LA NOCIÓN DE C-DENSIDAD Y LOS AXIOMAS BAJOS DE SEPARACIÓN

JESÚS ANTONIO ÁVILA
Lic. en Matemáticas y Física, MsC.
Profesor Auxiliar
Universidad del Tolima
javila@ut.edu.co

CLAUDIA LORENA LOZANO
Estudiante de Matemáticas con Énfasis en Estadística
Universidad del Tolima
cllo150382@latinmail.com

Trabajo parcialmente financiado por la Oficina de Investigaciones y Desarrollo Científico, de la Universidad del Tolima.

RESUMEN
En este artículo se definen los espacios T_c como aquellos que son T_0 y todos sus puntos son c-densos. Además se muestra la relación existente entre estos espacios y los T_D. Finalmente se estudia su preservación por homeomorfismos, por extensión de la topología, por subespacios y se presentan algunas propiedades derivadas de su orden de especialización.

PALABRAS CLAVES: Espacio topológico, axiomas bajos de separación, conjunto c-denso.

ABSTRACT
In this paper we define the T_c spaces, as those that are T_0 and all their points are c-dense. We show the relationship among these spaces and the T_D spaces. Also, we study if this property is preserved by homeomorphism, extension of the topology and subspaces. Finally, we present some properties obtained of its specialization order.

KEYWORDS: *Topological space*, *lower separation axioms, c- dense set.*

1. INTRODUCCIÓN

Los axiomas de separación juegan un papel muy importante en topología, hasta el punto de ser tema obligatorio en cualquier texto básico sobre el tema. Usualmente se estudian los axiomas T_0, T_1, T_2, T_3, etc. Sin embargo los de interés para el presente trabajo son los conocidos como axiomas bajos de separación, es decir, aquellos que se encuentran entre T_0 y T_1. Los principales como los T_D, T_{UD} y T_F, entre otros, fueron introducidos en [3]. Allí se mostró que todos ellos se pueden caracterizar en términos de los puntos de acumulación de conjuntos unitarios. Otros axiomas fueron introducidos en [1].

Ahora, cuando se observan los conjuntos unitarios densos en un espacio T_0, se encuentra que solamente puede existir uno solo, a lo sumo (Proposición 2.2). Entonces, al considerar nociones débiles de densidad como la c-densidad introducida en [4], surgen los interrogantes ¿Existen espacios T_0 con más de un punto c-denso?, ¿Existen espacios T_0 con todos sus puntos c-densos?. Si la respuesta a esta última pregunta es afirmativa, entonces valdría la pena investigar la relación existente entre estos espacios y los axiomas bajos de separación, antes mencionados.

El objetivo de este artículo es mostrar que existen espacios T_0 con todos sus puntos c-densos, los cuales serán llamados espacios T_c. A partir de esta noción se busca determinar su preservación por homeomorfismos, por extensión de la topología, por subespacios y presentar algunas propiedades derivadas de su orden de especialización. Finalmente, se quiere mostrar la relación existente entre los espacios T_c y los T_D.

2. PRELIMINARES

En este numeral se presentan algunas definiciones y proposiciones conocidas, que servirán para el desarrollo de este trabajo. Las demostraciones pueden ser consultadas en [5], [6] y [7].

A continuación se definen algunos axiomas de separación que serán utilizados en secciones posteriores. Para un estudio más detallado de ellos, puede consultarse [1], [3], [6], [7] y [8].

Definición 2.1. Un espacio topológico (X,τ) se llama:

a) T_0 si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existe un abierto que contiene a un punto y no al otro.
b) T_1 si para todo $x, y \in X$ con $x \neq y$, existen abiertos G, H tales que $x \in G$, $y \notin G$ y $x \notin H$, $y \in H$.
c) T_D si para todo $x \in X$, $\{x\}'$ es cerrado.

Puede probarse que $T_1 \Rightarrow T_D \Rightarrow T_0$ y que estas implicaciones son estrictas. Por esto la propiedad T_D es considerada como un axioma de separación entre T_0 y T_1.

Fecha de recepción: 18 Enero de 2005
Fecha de aceptación: 16 Marzo de 2005

La propiedad T_0 puede ser caracterizada en términos de la adherencia de puntos, de la siguiente manera.

