

# ESTABILIZACIÓN DEL UNIVERSO ANTI-DE SITTER CON TÉRMINO CINÉTICO MEDIANTE POTENCIALES DILATÓNICOS

Stabilization of Anti- de Sitter Universe with kinetic Term through Dilatonic Potentials

Jimmi Alexander Osorio Salazar

*Licenciatura en Matemáticas y Física, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia*

jimmialexo@gmail.com

**Resumen**— Este trabajo estudia los efectos producidos por el término cinético dilatónico en la estabilización cuántica del Universo AdS. Las correcciones cuánticas son hechas incluyendo el dilatón en la acción efectiva y adhiriendo un término cinético y una función del potencial dilatónico en la acción clásica. Se obtienen las ecuaciones de movimiento y las soluciones son estudiadas para diferentes casos de los términos dilatónicos. A través de métodos numéricos, se obtienen las soluciones, ante la presencia simultánea del término cinético y el potencial dilatónico.

**Palabras clave**— Dilatón, Universo AdS, creación cuántica, estabilización.

**Abstract**— This paper studies the produced effects by dilatonic kinetic term for quantum stabilization of an Ads Universe. Quantum corrections are made including the dilaton in the effective action and to adhere a kinetic term and a function of the dilatonic potential in the classic action. The equations of motion are obtained and the solutions are studied for different cases of the dilatonic terms. Through numerical methods, the solutions are obtained in simultaneous presence of the kinetic term and the dilatonic potential.

**Key Words**— Dilaton, Ads Universe, quantum creation, stabilization

## I. INTRODUCCIÓN

Aunque originalmente las soluciones a las ecuaciones clásicas de Einstein contienen singularidades, la mayoría de los modelos inflacionarios son dinámicamente equivalentes a la relatividad general conteniendo un campo escalar con algún potencial (para mayores detalles ver [1]). Uno de los modelos inflacionarios más satisfactorios [2], se basa en la creación cuántica de un universo de-Sitter a través de los efectos cuánticos de la materia. Este resultado permite pensar en la posibilidad de creación cuántica de

otros contextos curvados, planteando la posibilidad de obtener un modelo del universo temprano. Con respecto a esa situación, hay un reciente interés en el estudio del universo Anti-de Sitter (AdS), motivado principalmente por la conjetura AdS/CFT [3], que plantea la correspondencia entre propiedades del universo clásico AdS y una teoría conforme de campo en una dimensión menor. Su importancia radica en que expone una relación entre una teoría clásica de la gravedad y una teoría cuántica, lo que podría conducir de manera natural a la gravedad cuántica, ante la posibilidad de incluir efectos cuánticos de la materia en el contexto AdS.

Hasta ahora, se ha mostrado que los efectos cuánticos desestabilizan un Universo AdS ya existente e imposibilitan su creación [4]. Sin embargo, existen algunas alternativas en las que se manifiesta una posibilidad para la creación del Universo AdS expuesto a efectos cuánticos de la materia (ver [5, 6, 7]). Las ecuaciones de movimiento encontradas en esta clase de teorías revelan que en presencia del dilatón y bajo algunas condiciones iniciales, podría existir una posibilidad de creación cuántica del Universo AdS [4, 7].

Con base en esos resultados, en este trabajo se consideran los efectos cuánticos de la materia interactuando con el dilatón en la acción efectiva. Además, es incluido el término cinético y un potencial dilatónico en la acción clásica gravitacional. De manera particular, se estudia el papel específico que juega el término cinético y el potencial dilatónico en la creación y estabilización cuántica del universo dilatónico AdS, además de las condiciones necesarias para su origen cuántico. Para esto se estudian algunas soluciones a las ecuaciones de movimiento para diferentes casos de los términos dilatónicos y se analiza la posibilidad de obtener una solución inflacionaria acorde a los datos cosmológicos.

## II. CORRECCIONES CUÁNTICAS EN EL Universo AdS

### A. Métrica de la teoría

Con base en la conjetura AdS/CFT, lo más adecuado es presentar una métrica del espacio-tiempo utilizada en el estudio de las dualidades entre la teoría de cuerdas y las teorías cuánticas de gauge. En ese caso se puede considerar la métrica

$$ds^2 = a^2[(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2] - (d\tilde{x}^3)^2, \quad (1)$$

con  $a = e^{-\lambda\tilde{x}^3}$  como el factor de escala, y constante cosmológica negativa  $\Lambda = -\lambda^2$ . Esta métrica se puede representar en una forma conformemente plana por medio de la transformación de coordenadas  $y = x^3 = e^{\lambda\tilde{x}^3}/\lambda$ , teniendo entonces:

$$ds^2 = a^2[(dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2] = a^2(\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu). \quad (2)$$

