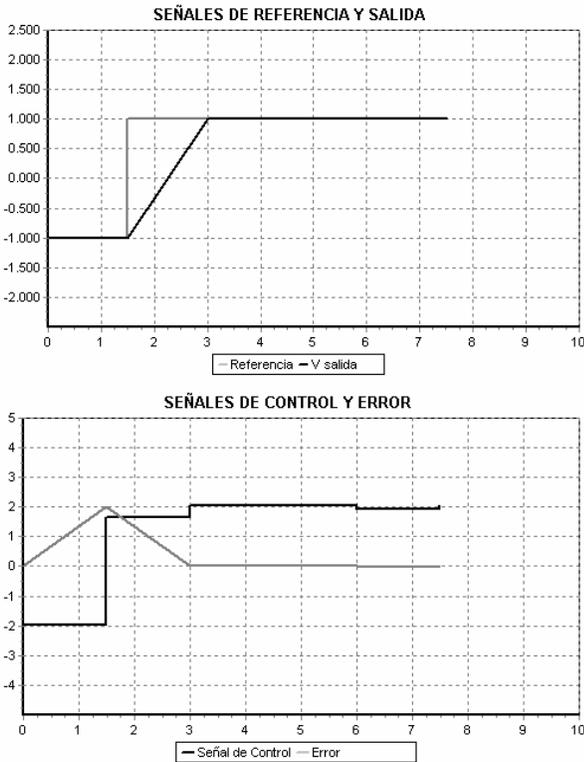


Figura 7. Salida de la planta y señal de control para el control un paso adelante del programa realizado en C++ Builder.

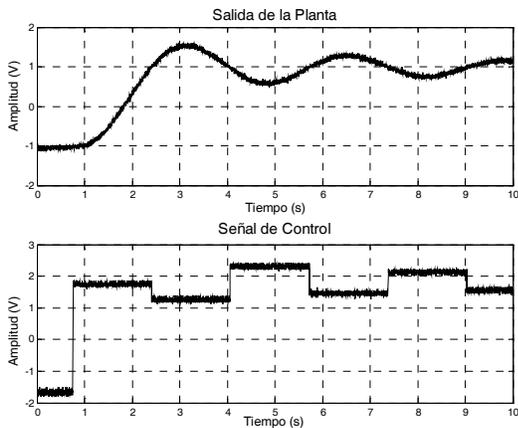


Figura 8. Salida de la planta y señal de control para el control un paso adelante.

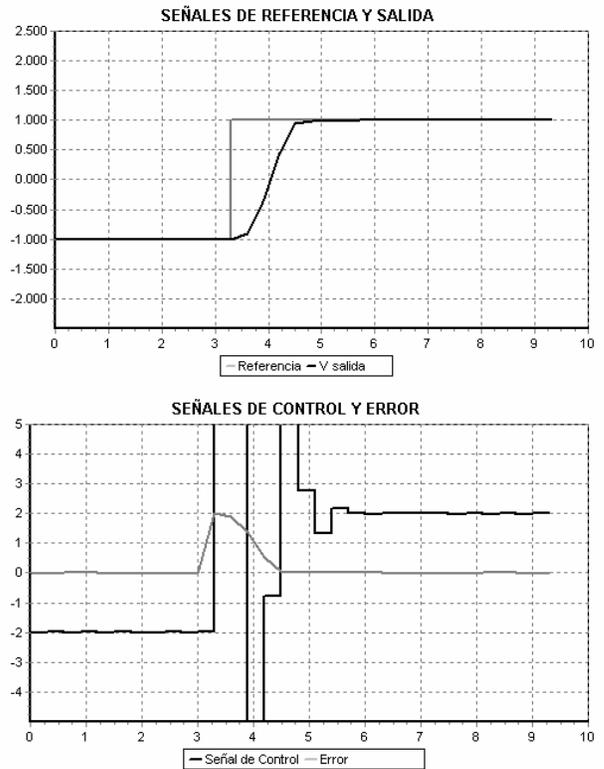


Figura 9. Salida de la planta y señal de control para el control dead-beat del programa realizado en C++ Builder.

