

APLICACIÓN EXPERIMENTAL DEL MÉTODO DE LA ANALOGÍA DE LA MEMBRANA EN LA DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS GENERADOS EN LA TORSIÓN DE BARRAS DE SECCIÓN NO CIRCULAR

RESUMEN

Es posible emplear un simple modelo experimental de membrana en el estudio del caso general de la torsión. Se desarrolló un dispositivo experimental para determinar la función de deflexión de una membrana limitada por diferentes contornos. Como resultado de los experimentos desarrollados y un procesamiento numérico de los datos, se obtuvieron curvas de nivel, los volúmenes alojados por la membrana deformada y las derivadas de la función de desplazamientos verticales. Posteriormente se estimaron los perfiles de esfuerzo cortante producidos por la torsión de barras de sección transversal igual al contorno de la membrana estudiada. El error entre los resultados del modelo experimental y la solución analítica de la ecuación diferencial de la torsión fue inferior al 10%.

PALABRAS CLAVES: Analogía, membrana, torsión

ABSTRACT

It is possible to use a simple experimental model of a membrane in the study of the general case of torsion. An experimental model was developed in order to estimate function of deflection of a membrane under different types of contours. As a result of the experiments carried out and the subsequent numerical procedures, the respective level curves, membrane volumes and derivatives of the function of vertical displacements were obtained. Following this, the shear stress curves were estimated in a bar subjected to torsion with the same cross section as the membrane contour. The error between the experimental data and the analytical results were not higher than 10%.

KEYWORDS: *Analogy, membrane, torsion.*

1. INTRODUCCIÓN

Muchos fenómenos físicos conocidos han podido ser expresados en la forma de una ecuación diferencial, la solución de dicha ecuación permite conocer la relación entre las diferentes variables involucradas. Sin embargo, en ocasiones alcanzar la solución por métodos analíticos resulta una tarea muy compleja y es necesario la utilización de métodos numéricos o incluso en algunos casos resulta más sencillo el empleo de la experimentación para alcanzar la solución del problema.

Aprovechando la similitud en la forma de la ecuación diferencial que rigen dos fenómenos dados, la analogía de la membrana (presentada por L. Prandtl durante la primera década del siglo XX) permite la determinación de las tensiones tangenciales presentes en barras sometidas a torsión mediante el análisis de la deformación de una membrana de contorno idéntico a la sección transversal del elemento estudiado.

Este artículo presenta el planteamiento matemático que permite la utilización de la analogía membrana en el estudio del problema de la torsión; se describen los modelos analíticos básicos en cada caso, para luego relacionarlos y obtener las expresiones necesarias en el empleo de esta analogía. En la siguiente sección se ilustra brevemente el modelo experimental diseñado y construido para la validación de las expresiones anteriormente deducidas, analizando el caso de secciones

transversales circulares, cuadradas, elípticas y triangulares. Posteriormente se plantean los procedimientos numéricos seguidos en el procesamiento de los datos obtenidos durante la fase experimental y finalmente se comparan los perfiles de esfuerzo deducidos mediante la aplicación del método de la analogía, con los alcanzados en el desarrollo analítico de la ecuación diferencial propia del problema de la torsión. Por último se plantean las conclusiones y recomendaciones producto del trabajo experimental y analítico.

2. MARCO CONCEPTUAL

2.1 Torsión en barras prismáticas

El análisis del caso particular de la torsión aplicado a barras de sección circular permite concluir que las secciones transversales del elemento cargado permanecen planas y que estas rotan unas con respecto a otras como si fueran discos rígidos. Cuando se trabajan barras de sección diferente a la circular estas suposiciones no pueden mantenerse, la sección transversal no permanece plana (ver Figura 1), y el alabeo es igual en todas las secciones transversales de la barra.

Si se fija un sistema coordenado en el extremo de la barra como se muestra en la Figura 1 y se definen como u , v y w los desplazamientos de un punto de una sección

CARLOS H. GALEANO U.

Ingeniero Mecánico, Especialista en mecánica de materiales
Profesor Auxiliar
Corporación Universitaria de Ibagué
chgalean@nevado.cui.edu.co

DIEGO ALEJANDRO RAMÍREZ

Ingeniero Mecánico
Corporación Universitaria de Ibagué
diegoramc@hotmail.com

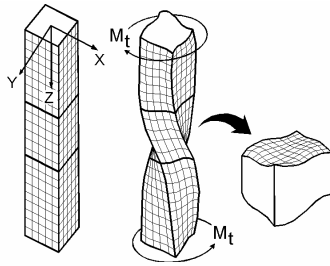


Figura 1. Torsión en barra prismática.

cualquiera en las direcciones x, y y z , respectivamente, estos desplazamientos podrían definirse como:

$$u = -\theta zy \tag{1}$$

$$v = \theta zx \tag{2}$$

$$w = \theta \psi(x, y) \tag{3}$$

donde ψ es una función de alabeo de la sección.