Proposición 2.2. Un espacio topológico (X,τ) es T_0, si y sólo si, $\overline{\{x\}}=\overline{\{y\}}$ implica $x=y$ para $x,y\in X$.

Con la siguiente proposición se muestra la forma de asociar un orden a todo espacio T_0. Este es el orden de especialización, el cual se ha estudiado en varios contextos; por ejemplo [1]. Aquí será utilizado para observar algunas propiedades de los espacios T_c.

Proposición 2.3. Sea (X,τ) un espacio T_0. La relación $\leq_\tau$ definida como $x\leq_\tau y$, si y sólo si, $x\in\overline{\{y\}}^{\tau}$. Es una relación de orden.

Definición 2.4. Un conjunto ordenado $(X,\leq)$:
a) Tiene suficientes maximales, si para todo $x\in X$ existe y tal que $x\leq y$. Y no existe $z\in X$ con $y<z$.
b) Tiene orden denso, si para cada par $a,b\in X$, si $a<b$ entonces existe un $z\in X$ tal que $a<z<b$.
c) Tiene orden de anticadena, si cada elemento está relacionado solamente consigo mismo.

Definición 2.5. En un conjunto ordenado $(X,\leq)$:
a) La profundidad de $x\in X$ esta dada por $dp(x)=\sup\{n: x=x_1<x_2<...<x_n, x_i\in X, n\in \mathrm{N}\}$.
b) Se dice que a cubre a b si $b<a$ y no existen elementos entre ellos.

Definición 2.6. Sean (X,τ) un espacio topológico. $A\subseteq X$ se llama c-denso en X si $\overline{A}=X-F$ con $F\in PF(X)$. $PF(X)$ denota las partes finitas de X.

Estos conjuntos fueron definidos y estudiados en [4]. Nótese que claramente esta noción generaliza la noción de densidad clásica y será utilizada en la siguiente sección para definir los espacios topológicos T_c.

3. LOS ESPACIOS TOPOLÓGICOS T_c

3.1 Definición y Propiedades

En este numeral se definen los espacios T_c. Se determina si esta propiedad es hereditaria, si se preserva por productos, extensiones, continuidad y por último si es un invariante topológico. Nótese que en un espacio T_0 no pueden existir dos ó más puntos densos, pues implicaría que dos puntos tienen la misma adherencia y en un espacio T_0 esto conduce a que los dos puntos son iguales (Proposición 2.2). Sin embargo, veamos en el siguiente ejemplo que existen espacios T_0 con infinitos puntos c-densos. Esto motiva la definición de los espacios T_c.

Ejemplo 3.1.1. Sea N con la topología generada por la base $\beta=\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},...\}$ entonces $\overline{\{1\}}=\mathrm{N}$, $\overline{\{2\}}=\mathrm{N}-\{1\}$, $\overline{\{3\}}=\mathrm{N}-\{1,2\}$ y en general para $n>1$ se tiene que $\overline{\{n\}}=\mathrm{N}-\{1,2,...,n-1\}$. Además, nótese que este espacio es T_0.

Definición 3.1.2. Un espacio topológico (X,τ) se llama T_c, si es T_0 y todos sus puntos son c-densos.

En la siguiente proposición se muestra que todo subespacio de un espacio T_c hereda dicha propiedad.

Proposición 3.1.3. Sea (X,τ) un espacio topológico T_c. Si $A\subseteq X$ entonces (A,τ_A) es T_c.

Demostración. Claramente todo subespacio de un espacio T_0 es T_0. Ahora si $x\in A$ entonces $x\in X$, luego $\overline{\{x\}}^X=X-F$ con $F\in PF(X)$. Y como $\overline{\{x\}}^A=\overline{\{x\}}^X\cap A$, se tiene que $\overline{\{x\}}^A=(X-F)\cap A=A-(A\cap F)$. Siendo $A\cap F$ un subconjunto finito de A. Así (A,τ_A) es T_c. Δ

La propiedad T_c no se preserva por productos como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.4. N con la topología del Ejemplo 3.1.1 es T_c. Ahora en $\mathrm{N}\times\mathrm{N}$ con la topología producto se tiene que $\overline{\{(1,2)\}}=\overline{\{1\}}\times\overline{\{2\}}=\mathrm{N}\times(\mathrm{N}-\{1\})=(\mathrm{N}\times\mathrm{N})-I$, con I infinito. Así $\{(1,2)\}$ no es c-denso.

