UNA DEMOSTRACIÓN ALTERNATIVA PARA EL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA POR MEDIO DEL GRADO TOPOLÓGICO

RESUMEN
En este artículo presentamos una demostración sencilla del teorema fundamental del álgebra haciendo uso de una herramienta conocida como el grado topológico y sus fuertes propiedades (escisión, invarianza por homotopía, y de existencia) que facilitan de una manera asombrosa la demostración de este teorema.

PALABRAS CLAVES: Grado topológico, homotopía, propiedad de escisión, de invarianza por homotopía, de existencia.

ABSTRACT
In this paper we present a simple proof of algebra fundamental theorem, using a tool known as topological degree and its strong properties which make easy the proof of this theorem.

KEYWORDS: *Topological degree, homotopy, homotopy invariance, excision, existence.*

LUIS EDUARDO OSORIO A
Lic. en matemáticas y física
Universidad Tecnológica de Pereira
mat.eduardo@gmail.com

MARIA JULIANA OSORIO M
Lic. en matemáticas y física
Universidad Tecnológica de Pereira
yuligan@utp.edu.co

1. INTRODUCCIÓN

El teorema fundamental del álgebra es un resultado importantísimo en las matemáticas puesto que nos garantiza bajo ciertas condiciones que un polinomio de grado menor o igual a n tiene por lo menos una raíz. Aquí presentamos de una manera muy sencilla pero poderosa una demostración alternativa, mediante una novedosa teoría conocida como el grado topológico. El procedimiento que seguimos es el siguiente: primero establecemos una homotopía entre dos polinomios de grado menor o igual a n, garantizamos que dichos polinomios no se anulen en la frontera del conjunto sobre el que estamos trabajando y aplicando la propiedad de escisión, de invarianza por homotopía y la propiedad de existencia de ceros del grado topológico encontramos que el número de ceros es n, lo que concluye la demostración del teorema.

2. PRELIMINARES

Definición. Homotopía entre funciones.
Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f_0, f_1 \in C(A;\mathbb{C})$ y Ω un abierto simplemente conexo tal que $\overline{\Omega} \subset A$ y cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan. Se dice que f_0, f_1 son homótopas si existe una función continua

$$H : A \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

tal que

$$H(z,0) = f_0(z), \quad H(z,1) = f_1(z), \quad z \in A$$

y

$$H(z,s) \neq 0, \quad z \in \partial\Omega, \quad 0 \le s \le 1.$$

Definición. Grado topológico.
Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f \in C(A;\mathbb{C})$ y Ω un abierto simplemente conexo tal que $\overline{\Omega} \subset A$ y cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan sobre la que no se anula f, es decir

$$f^{-1}(0) \cap \partial\Omega = \varnothing$$

Se llama grado topológico de f en 0 respecto a Ω, al número entero denotado por

$$\mathrm{Deg}(f,\Omega,0) := V_{\partial\Omega}(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega} \frac{f'}{f},$$

con $\partial\Omega$ orientada positivamente.
Obsérvese que de la definición anterior tenemos que el grado es un contador generalizado del número de ceros que posee una función continua en un conjunto abierto y además depende sólo de los valores que tome dicha función sobre la frontera.

2.1 Propiedades del grado topológico.

Invarianza del grado topológico por homotopía.
Sean $A \subset \mathbb{C}$ abierto, $f_0, f_1 \in C(A;\mathbb{C})$ y Ω un abierto simplemente conexo tal que $\overline{\Omega} \subset A$ y cuya frontera $\partial\Omega$ es una curva de Jordan que cumple

$$0 \notin f_0(\partial\Omega) \cup f_1(\partial\Omega).$$

Supongamos que existe una función continua

$$H : A \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

tal que

$$H(z,0) = f_0(z), \quad H(z,1) = f_1(z), \quad z \in A$$

y

$$H(z,s) \neq 0, \quad z \in \partial\Omega, \quad 0 \le s \le 1.$$

Fecha de Recepción: 31 Enero de 2005
Fecha de Aceptación: 17 Marzo de 2005

Entonces,

$$\operatorname{Deg}(f_0,\Omega,0)=\operatorname{Deg}(f_1,\Omega,0).$$

Esta propiedad nos dice que si tenemos dos funciones homótopas que no se anulan sobre la frontera de Ω, entonces el grado de una de estas funciones es igual al grado de la otra, respecto de 0.

Propiedad de escisión.

