Desigualdad de Chebyshev bidimensional

Two - dimensional Chebyshev Inequality

Edgar Alirio Valencia, Yuri Alexander Poveda, Carlos Arturo Escudero Salcedo
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia
evalencia@utp.edu.co
carlos10@utp.edu.co
yapoveda@utp.edu.co

***Resumen*—En este artículo se presentan y se demuestran en forma detallada, algunas desigualdades interesantes en probabilidad y estadística que son consecuencia de la desigualdad de Chebyshev.**

***Palabras clave*— Variable aleatoria, Desigualdad de Chebyshev.**

***Abstract*—This article presents and demonstrates in detail some interesting inequalities in probability and statistics that result from Chebyshev's inequalit**

***Key Word* — Random variable, Chebyshev Inequality**

I. INTRODUCCIÓN

La desigualdad de Chebyshev es uno de los resultados más importantes e interesantes en la teoría de la probabilidad. Este resultado establece que si X es una variable aleatoria y $E(X)$ es la esperanza de X, la cual existe, entonces

$$P(|X-E(X)|\geq \epsilon)\leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}$$

para todo $\epsilon \geq 0$, donde $V(X)$ es la varianza de la variable aleatoria X, ver [3] y [4].

La demostración de esta desigualdad se basa en la desigualdad de Markov, la cual dice lo siguiente: Si X es una variable aleatoria, entonces

$$P(|X|\geq \epsilon)\leq \frac{E(|X|^n)}{\epsilon^n}$$

para todo $\epsilon \geq 0$ y todo entero positivo n.

La estimación que la desigualdad de Chebyshev da a la probabilidad del evento $\{|X-E(X)|\geq \epsilon\}$; puede ser muy buena. Esta probabilidad generalmente es menor que

$$\frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

y en consecuencia este valor es una buena sobre estimación de

$$P(|X-E(X)|\geq \epsilon).$$

Una de las aplicaciones principales de las desigualdades de tipo Chebyshev es el de aproximar o estimar probabilidades de la forma $P(|X-E(X)|\geq \epsilon)$ por medio de calculo de cotas ver [5].

Es conocido en la literatura, que si conocemos la función de distribución de la variable aleatoria X, podemos calcular su esperanza $E(X)$ y su varianza $V(X)$, si estas existen.
De igual modo si conocemos dos variables aleatorias X,Y con su función de distribución conjunta, podemos calcular $E(XY), E(X), E(Y)$ y su matriz de covarianzas $Cov(X,Y)$.
Pero el problema reciproco no es cierto, es decir si conocemos $E(X)$ y $V(X)$, no necesariamente, se puede construir la función de distribución de la variable aleatoria X y por consiguiente cantidades como

$$P(|X-E(X)|\geq \epsilon)$$

son muy difíciles de obtener. Igualmente para el caso de funciones de distribuciones conjuntas de dos variables aleatorias.

En este artículo vamos a desarrollar principalmente la desigualdad de Chebyshev bidimensional, la cual no es muy conocida en la literatura de la probabilidad, además es muy

Fecha de Recepción: 05 de Mayo de 2012
Fecha de Aceptación: 30 de Agosto de 2012

conveniente, ya que en ocasiones la estimación del valor real de una probabilidad conjunta, suele dar información insuficiente para nuestro objetivo, como por ejemplo, lado derecho de la desigualdad mayor o igual a uno. En este sentido podemos decir que entre mas pequeño sea el lado derecho de la desigualdad más precisa es la información de las probabilidades. Esta desigualdad bidimensional aparece como un problema propuesto en [8**]**.

Además del resultado la desigualdad de Chebyshev bidimensional vamos a presentar otros resultaos interesantes que son consecuencia de la desigualdad de Chebyshev.

II. DESIGUALDAD DE CHEBYSHEV

Antes de hacer la demostración de la desigualdad de Chebyshev bidimensional y presentar algunos resultados que son consecuencia de esta desigualdad, presentamos algunos resultados que vamos a utilizar en el desarrollo de este artículo.