Al considerar si la propiedad T_c se preserva por extensión de la topología, es claro que la condición T_0 satisface esta propiedad. Sin embargo, si en (X,τ) todos los puntos son c-densos, no necesariamente en (X,μ) esto se cumple, con $\tau\subseteq\mu$. Lo anterior se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.5. N con la topología del ejemplo anterior es un espacio T_c. Ahora, N con la topología discreta es T_0 pero ningún punto es c-denso.

Al considerar el caso opuesto al anteriormente descrito, es decir con $\mu\subseteq\tau$ y (X,τ) un espacio T_c; se obtiene que todos los puntos son c-densos en (X,μ). Ya que para $x \in X$ se tiene que $\overline{\{x\}}^{\tau} \subseteq \overline{\{x\}}^{\mu}$, entonces $X - F \subseteq \overline{\{x\}}^{\mu}$ con $F \in PF(X)$. Esto implica que $\overline{\{x\}}^{\mu} = X - F_1$ con $F_1 \in PF(X)$. Sin embargo, si (X,τ) es T_0 no necesariamente (X,μ) lo es, con $\mu \subseteq \tau$. Esto se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.1.6. N con la topología del ejemplo anterior es un espacio T_c. Sin embargo, N con la topología grosera no es T_0, pero todos sus puntos son c-densos.

En las siguientes proposiciones se muestra el comportamiento de los conjuntos c-densos, mediante las funciones continuas.

Proposición 3.1.7. Sea $f : X \to Y$ una función continua. Si $A \subseteq X$ es c-denso, entonces $f(A)$ es c-denso en $f(X)$.

Demostración. Como A es c-denso, entonces $\overline{A} = X - F$ con $F \in PF(X)$. Luego $f(\overline{A}) = f(X-F) \subseteq \overline{f(A)}$ y $f(X) - f(F) \subseteq f(X-F) \subseteq \overline{f(A)}$. Así, $\overline{f(A)} = f(X) - \widetilde{F}$, con $\widetilde{F}$ un subconjunto finito de $f(X)$. Δ

Es claro que la propiedad T_0 no se preserva por continuidad. Pues al considerar la función idéntica $i : (\mathrm{R},\ discreta) \to (\mathrm{R},\ indiscreta)$. Se tiene que i es continua, $(\mathrm{R}, discreta)$ es T_0 pero $(\mathrm{R}, indiscreta)$ no lo es. Por tanto, la propiedad T_c tampoco se preserva por continuidad. Sin embargo, sí es un invariante topológico, como se aprecia en la siguiente proposición.

Proposición 3.1.8. Sea $f : X \to Y$ continua, sobre Y abierta. Si X es T_c entonces Y es T_c.

Demostración. Claramente Y es T_0. Ahora si $y \in Y$, existe $x \in X$ tal que $f(x) = y$. Como X es T_c se tiene que $\{x\}$ es c-denso en X. Luego por la proposición anterior $f(\{x\}) = \{f(x)\} = \{y\}$ es c-denso en $f(X) = Y$. Δ

Corolario 3.1.9. La propiedad T_c es un invariante topológico.

Demostración. Se obtiene directamente de la proposición anterior. Δ

3.2 Los Espacios T_c y su Orden de Especialización

Esta sección está encaminada a probar algunas propiedades de los espacios T_c, relacionadas directamente con su estructura de orden. Recuérdese que esto se puede hacer, asociando a todo espacio T_0 el orden de especialización (Proposición 2.3). Aquí el orden será denotado por $\leq$.

Proposición 3.2.1. Si (X,τ) es T_c entonces:

a) $(X,\leq)$ tiene suficientes y finitos maximales.
b) El orden $\leq$ no es denso, si es diferente del orden de anticadena.
c) La profundidad de todo punto es finita.
d) Si $a < b$ existe c que cubre a a y $c \leq b$.
e) El conjunto $min(X)$ es diferente de vacío, si y sólo si, X es finito.