### B. La acción efectiva

Si el universo temprano es llenado con alguna materia, obedeciendo a la gran teoría de campo unificada (GUT), basta con considerar solo campos libres, puesto que las correcciones radioactivas no son esenciales [4]. A diferencia del espacio de-Sitter, el espacio AdS es un contexto súper-simétrico para la GUT (si la GUT es súper-simétrica). Así, la GUT considerada ofrece una forma general de la anomalía localizada del tensor de energía-impulso en un contexto gravitacional (ver [8]):

$$T = b\left(F + \frac{2}{3}\square R\right) + b'G + b''\square R. \quad (3)$$

Así,

$$T = b\left(F + \frac{2}{3}\square R\right) + b'G + b''\square R + a_1\left(\frac{(\nabla f)(\nabla f)}{f^2}\right)^2 + a_2\square\left(\frac{(\nabla f)(\nabla f)}{f^2}\right), \quad (4)$$

ofrece la anomalía conforme y el aporte del dilatón, requerido para el propósito de este trabajo.

Para este caso se tiene (ver [5]):

$$b = \frac{1}{120(4\pi)^2}, \quad b' = -\frac{1}{120(4\pi)^2},$$

$$a_1 = \frac{1}{32(4\pi)^2}, \quad a_2 = \frac{1}{24(4\pi)^2}.$$

Además,  $F$  es el cuadrado del tensor de Weyl en cuatro dimensiones y  $G$  es el invariante de Gauss-Bonnet;

$$F = R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{3}R^2, \quad (5)$$

$$G = R^2 - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta}. \quad (6)$$

El coeficiente  $b''$  es un parámetro arbitrario que puede ser cambiado por una re-normalización de la acción gravitacional y  $f = f(\varphi)$  es una función arbitraria de un campo escalar cuántico (en este caso es un acoplamiento dilatónico arbitrario). Dado que ante la transformación de coordenadas el factor de escala ha tomado la forma  $a = 1/\lambda y$ , se hace importante tener un factor de escala conforme. Por lo tanto, se reescribe el tensor métrico en una forma conformemente plana (ver [8]):

$$g_{\mu\nu} = e^{2\sigma(y)}\eta_{\mu\nu}, \quad (7)$$

de donde se obtiene el factor de escala conforme

$$a = e^{\sigma(y)}. \quad (8)$$

Así, se puede determinar el lagrangiano de la acción efectiva, descrito por el factor de escala conforme.

Dado  $\mathcal{L} = \sqrt{-g}T$ , se hacen los correspondientes reemplazos en función del nuevo tensor métrico para  $R$ ,  $R_{\mu\nu}$  y  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  en  $T$  y se utilizan las técnicas referidas en [8], obteniendo la siguiente forma de la acción efectiva:

$$W = \int d^4x \left[ 2b'\sigma\square^2\sigma - \frac{1}{12}\left(b'' + \frac{2}{3}(b+b')\right)\left(6\square\sigma + 6\eta^{\mu\nu}(\partial_\mu\sigma)(\partial_\nu\sigma)\right)^2 + a_1\left(\frac{(\nabla f)(\nabla f)}{f^2}\right)^2\sigma + a_2\square\left(\frac{(\nabla f)(\nabla f)}{f^2}\right)\sigma + a_2\frac{(\nabla f)(\nabla f)}{f^2}[(\nabla\sigma)(\nabla\sigma)] \right], \quad (9)$$

Tomando  $f = \varphi$  y teniendo en cuenta que  $\sigma$  esta sólo en función de  $y$ , se obtiene la siguiente expresión de  $W$ :

$$W = V_3 \int dy \left[ 2b'\sigma\sigma'''' - 3\left(b'' + \frac{2}{3}(b+b')\right)(\sigma'' + \sigma'^2)^2 + a_1\frac{\varphi'^4}{\varphi^4}\sigma + a_2\left[\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\right]''\sigma + a_2\frac{\varphi'^2}{\varphi^2}\sigma'^2 \right], \quad (10)$$

donde  $\sigma' = \frac{d\sigma}{dy}$ .

Normalmente la acción efectiva total es la suma de  $W$  mas una funcional conforme invariante. Sin embargo, en el caso del contexto plano conforme es una constante sin importancia. Por otro lado, dado que  $b''$  es arbitrario y que para este caso el significado físico no cambia, se puede hacer  $b'' = 0$ . Con este

hecho y resolviendo un poco mas los términos de la integral se obtiene finalmente:

$$W = V_3 \int dy \left[ 2b'\sigma\sigma'''' - 2(b+b')(\sigma''^2 + 2\sigma''\sigma'^2 + \sigma'^4) + a_1 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} \sigma + a_2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \sigma'^2 + 2a_2 \left( \frac{\varphi''^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi'\varphi'''}{\varphi^2} - 5 \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^3} + 3 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} \right) \sigma \right] \quad (11)$$