Proposición 1. Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces para $\epsilon \geq 0$ se tiene

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X)}{\epsilon}.$$

La demostración se puede ver en [6**] y** [7**]**.

El siguiente resultado es una consecuencia de la Proposición 1

Proposición 2. Si X es una variable aleatoria no negativa, entonces, para todo $\epsilon \geq 0$ y para todo entero positivo n, se tiene

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^n)}{\epsilon^n}.$$

Demostración. Es claro que

$$P(X \geq \epsilon) = P(X^n \geq \epsilon^n)$$

por la proposición anterior

$$P(X^n \geq \epsilon^n) \leq \frac{E(X^n)}{\epsilon^n}$$

y por lo tanto

$$P(X \geq \epsilon) \leq \frac{E(X^n)}{\epsilon^n}.$$

De las Proposiciones 1 y 2, se obtiene la desigualdad de Chebyshev, la cual dice lo siguiente:

Proposición 3 (Desigualdad de Chebyshev). Si X es una variable aleatoria y $E(X)$ es la esperanza de X, entonces para todo $\epsilon \geq 0$

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

Demostración. Si consideramos la desigualdad anterior para el caso $n = 2$ y la variable aleatoria $|X - E(X)|$, entonces,

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{E(|X - E(X)|^2)}{\epsilon^2}.$$

Finalmente como $V(X) = \left(X - E(X)\right)^2$, se concluye que

$$P(|X - E(X)| \geq \epsilon) \leq \frac{V(X)}{\epsilon^2}.$$

El resultado principal en este artículo, tiene que ver con la desigualdad de Chebyshev en dos variables aleatorias, pero antes de enunciar y demostrar este resultado el cual esta propuesto en [8**]**, demostremos, la siguiente proposición.

Proposición 3 Si X y Y son variables aleatorias con

$$E(X) = 0 = E(Y) \text{ y } Var(X) = 1 = Var(Y)$$

y con coeficiente de correlación $\rho = \rho(X, Y)$**.** Muestre que

$$E(max\{X^2, Y^2\}) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Demostración. Por definición

$$\rho = \rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}} = \frac{E(XY) - E(X)E(Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}.$$

Como

$$E(X) = 0 = E(Y) \text{ y } Var(X) = 1 = Var(Y),$$

entonces

$$\rho = \rho(X, Y) = E(XY).$$

Además, el máximo de X^2, Y^2viene dado por

$$max\{X^2, Y^2\} = \frac{|X^2 - Y^2|}{2} + \frac{X^2 + Y^2}{2},$$

esto implica que

$$2max\{X^2, Y^2\} = |X^2 - Y^2| + X^2 + Y^2.$$

Aplicando esperanza en ambos lados, obtenemos

$$E(2max\{X^2, Y^2\}) = E(|X - Y||X + Y|) + E(X^2 + Y^2).$$

Ahora, como

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = E(X^2) = 1.$$

Similarmente $E(X^2) = 1$, por consiguiente

$$2E(max\{X^2, Y^2\}) = E(|X - Y||X + Y|) + 2,$$

esto es equivalente a

$$2E(max\{X^2, Y^2\} - 1) = E(|X - Y||X + Y|),$$

elevando al cuadrado, obtenemos

$$4E(max\{X^2, Y^2\} - 1)^2 = E(|X - Y||X + Y|)^2 \\ \leq E(|X - Y|^2|X + Y|^2).$$

Luego

$$4E(max\{X^2, Y^2\} - 1)^2 \leq \\ E(X^2 - 2XY + Y^2)E(X^2 + 2XY + Y^2) = \\ \big(2 - 2E(XY)\big)\big(2 + 2E(XY)\big) = 4 - 4\big(E(XY)\big)^2$$

esto es,

$$4E(max\{X^2, Y^2\} - 1)^2 \leq 4 - 4\big(E(XY)\big)^2.$$

Finalmente, como

$$\rho = \rho(X, Y) = E(XY),$$

entonces

$$E(max\{X^2, Y^2\} - 1)^2 \leq 1 - \rho^2.$$

Luego

$$E(max\{X^2, Y^2\}) \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Proposición 4 (Desigualdad de C. Bidimensional). Si X y Y son variables aleatorias con coeficiente de correlación ρ, entonces para $\epsilon \geq 0$

$$P\left(|X - E(X)| \geq \epsilon\sqrt{V(X)} \text{ ò } |Y - E(Y)| \geq \epsilon\sqrt{V(Y)}\right) \\ \leq \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \rho^2}\right)}{\epsilon^2}.$$