Demostración. a) Por ser X un espacio T_c, para todo $x \in X$, $\overline{\{x\}} = X - F$ con $F \in PF(X)$. Es decir para todo $y \in X - F$, $y \leq x$. Ahora como F es finito, el conjunto $x\uparrow = \{m \in X : x \leq m\}$ es finito y por tanto debe tener un número finito de maximales, al menos uno.

b) Supóngase que X es T_c y el orden de X es denso. Como el orden no es de anticadena existen $x, y \in X$ con $x < y$. Y como el orden es denso, existen infinitos elementos estrictamente mayores que x y menores que y. Por tanto existen infinitos puntos que no están en la adherencia de x, lo cual es contradictorio.

c) Supóngase que existe un $x \in X$ con profundidad infinita. Entonces $\overline{\{x\}} \neq X - F$ con $F \in PF(X)$, lo cual es contradictorio.

d) Se obtiene directamente de la parte c).

e) Es consecuencia del hecho que en X existen puntos cerrados y c-densos, si y sólo si, X es finito. Δ

En la siguiente proposición se relaciona la propiedad T_c con el axioma de separación T_D.

Proposición 3.2.2. Todo espacio T_c es un espacio T_D.

Demostración. Sea $x \in X$. Si $\{x\}' = \varnothing$ nada a probar. Si $\{x\}' \neq \varnothing$, entonces $\{x\}' = X - \widetilde{F}$ con $\widetilde{F} \in PF(X)$. El conjunto $\{x\}'$ con el orden inducido $\leq$ tiene maximales y además son finitos, pues de lo contrario se contradice el hecho que todo punto es c-denso. Entonces $max(\{x\}') = \{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$ y además es claro que

$\{x\}' = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{\{m_i\}}$. Luego los puntos de acumulación de todo punto es cerrado. Por tanto X es T_D. Δ

De la proposición anterior se concluye que los espacios T_c están contenidos en los T_D. En el siguiente ejemplo se muestra que esta contenencia es estricta.

Ejemplo 3.2.3. Sea Z con la topología generada por la base $\beta = \{\{a, a+1, a+2, ...\} : a \in Z\}$. Entonces para cada $x \in Z$, se tiene que $\{x\}' = \{..., x-2, x-1\} = \overline{\{x-1\}}$. Es decir, este espacio es T_D pero no es T_c.

De acuerdo con lo anterior se tiene el siguiente diagrama de implicaciones estrictas. Nótese que T_1 no implica T_c, pues claramente existen espacios T_1 infinitos.

$$T_c \Rightarrow T_D \Rightarrow T_0$$

El diagrama anterior nos permite considerar la propiedad T_c como un nuevo axioma de separación. El cual no se encuentra referenciado en la literatura consultada.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El desarrollo de este trabajo permitió obtener las siguientes conclusiones y recomendaciones:

Se definió un nuevo axioma de separación que se ha llamado T_c. Se probó que no se preserva por productos, extensión de la topología y funciones continuas. Sin embargo se hereda para subespacios y es un invariante topológico.

Se mostraron algunas propiedades que satisfacen los espacios T_c, en relación con su orden de especialización. En este sentido se probó que todo punto tiene profundidad finita, que el espacio tiene suficientes y finitos maximales y que para todo punto del espacio, existe otro que lo cubre.

Se probó que todo espacio T_c es un espacio T_D, pero lo contrario no. Esto hace ver la noción T_c como un nuevo axioma de separación. El cual no se encuentra referenciado en la literatura consultada.

Se recomienda investigar si es posible generalizar la noción T_c, vía espacios $semi-T_0$ y conjuntos casi-semi-densos [4].

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] ANDIMA, S. J. and THRON, W. J. Order-Induced Topological Properties, Pacific Journal of Mathematics, 75(1978), 297-318.

[2] ARMSTRONG, M. A. Topología Básica, Editorial Reverté, España, 1987.

[3] AULL, C. E. and THRON, W. J. Separation Axioms Between T_0 and T_1, Indag. Math, 24(1962), 26-37.

[4] ÁVILA, J. A. y LOZANO, C. L. Sobre Una Noción Débil de Densidad, Scientia et Technica, Año X, No. 26, Diciembre 2004, 141-146.

[5] KELLEY, J. L. General Topology, Springer-Verlag, New York, 1955.

[6] MUNKRES, J. R. Topology a First Course, Prentice-Hall, New Jersey, 1975.

[7] RUBIANO, G. Topología General, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.

[8] VAIDYANATHASWAMY, R. Set Topology, Dover Publications Inc., New York, 1999.