La figura 9 muestra la pantalla en el programa C++ Builder cuando se realiza el control dead-beat. Después de varias simulaciones [2],[3],[4], se encuentra que el período de muestreo adecuado para obtener la respuesta dead-beat es de 350 ms. La figura 10 muestra el resultado de la respuesta en el osciloscopio.

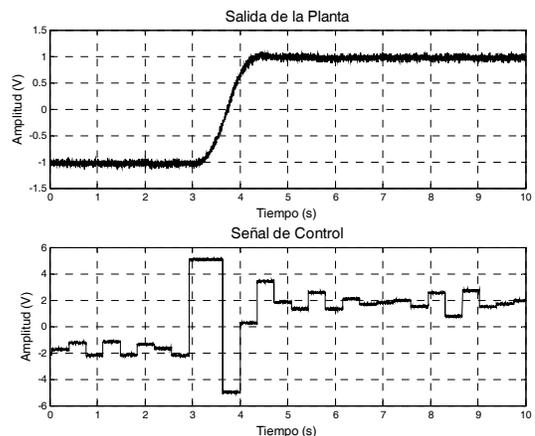


Figura 10. Salida de la planta y señal de control para el control dead-beat.

Comparando las señales de control de las figuras 6 y 10 se observa que en el control dead-beat, la señal de control

es mucho más suave que la señal de control en reubicación de polos.

## 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Para obtener un buen desempeño de los algoritmos de control adaptivo es supremamente importante el desempeño de los algoritmos de identificación. Un buen control depende necesariamente de qué tan bien se identifiquen los parámetros de la planta.

Un parámetro importante en el diseño de los controladores es el tiempo de muestreo. Los esquemas de control presentados aquí, así lo demuestran. Cuando se intenta controlar el sistema en un tiempo corto, la señal de control se vuelve excesivamente grande, pero cuando se ajusta el tiempo de muestreo, la señal de control se comporta dentro del intervalo de operación permitido y el control se puede realizar.

En el desarrollo del trabajo se pudo observar que el mejor esquema de identificación consiste en utilizar primero el algoritmo de mínimos cuadrados para obtener una aproximación inicial y cuando el error disminuya por debajo de algún umbral predeterminado, cambiar el algoritmo de identificación al de proyección ortogonal. Esto se observa claramente de la figura 2.

El desempeño del control dead-beat es sin lugar a dudas, el mejor de los algoritmos de control presentados. Su rápida respuesta y su comportamiento en el estado estable, lo hacen ideal para aplicaciones de control como la aquí presentada. Además, la señal de control tiene un comportamiento suavizado una vez llega al estado estable.

## 5. BIBLIOGRAFÍA

- [1] ASTROM, K., WITTENMARK, B. Computer-Controlled Systems. Prentice Hall, 1997.
- [2] GIRALDO, D., MEJÍA D., MOLINA A. Control PID autosintonizado usando identificación en línea y modelo de referencia. Scientia et Technica, 2003, Año IX (21).
- [3] GIRALDO, D., *et al.* Control adaptivo por reubicación de polos utilizando MATLAB. Scientia et Technica, 1999, Año V (09).
- [4] GIRALDO, Didier, TABARES, Iván. Teoría de Control. Editorial UTP, 1997.
- [5] GIRALDO, Didier, TABARES, Iván. Model reference adaptive control. 11<sup>TH</sup> ISPE/IEEE/IFAC INTERNATIONAL CONFERENCE ON CAD/CAM, ROBOTICS, FACTORIES OF THE FUTURE: CARS & FOF, 1995.

[6] GOODWIN G. , SIN, K. S. Adaptive Filtering, Prediction and Control. Prentice Hall, Inc. Englewood, New Jersey., 1984.

[7] GUO, L. LJUNG, L. Performance Analysis of General Tracking Algorithms. IEEE Transactions on automatic Control . Vol. 40 No. 8.1995.

[8] NARENDRA, K. ORTEGA, R. DORATO, P. Advances in Adaptive Control. IEEE Press, 1991.

[9] OGATA, Sistemas de Control en Tiempo Discreto. Segunda Edición. Prentice Hall.

[10] SASTRY, Shankar, BODSON, Mark. Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness. Prentice Hall. USA. 1989.