### C. La acción clásica

Como es conocido, la Relatividad General nos da la siguiente forma de la acción gravitacional clásica (para mayores detalles ver [9]):

$$S = -\frac{1}{k} \int d^4x \sqrt{-g} R, \quad (12)$$

con  $k = 16\pi G$ , donde  $G = 6,673 \times 10^{-8}$  es la constante gravitacional. Para efecto de las correcciones cuánticas se adhiere el potencial dilatónico y un término cinético para el dilatón. De esta manera se obtiene la siguiente forma de la acción gravitacional:

$$S = -\frac{1}{k} \int d^4x \sqrt{-g} \left( R + \frac{\beta}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + V(\varphi) + 6\Lambda \right). \quad (13)$$

Teniendo en cuenta que  $\sigma$  y  $\varphi$  dependen únicamente de  $y$ , se calculan los términos de la integral, obteniendo la forma final de  $S$ :

$$S = V_3 \int dy \left( -\frac{6}{k} e^{2\sigma} (\sigma'' + \sigma'^2) - \frac{\beta}{2k} e^{2\sigma} \varphi'^2 - \frac{e^{4\sigma}}{k} V(\varphi) - \frac{6}{k} e^{4\sigma} \Lambda \right). \quad (14)$$

Finalmente, sumando la acción efectiva y la acción clásica, se obtiene la acción total del sistema

$$W + S = V_3 \int dy \left[ a_1 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} \sigma + 2a_2 \left( \frac{\varphi''^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi'\varphi'''}{\varphi^2} - 5 \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^3} + 3 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} \right) \sigma + a_2 \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \sigma'^2 - 2(b+b')(\sigma''^2 + 2\sigma''\sigma'^2 + \sigma'^4) + 2b'\sigma\sigma'''' - \frac{6}{k} e^{2\sigma} (\sigma'' + \sigma'^2) - \frac{\beta}{2k} e^{2\sigma} \varphi'^2 - \frac{e^{4\sigma}}{k} V(\varphi) - \frac{6}{k} e^{4\sigma} \Lambda \right]. \quad (15)$$

### D. Ecuaciones de movimiento

De la variación de la acción total respecto a  $\sigma$  y  $\varphi$  se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$a_1 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} + 2a_2 \left[ \frac{\varphi''^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi'\varphi'''}{\varphi^2} - 5 \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^3} + 3 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} - \frac{\varphi'^2}{\varphi^2} \sigma'' \right] + 2 \left( \frac{\varphi'^3}{\varphi^3} - \frac{\varphi'\varphi''}{\varphi^2} \right) \sigma' - 4b(\sigma'''' - 6\sigma'^2\sigma'') + 24b'\sigma'^2\sigma'' - \frac{12}{k} e^{2\sigma} (\sigma'^2 + \sigma'') - \frac{\beta}{k} e^{2\sigma} \varphi'^2 - \frac{4}{k} e^{4\sigma} V(\varphi) - \frac{24}{k} e^{4\sigma} \Lambda = 0, \quad (16)$$

$$a_1 \sigma \left( \frac{\varphi'^4}{\varphi^5} - \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^4} \right) - 4a_1 \sigma' \frac{\varphi'^3}{\varphi^4} - \frac{e^{4\sigma}}{k} \frac{\partial}{\partial \varphi} V(\varphi) + \frac{\beta}{k} e^{2\sigma} \varphi'' + \frac{2\beta}{k} e^{2\sigma} \sigma' \varphi' + 2a_2 \left[ \sigma'^2 \left( \frac{\varphi'^2}{\varphi^3} - \frac{\varphi''}{\varphi^2} \right) - 2\sigma' \sigma'' \frac{\varphi'}{\varphi^2} + \sigma'' \left( \frac{\varphi'^2}{\varphi^3} - \frac{\varphi''}{\varphi^2} \right) - \sigma'''' \frac{\varphi'}{\varphi^2} \right] = 0. \quad (17)$$

De (8) se obtiene  $\sigma$  en función del factor de escala. Así, haciendo la sustitución correspondiente en las ecuaciones anteriores, estas toman la siguiente forma:

$$a_1 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} + 2a_2 \left( \frac{\varphi''^2}{\varphi^2} + \frac{\varphi'\varphi'''}{\varphi^2} - 5 \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^3} + 3 \frac{\varphi'^4}{\varphi^4} - \frac{a''\varphi'^2}{a\varphi^2} + \frac{a'^2\varphi'^2}{a^2\varphi^2} + 2 \frac{a'\varphi'^3}{a\varphi^3} - 2 \frac{a'\varphi'\varphi''}{a\varphi^2} \right) - 4b \left( \frac{a''''}{a} - 4 \frac{a'a'''}{a^2} + 6 \frac{a'^2a''}{a^3} - 3 \frac{a''^2}{a^2} \right) + 24b' \left( \frac{a'^2a''}{a^3} - \frac{a'^4}{a^4} \right) - \frac{24}{k} a^4 \Lambda - \frac{12}{k} a a'' - \frac{\beta}{k} a^2 \varphi'^2 - \frac{4}{k} a^4 V(\varphi) = 0, \quad (18)$$