Sean $A\subset\mathbb{C}$ abierto, $f\in C(A;\mathbb{C})$ y $\Omega_0,\Omega_1\subset A$ dos subconjuntos abiertos simplemente conexos cuyas fronteras son curvas de Jordan. Supongamos que

$$\overline{\Omega}_0\subset\Omega_1,\quad \Omega_1\subset A\quad 0\notin f(\overline{\Omega}_1\setminus\Omega_0).$$

Entonces,

$$\operatorname{Deg}(f,\Omega_0,0)=\operatorname{Deg}(f,\Omega_1,0).$$

Propiedad de existencia de ceros.

Sean $A\subset\mathbb{C}$ abierto, $f\in C(A;\mathbb{C})$ y Ω un abierto simplemente conexo cuya frontera es una curva de Jordan, tal que $\overline{\Omega}\subset A$ y

$$f^{-1}(0)\cap\overline{\Omega}=\varnothing$$

entonces,

$$\operatorname{Deg}(f,\Omega,0)=0.$$

Como consecuencia inmediata de la propiedad anterior, se obtiene que cuando $0\notin f(\partial\Omega)$ y $\operatorname{Deg}(f,\Omega,0)\neq 0$, necesariamente f posee algún cero en Ω.

3. DEMOSTRACIÓN ALTERNATIVA AL TEOREMA FUNDAMENTAL DEL ÁLGEBRA.

Utilizando las propiedades anteriores se propone a continuación la demostración al teorema fundamental del álgebra.

Teorema fundamental del álgebra.

Sea $\Omega\subset\mathbb{C}$ y $P:\overline{\Omega}\to\mathbb{C},\ P(z)=a_nz^n+\cdots+a_0$, un polinomio en variable compleja, con $a_n\neq 0$ y cada $a_i\in D\subset\Omega$ (con D un disco). Entonces, $P(z)=0$ tiene por lo menos un cero.

Demostración.

Sin pérdida de generalidad suponemos $a_n=1$. Definamos la homotopía $H:\overline{\Omega}\times[0,1]\to\mathbb{C}$ como

$$H(z,t)=f_t(z):=z^n+t(a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0)$$

con $f_0(z)=z^n$ y $f_1(z)=P(z)$.

Probemos que $0\notin H(\partial\Omega\times[0,1])$. Supongamos que $H(z,t)=0$ para $(z,t)\in\overline{\Omega}\times[0,1]$, luego

$$\frac{t\left|a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0\right|}{\left|z^n\right|}=1,$$

pero la ecuación anterior tiende a cero cuando $|z|\to\infty$, por lo tanto debe existir $\rho>0$ tal que $H(z,t)\neq 0$ para $|z|\geq\rho$, $t\in[0,1]$ y se cumple que

$$f_t^{-1}(0)\cap\partial\Omega=\varnothing.$$

Tomemos $\Omega_0\subset\Omega$, donde $\partial\Omega_0=\{z:|z|=\rho\}$. Por la propiedad de escisión

$$\operatorname{Deg}(f_t,\Omega,0)=\operatorname{Deg}(f_t,\Omega_0,0),$$

puesto que $0\notin f_t(\overline{\Omega}\setminus\Omega_0)$. Usando la invarianza del grado por homotopía

$$\operatorname{Deg}(f_0,\Omega_0,0)=\operatorname{Deg}(f_1,\Omega_0,0),$$

pero

$$\operatorname{Deg}(f_0,\Omega_0,0)=V_{\partial\Omega_0}(f_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial\Omega_0}\frac{f_0'}{f_0}$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{in\rho^ne^{in\theta}}{\rho^ne^{in\theta}}d\theta=n.$$

Finalmente se concluye

$$\operatorname{Deg}(f_1,\Omega_0,0)=\operatorname{Deg}(P,\Omega_0,0)=\operatorname{Deg}(P,\Omega,0)=n$$

por la propiedad de existencia, se sigue que $P(z)=0$ tiene al menos un cero en Ω.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este artículo se plasma el poder del grado topológico como teoría especial para demostrar este tipo de teoremas y algunos otros de la topología, como lo son los teoremas de punto fijo de Brouwer y Schauder, el teorema de Borsuk entre otros, haciendo uso de estas fuertes propiedades que facilitan de una manera asombrosa las demostraciones.

5. BIBLIOGRAFÍA

[1] LÓPEZ Julián. Ecuaciones diferenciales y variable compleja. Prentice Hall, 2001.

[2] KONDER Peter Paul. Introducción a la teoría del grado topológico de una aplicación en $\mathbb{R}^n$. Uninorte, 2000

[3] L. Ambrosio, N. Dancer. Calculus of variations and partial differential equations. Springer verlag, 1999.

[4] OSORIO Juliana, OSORIO Luis Eduardo. Teoría del grado topológico. Universidad Tecnológica de pereira, 2004