Demostración. Sea $Z = max\{X, Y\}$, veamos que

$$Z^2 = (max\{X, Y\})^2 = max\{X^2, Y^2\}.$$

Supongamos que

$$max\{X, Y\} = Y,$$

por lo tanto

$$Z^2 = (max\{X, Y\})^2 = Y^2 = max\{X^2, Y^2\}.$$

Análogamente se tiene el resultado si $max\{X, Y\} = X$. Ahora

$$P\left(|X - E(X)| \geq \epsilon\sqrt{V(X)} \text{ ò } |Y - E(Y)| \geq \epsilon\sqrt{V(Y)}\right) \\ = P\left(max\left\{\frac{|X - E(X)|}{\sqrt{V(X)}}, \frac{|Y - E(Y)|}{\sqrt{V(Y)}}\right\} \geq \epsilon\right) \\ = P\left(max\left\{\frac{|X - E(X)|^2}{V(X)}, \frac{|Y - E(Y)|^2}{V(Y)}\right\} \geq \epsilon^2\right) \\ \leq \frac{E\left(max\left\{\frac{|X - E(X)|^2}{V(X)}, \frac{|Y - E(Y)|^2}{V(Y)}\right\}\right)}{\epsilon^2}$$

por consiguiente

$$P\left(|X - E(X)| \geq \epsilon\sqrt{V(X)} \text{ ò } |Y - E(Y)| \geq \epsilon\sqrt{V(Y)}\right) \\ \leq \frac{E\left(max\left\{\frac{|X - E(X)|^2}{V(X)}, \frac{|Y - E(Y)|^2}{V(Y)}\right\}\right)}{\epsilon^2}$$

y por la proposición anterior

$$\frac{E\left(max\left\{\frac{|X - E(X)|^2}{V(X)}, \frac{|Y - E(Y)|^2}{V(Y)}\right\}\right)}{\epsilon^2} \leq 1 + \sqrt{1 - \rho^2}.$$

Luego se concluye que

$$P\left(|X - E(X)| \geq \epsilon\sqrt{V(X)} \text{ ò } |Y - E(Y)| \geq \epsilon\sqrt{V(Y)}\right) \\ \leq \frac{\left(1 + \sqrt{1 - \rho^2}\right)}{\epsilon^2}.$$

Proposición 5. Sea $f(x)$ una función no negativa, no decreciente, para todo número positivo x . Entonces para una variable aleatoria X con $|X| \leq c$, donde c es una constante, se tiene:

$$\frac{E\big(f(X)\big)-f(c)}{f(c)} \leq P(|X-E(X)| \geq c) \leq \frac{E\Big(f\big(X-E(X)\big)\Big)}{f(c)}.$$

Demostración. Sea

$$f\big(X-E(X)\big) = f\big(X-E(X)\big)I_{\{X-E(X)\geq c\}} + f(X-E(X))I_{\{X-E(X)<c\}}$$

así que

$$f\big(X-E(X)\big) \geq f\big(X-E(X)\big)I_{\{X-E(X)\geq c\}}.$$

Como f es creciente y

$$X-E(X)<X,$$

entonces

$$f\big(X-E(X)\big)<f(X),$$

de aquí se sigue

$$f\big(X-E(X)\big) \geq f(X)I_{\{X-E(X)\geq c\}}.$$

Ahora, como X es una variable aleatoria positiva y acotada, es decir

$$X<c.$$

Entonces

$$f\big(X-E(X)\big) \geq f(c)I_{\{X-E(X)\geq c\}},$$

esto implica que

$$E\Big(f\big(X-E(X)\big)\Big) \geq f(c)P(X-E(X)\geq c)$$

luego

$$P(X-E(X)\geq c) \leq \frac{E\Big(f\big(X-E(X)\big)\Big)}{f(c)}.$$

Demostremos la otra desigualdad.