$$6a_1 \ln a \left( \frac{\varphi'^4}{\varphi^5} - \frac{\varphi'^2\varphi''}{\varphi^4} \right) - 2a_1 \frac{a'\varphi'^3}{a\varphi^4} - \frac{a^4}{2k} \frac{\partial}{\partial \varphi} V(\varphi) + \frac{\beta}{2k} a^2 \varphi'' + \frac{\beta}{k} a a' \varphi' + a_2 \left( \frac{a'a''\varphi'}{a^2\varphi^2} + \frac{a''}{a} \left( \frac{\varphi'^2}{\varphi^3} - \frac{\varphi''}{\varphi^2} \right) - \frac{a'''\varphi'}{a\varphi^2} \right) = 0. \quad (19)$$

De esta manera, se han obtenido las ecuaciones de movimiento de la teoría planteada. Desde este punto de partida es posible desarrollar diversos análisis para diferentes condiciones de los términos dilatónicos.

### III. SOLUCIÓN A LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO PARA EL UNIVERSO DILATÓNICO AdS

Es conocido el hecho de que es posible el origen cuántico de un universo de-Sitter a partir de las contribuciones cuánticas de la materia (modelo de Starobinsky [2]). Sin embargo, si se considera la posibilidad de creación cuántica del Universo AdS, se puede verificar que esto no es posible ante sólo efectos cuánticos de la materia; por el contrario estos pueden conducir a la aniquilación de un Universo AdS ya existente (ver [4, 5]). Sin embargo, ante la presencia del dilatón esta posibilidad existe [5].

Antes de hallar las soluciones a las ecuaciones de movimiento en presencia del dilatón, es de gran utilidad hacer la transformación para el tiempo cosmológico [5, 7]:

$$dz = a(y)dy \quad (20)$$

Teniendo entonces  $\dot{a} = \frac{da}{dz}$  y  $\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dz}$ . De este modo, haciendo los reemplazos correspondientes en las ecuaciones (18) y (19) estas toman la siguiente forma:

$$\begin{aligned} & -4b \left( a^2 \ddot{a} + 3a\dot{a}\ddot{a} + a\dot{a}^2 - 5\dot{a}^2\ddot{a} \right) + 24b'\dot{a}^2\ddot{a} - \frac{24}{k}a^3\Lambda \\ & - \frac{12}{k}(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2) - \frac{\beta}{k}a^3\dot{\varphi}^2 - \frac{4}{k}a^3V(\varphi) + a_1a^3\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} \\ & + 2a_2a^2 \left( a\frac{\ddot{\varphi}^2}{\varphi^2} + a\frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\varphi^2} + 3\dot{a}\frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\varphi^2} - 5a\frac{\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}}{\varphi^3} - 3\dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^3} \right. \\ & \left. + 3a\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} \right) = 0, \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} & 6a_1a^2 \ln a \left( a\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} - a\frac{\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}}{\varphi^4} - \dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^4} \right) - 2a_1a^2\dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^4} \\ & - \frac{a^3}{2k}\frac{\partial}{\partial\varphi}V(\varphi) + \frac{\beta}{2k}a^2(a\dot{\varphi} + 3\dot{a}\dot{\varphi}) \\ & + a_2 \left( a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^3} - a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} + a\dot{a}^2\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^3} - a\dot{a}^2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} - a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} \right. \\ & \left. - 4a\dot{a}\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} - \dot{a}^3\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Las anteriores, corresponden a las ecuaciones de movimiento en función del tiempo cosmológico.

#### A. Solución a las ecuaciones de movimiento con término cinético y potencial dilatónico

Se sabe que en ausencia del potencial dilatónico no es posible la creación y estabilidad cuántica del universo dilatónico AdS. No obstante ante la presencia y cierta forma del potencial existe esa posibilidad (ver [5]). Sin

embargo, hasta el momento no se conocen los efectos obtenidos ante la presencia simultánea del potencial dilatónico y del término cinético. Con ese propósito, en el presente trabajo se consideran las ecuaciones (21) y (22) con  $V(\varphi) = \frac{\alpha_1}{\varphi}$ , quedando de esta manera:

$$\begin{aligned} & -4b \left( a^2 \ddot{a} + 3a\dot{a}\ddot{a} + a\dot{a}^2 - 5\dot{a}^2\ddot{a} \right) + 24b'\dot{a}^2\ddot{a} - \frac{24}{k}a^3\Lambda \\ & - \frac{12}{k}(a^2\ddot{a} + a\dot{a}^2) - \frac{\beta}{k}a^3\dot{\varphi}^2 - \frac{4}{k}a^3\frac{\alpha_1}{\varphi} + a_1a^3\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} \\ & + 2a_2a^2 \left( a\frac{\ddot{\varphi}^2}{\varphi^2} + a\frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\varphi^2} + 3\dot{a}\frac{\dot{\varphi}\ddot{\varphi}}{\varphi^2} - 5a\frac{\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}}{\varphi^3} - 3\dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^3} \right. \\ & \left. + 3a\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} \right) = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} & 6a_1a^2 \ln a \left( a\frac{\dot{\varphi}^4}{\varphi^4} - a\frac{\dot{\varphi}^2\ddot{\varphi}}{\varphi^4} - \dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^4} \right) - 2a_1a^2\dot{a}\frac{\dot{\varphi}^3}{\varphi^4} \\ & + \frac{a^3}{2k}\frac{\alpha_1}{\varphi} + \frac{\beta}{2k}a^2(a\dot{\varphi} + 3\dot{a}\dot{\varphi}) \\ & + a_2 \left( a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^3} - a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} + a\dot{a}^2\frac{\dot{\varphi}^2}{\varphi^3} - a\dot{a}^2\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} - a^2\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} \right. \\ & \left. - 4a\dot{a}\ddot{a}\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} - \dot{a}^3\frac{\dot{\varphi}}{\varphi^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, lo más apropiado es buscar soluciones de la forma (ver [4, 5, 6, 7])

$$a(z) = a_0e^{Hz} \quad y \quad \varphi(z) = \varphi_0e^{-\alpha Hz} \quad (25)$$

Al sustituir estas soluciones en la ecuación (24), es importante considerar que  $\ln a \sim Hz$ , por lo que se puede prescindir del término logarítmico, ya que  $H$  es proporcional a la masa de Planck, en consecuencia el producto  $Hz$  es una cantidad extremadamente pequeña, lo cual justifica la aproximación hecha. Reemplazando estas soluciones y sus derivadas correspondientes en las ecuaciones (23) y (24), se consiguen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} & 24b'H^4 - \frac{24}{k}\Lambda - \frac{24}{k}H^2 - \frac{\beta}{k}\varphi_0^2\alpha^2H^2e^{-2\alpha Hz} - \frac{4}{k}\frac{\alpha_1}{\varphi_0}e^{\alpha Hz} \\ & + a_1\alpha^4H^4 = 0, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} & 2a_1\alpha^3H^4 + \frac{\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha^2H^2e^{-2\alpha Hz} - \frac{3\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha H^2e^{-2\alpha Hz} + \\ & 6a_2\alpha H^4 + \frac{\alpha_1}{2k\varphi_0}e^{\alpha Hz} = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Teniendo en cuenta que el producto  $Hz$  es despreciable y que

$$e^{\alpha Hz} \cong 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha Hz)^n}{n!},$$

es posible buscar soluciones para valores no muy grandes de  $\alpha$ . En ese caso, las ecuaciones (26) y (27) toman la siguiente forma:

$$24b'H^4 - \frac{24}{k}\Lambda - \frac{24}{k}H^2 - \frac{\beta}{k}\varphi_0^2\alpha^2H^2 - \frac{4}{k}\frac{\alpha_1}{\varphi_0} + a_1\alpha^4H^4 = 0, \quad (28)$$

$$2a_1\alpha^3H^4 + \frac{\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha^2H^2 - \frac{3\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha H^2 + 6a_2\alpha H^4 + \frac{\alpha_1}{2k\varphi_0} = 0. \quad (29)$$

De acuerdo con estas ecuaciones, el valor de  $H^2$  dependerá del valor de  $\alpha$  a través del parámetro  $\alpha_1$ . Dado que las ecuaciones (28) y (29) son complejas, y no es fácil resolverlas algebraicamente, es necesario en este caso hacerlo de forma numérica. Tomando  $\varphi_0 = 1$ ,  $\Lambda = -0.01$  (ver [6]) y calculando las soluciones para diferentes valores de  $\beta$  (parámetro del término cinético) se obtiene la dependencia de  $H^2$  en términos de  $\alpha_1$ . Así, del análisis computacional con los valores establecidos para los parámetros del modelo, se han obtenido ocho soluciones a las ecuaciones anteriores, de las cuales hay cuatro soluciones que ofrecen sólo valores imaginarios de  $H^2$  y las otras cuatro presentan valores reales. De estas últimas, hay dos que satisfacen valores positivos de  $H^2$  y una de ellas presenta secciones de crecimiento en la que además,  $H^2$  toma estrictamente valores positivos en todo momento. De este modo, para los propósitos de este trabajo sólo es de interés esta última solución. Esta relación es descrita por la siguiente figura:

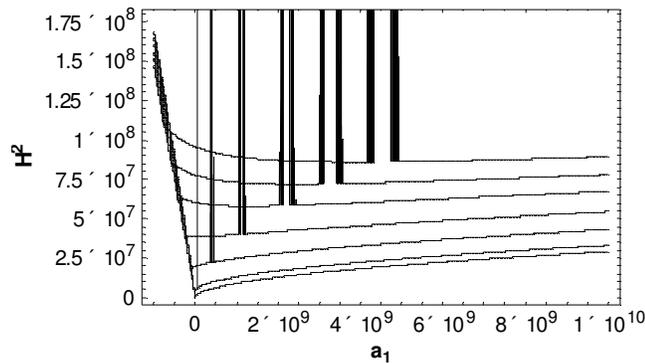


Figura 1.  $H^2$  en función de  $\alpha_1$  para  $\beta = 0.01, 0.1, 0.3, 0.5, 0.7, 0.85, 1$ .