Podemos escribir

$$f(X) = f(X)I_{\{X-E(X)\geq c\}} + f(X)I_{\{X-E(X)<c\}}.$$

Como

$$X<c.$$

y f es creciente, entonces $f(X)<f(c)$, por consiguiente

$$E(f(X)) \leq f(c)P(X-E(X)\geq c)+f(c)P(X-E(X)<c).$$

Como

$$X-E(X)<X \quad y \quad X<c,$$

entonces $P(X-E(X)<c)=1$, luego

$$E\big(f(X)\big) \leq f(c)P(X-E(X)\geq c)+f(c)$$

y como f es una función positiva, se tiene que

$$E\big(f(X)\big) \leq f(c)P(X-E(X)\geq c).$$

Y finalmente llegamos a que

$$\frac{E\big(f(X)\big)}{f(c)} \leq P(X-E(X)\geq c).$$

Otro resultado interesante, el cual es una consecuencia de la desigualdad de Chebyshev, se resume en la siguiente proposición:

Proposición 5. Si $X_1, X_2, \dots, X_n$ son variables aleatorias independientes con $V(X_i) \leq c$ (para $i=1,2,\dots,n$), entonces

$$P\left(\left\{\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n} - \frac{E(X_1+X_2+\dots+X_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2},$$

para todo $\varepsilon \geq 0$.

Demostración. Sea

$$S_n = X_1+X_2+\dots+X_n,$$

entonces por la desigualdad Chebyshev aplicada a la variable aleatoria

$$\frac{S_n}{n}$$

se tiene que

$$P\left(\left\{\left|\frac{S_n}{n}-\frac{E(S_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{V(S_n)}{\varepsilon^2}.$$

Ahora, como

$$V(S_n) = V\left(\sum_{I=1}^{n}\frac{X_i}{n}\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}V(X_i),$$

como $V(X_i)<c$ para todo $i=1,2,\dots,n$, entonces

$$V(S_n) \leq \frac{c}{n}.$$

Luego

$$P\left(\left\{\left|\frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n} - \frac{E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)}{n}\right| \geq \varepsilon\right\}\right) \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}.$$

III. CONCLUSIONES

Entre las principales aplicaciones de la desigualdad de Chebyshev esta el calcular cotas inferiores para probabilidades, lo cual es muy importante cuando no es posible o es difícil dar un valor exacto de la probabilidad.

La desigualdad de Chebyshev se emplea para demostrar otros resultados importantes en probabilidad como la ley débil de los grades números, esta ley es una consecuencia inmediata de la Proposición 5, la ley dice que si n tiende a infinito esta probabilidad tiende a cero.

Finalmente la La desigualdad de Chebyshev se puede generalizar a dos variables aleatorias que tienen cierta correlación.

REFERENCIAS

[1]. R. B. Ash, Analysis and probability. Ac Press, 1972.

[2]. D. L. Cohn, Measure theory . Cambridge Birkhauser Boston, 1980.

[3]. M. Degroot. Probabilidad y estadística, Segunda edición, Addison-Wesley Iberoamericana, S. A. 1988.

[4]. P. Ibarrola, L. Pardo y V. Quesada. Teoría de la probabilidad, Editorial Síntesis S. A, 1997.

[5]. Paul Meyer. Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas. Addinson –Wesley Iberoamericana, S. A 1970.

[6]. M. Muñoz, L. Blanco. Introducción a la teoría avanzada de la probabilidad. Universidad Nacional de Colombia, Primera edición 2002.

[7]. Vicente Quesada y Alfonso García. Lecciones de Calculo de Probabilidad. Días de Santos. 1988.

[8]. A. N. Shiryaev. *Probability*. Second Edition. Academic Press, 1975.

[9]. A. J. Weir, *General integration and measure.* Vol II Cambridge Univ. Press 1974.