Como se puede observar, hay siete curvas que corresponden respectivamente a la misma cantidad de valores dados para el parámetro  $\beta$ . El comportamiento de estas expresiones se analiza para una sección de valores de  $\alpha_1$  que va desde  $-1 \times 10^9$  hasta  $1 \times 10^{10}$ . Para un extenso margen de estos valores se tiene un comportamiento monótonamente creciente de las funciones, que corresponde al aumento de  $\alpha_1$ , lo que quiere decir que la curvatura aumenta a medida que el potencial dilatónico crece, permitiéndose entonces una posibilidad de creación

y estabilidad cuántica del universo dilatónico AdS. Además, cada curva expresa un rango donde los valores de  $H^2$  son mayores a medida que el parámetro  $\beta$  también es mas grande. Esto podría indicar una relación entre la velocidad de expansión del Universo Dilatónico AdS y el término cinético. Por otro lado, hay que resaltar una franja de cada curva en la que se presenta una singularidad, donde  $H^2$  crece y decrece rápidamente, tomando magnitudes bastante grandes. Además, entre cada sección donde se presenta este comportamiento hay una llamativa discontinuidad de la función. Esta situación puede ser observada con más detalle en la figura 2. La cual es una ampliación de la sección singular en una de las curvas de la figura 1.

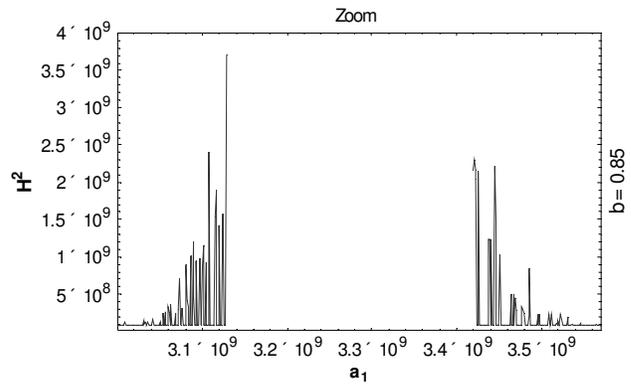


Figura 2. Sección singular de la solución para  $\beta = 0.85$

Como se observa en la figura, la función crece y decrece continuamente entre magnitudes bastante grandes de  $H^2$ , presentando además, una discontinuidad causada por valores imaginarios. Debido a la complejidad de las ecuaciones (28) y (29), y los grandes intervalos que se manejan en las soluciones, no es claro matemáticamente el producto de este comportamiento. Sin embargo, se puede observar que el rango de valores de  $\alpha_1$  en el que se presenta esta situación se desplaza y se amplía dependiendo de la magnitud de  $\beta$ . Así que se podrían aclarar algunas situaciones, estableciendo el rol individual del parámetro  $\beta$ . En ese caso, se debe estudiar la solución de manera aislada: con la sola presencia del potencial dilatónico y en ausencia del término cinético. No obstante, es claro que lo ocurrido en estas secciones es una inestabilidad del modelo, que puede estar relacionada con la topología del universo cerca de regiones con singularidades tipo agujeros negros. Otra situación importante para analizar se presenta donde las funciones empiezan a crecer, como se muestra a continuación:

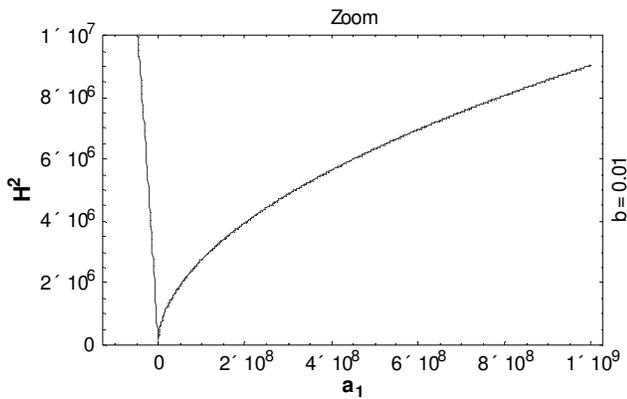


Figura 3.  $H^2$  en función  $\alpha_1$  para  $\beta = 0.01$

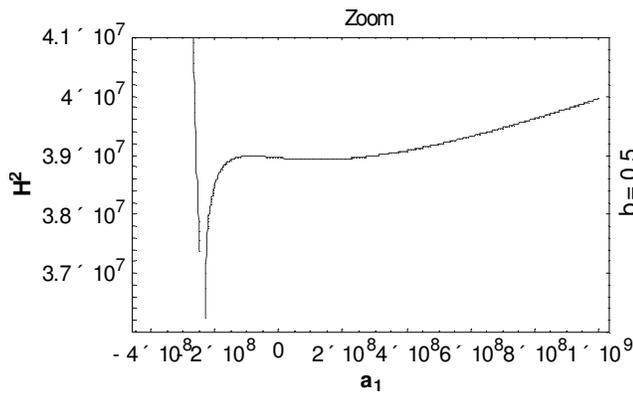


Figura 4.  $H^2$  en función  $\alpha_1$  para  $\beta = 0.5$

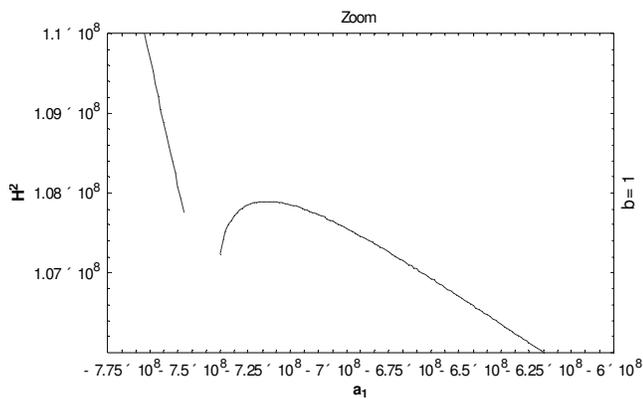


Figura 5.  $H^2$  en función  $\alpha_1$  para  $\beta = 1$

Observando los gráficos, se puede ver que en la mayor parte de los valores negativos de  $\alpha_1$  las curvas son monótonamente decrecientes a medida que este se acerca a cero. Sin embargo, en cierta gama de estos valores se produce una discontinuidad de las funciones, para posteriormente empezar a crecer rápidamente. Lo que quiere decir que dependiendo de la elección que se haga para los parámetros  $\beta$  y  $\alpha_1$  es posible obtener un universo en expansión acelerada o desacelerada. Además, en esas

secciones iniciales de crecimiento, la función se incrementa de manera más rápida que la tendencia general (este comportamiento puede ser observado con más detalle desde la figura 4). Esa situación indica una gran aceleración en la expansión del universo dilatónico AdS, permitiendo así que sea posible obtener un modelo estable en expansión acelerada correspondiente a un universo inflacionario. Por su parte, para magnitudes de  $\beta$  cercanas a cero se reduce notablemente la probabilidad de obtener singularidades. Sin embargo, también se disminuye la velocidad de expansión del modelo (ver figura 3). Esa variedad de situaciones que se pueden encontrar en las soluciones son muy interesantes porque permiten no solo establecer una posibilidad de creación cuántica del universo dilatónico AdS, sino además, la obtención de un modelo que podría describir diversos acontecimientos y procesos ocurridos en la evolución del universo.

Con el propósito de analizar la creación cuántica del universo dilatónico AdS en otras condiciones y aclarar el papel que cumple el potencial dilatónico, en la siguiente sección se estudia las soluciones a las ecuaciones de movimiento ante la sola presencia del término cinético.

### B. Solución sin potencial dilatónico

Considerando una solución a las ecuaciones de movimiento para el caso con término cinético y sin potencial dilatónico, se tiene la siguiente forma de las ecuaciones (28) y (29):

$$24b'H^4 - \frac{24}{k}\Lambda - \frac{24}{k}H^2 - \frac{\beta}{k}\varphi_0^2\alpha^2H^2 + a_1\alpha^4H^4 = 0, \tag{30}$$

$$2a_1\alpha^3H^4 + \frac{\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha^2H^2 - \frac{3\beta}{2k}\varphi_0^2\alpha H^2 + 6a_2\alpha H^4 = 0. \tag{31}$$

De igual forma que en la situación anterior, las ecuaciones son resueltas numéricamente. Sin embargo, en este caso las soluciones para  $\alpha$  dependerán de  $\beta$ , lo que implica que  $H^2$  también es función de este mismo parámetro. Al igual que antes, sólo una de las ocho soluciones halladas es de interés. Así, la figura 6 muestra la relación de  $H^2$  en función de  $\beta$  para esta solución.

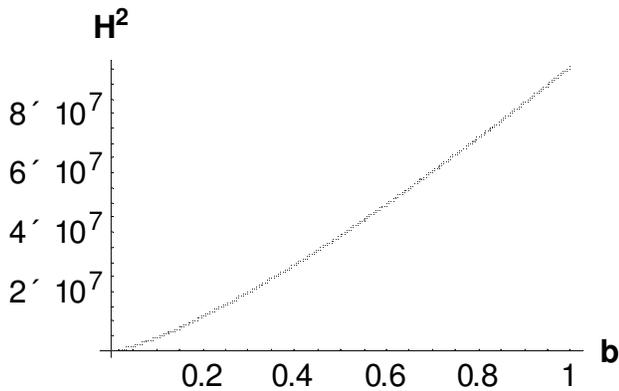


Figura 6.  $H^2$  en función  $\beta$ , y en ausencia del potencial dilatónico.

La función es monótonamente creciente, esto quiere decir que la curvatura del universo aumenta continuamente ante un incremento del término cinético a través del parámetro  $\beta$ . Por lo tanto, es también posible la creación y estabilidad cuántica del universo dilatónico AdS ante la presencia del término cinético y en ausencia del potencial dilatónico. Además,  $H^2$  aumenta desmesuradamente ante un pequeño crecimiento de  $\beta$ , esto indica que la magnitud de la velocidad de expansión del universo cuántico AdS en etapas tempranas depende fuertemente del aumento en el término cinético del dilatón. Entonces, es posible garantizar una expansión acelerada del universo dilatónico AdS con una elección apropiada del parámetro  $\beta$ , que determina la contribución del término cinético del dilatón.

#### IV. CONCLUSIONES

En conclusión, de la confrontación de los resultados obtenidos en las últimas dos secciones, se evidencia que para algunos valores del parámetro  $\beta$  se puede garantizar un universo dilatónico AdS estable, además una inflación acelerada que contrasta con las observaciones astrofísicas recientes que indican que nuestro universo actual se encuentra en esta situación, y por lo tanto, parcialmente el modelo considerado permite, mediante una elección apropiada de los parámetros, describir no sólo el universo temprano, sino además nuestro universo actual. Por otro lado, es posible concluir que el potencial dilatónico en el presente modelo conduce a establecer la posibilidad de origen cuántico del universo dilatónico AdS y garantizar su estabilidad, además aporta nuevos elementos que permiten establecer y explicar la inflación estable y acelerada del universo. De otra parte, las secciones atípicas en las soluciones podrían estar relacionadas con la topología del universo cerca de regiones con singularidades tipo agujeros negros. Sin embargo, sólo una mayor afinación de los parámetros, posiblemente un análisis perturbativo de la sensibilidad de las soluciones podría dar mayor claridad sobre esta situación.

En síntesis, se demostró que la presencia del potencial dilatónico y del término cinético garantiza la posibilidad de creación y estabilidad del universo dilatónico AdS. Además, este resultado también ocurre con la sola presencia de alguno de los dos términos.

El análisis hecho para diferentes casos de las soluciones, permitió establecer que la magnitud de la velocidad de expansión en etapas tempranas del universo dilatónico AdS depende fuertemente del potencial dilatónico, y la inclusión del término cinético en la solución a las ecuaciones de movimiento condujo no solo a establecer una posibilidad de creación cuántica del universo dilatónico AdS, sino también, contribuye en la velocidad de expansión, permitiendo obtener un universo estable en expansión acelerada, que para algunas magnitudes del término cinético puede ser un universo inflacionario.

#### AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar los más sinceros agradecimientos al Dr. John Quiroga Hurtado, por la formulación del problema y por sus valiosas orientaciones.

#### REFERENCIAS

- [1] Andrew R. Liddle, *An introduction to Cosmological Inflation*, Trieste, High energy, physics and cosmology. 260–295 (1999), arXiv: astro-th/9901124.
- [2] A. A. Starobinsky, *A new type of isotropic cosmological models without singularity*, Invent. Math. Phys. Lett. B 91, 99–102 (1980).
- [3] O. Aharony, S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri and Y. Oz, *Large N Field Theories, String Theory and Gravity*, Phys. Rept. 323, 183–386 (2000), arXiv: hep-th/9905111.
- [4] I. Brevik and S. D. Odintsov, *Quantum annihilation of Anti-de Sitter Universe*, Phys. Lett. 475B, 247 (2000), arXiv: hep-th/9912032.
- [5] J. Quiroga and Y. Shaido, *Quantum Stabilization of Dilatonic Anti-de Sitter Universe*, Grav. Cosmol. 8, 294–298 (2002), arXiv: gr-qc/0206065.
- [6] J. Quiroga Hurtado, H. I. Arcos, William Ardila Ureña, *Role of the Dilatonic potential to the Quantum stabilization of dilatonic Anti-de Sitter Universe*, Grav. Cosmol. 9, 99–102 (2003), arXiv: gr-qc/0211007.
- [7] I. Brevik and S.D. Odintsov, *Quantum Cosmology from N = 4 Super Yang–Mills Theory*, Phys. Lett. 455B, 104 (1999), hep-th/9902184.

[8] I. Antoniadis and E. Mottola, *Four-dimensional quantum gravity in the conformal sector*, Phys. Rev. D 45, 2013 (1992).

[9] Steven Weinberg, *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*, Massachusetts, John Wiley & Sons, Inc. 1972. 364p.