Planteados los desplazamientos de los puntos de la barra prismática, es posible obtener las expresiones de las deformaciones y posteriormente, empleando la ley generalizada de Hooke, tener información acerca de los esfuerzos presentes en el elemento, así:

$$\tau_{zx} = G\gamma_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \tag{4}$$

$$\tau_{yz} = G\gamma_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) = G\theta\left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \tag{5}$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \tag{6}$$

Es de esperarse que las anteriores expresiones cumplan las condiciones de equilibrio, a saber:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \tag{7}$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \tag{8}$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z = 0 \tag{9}$$

siendo X, Y y Z fuerzas volumétricas; se concluye que la función de alabeo ψ debe satisfacer:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \tag{10}$$

Antes de dar solución a esta ecuación diferencial, se necesita revisar las condiciones de contorno, que en términos generales pueden plantearse como:

$$\bar{X} = l\sigma_x + m\tau_{xy} + n\tau_{zx} \tag{11}$$

$$\bar{Y} = m\sigma_y + n\tau_{zx} + l\tau_{xy} \tag{12}$$

$$\bar{Z} = n\sigma_z + l\tau_{zx} + m\tau_{yz} \tag{13}$$

donde: l, m, n son los cosenos directores de la normal a la superficie y \bar{X}, \bar{Y} y \bar{Z} son fuerzas de superficie.

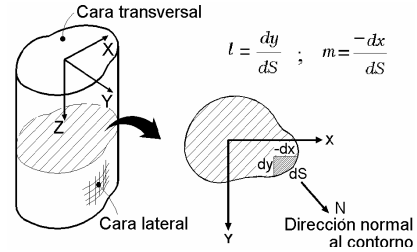


Figura 2. Definición de las condiciones de contorno.

Analizando las caras laterales de la barra (ver Figura 2) se encuentra que $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = n = 0$, y las ecuaciones (11), (12) y (13) se reducen a:

$$l\tau_{zx} + m\tau_{yz} = 0 \tag{14}$$

Si ahora se emplean las definiciones (4) y (5), junto con la Figura 2, la expresión (14) se puede escribir así:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - y\right) \frac{dy}{ds} - \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} + x\right) \frac{dx}{ds} = 0 \tag{15}$$

En resumen, la solución del problema de torsión se limita a encontrar una función ψ que satisfaga la ecuación (10) y que cumpla la condición de borde dada por (15).

Frecuentemente se enfoca la solución del problema a la determinación de una función de tensiones (no de desplazamientos); mirado desde este punto de vista la ecuación diferencial que rige el fenómeno cambia ligeramente. Retomando las ecuaciones de equilibrio y la expresión (6) se llega a:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{16}$$

Esta ecuación se puede emplear para definir una función de tensión ϕ de forma que:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \tag{17} \quad ; \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \tag{18}$$

Por lo que la ecuación diferencial de la torsión puede quedar expresada en términos de la función de tensiones así:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{19}$$

y la condición de contorno como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0 \tag{20}$$

Es decir, una condición de la función de tensión solución (ϕ) es que sea constante a lo largo del contorno de la sección de la barra, sin embargo (20) no limita el valor de la constante, por lo que comúnmente se le da a esta constante el valor de cero, y la función de tensiones debe satisfacer (19) sobre la sección transversal y anularse en el contorno.

Revisando las caras transversales de la barra (ver Figura 2), se concluye que $\bar{X} \neq 0$, $\bar{Y} \neq 0$, $\bar{Z} = 0$, $n = \pm 1$ y $l = m = 0$, entonces las ecuaciones generales de borde se traducen en:

$$\bar{X} = \pm \tau_{zx} \quad (21) \quad ; \quad \bar{Y} = \pm \tau_{yz} \quad (22)$$

Dado que la suma de los momentos producidos por las tensiones tangenciales (o por las fuerzas superficiales \bar{X} y \bar{Y}) debe igualar los pares torsores aplicados a la barra, este momento en función de ϕ se expresa como:

$$M_t = 2 \iint \phi dx dy \quad (23)$$

2.2 Analogía de la membrana

Considérese una membrana tensada uniformemente a lo largo de todo su contorno y sometida a una carga distribuida vertical, también uniforme, como se ve en la Figura 3. Siendo R la tracción por unidad de longitud y q la carga por unidad de área, se puede demostrar que la función de desplazamientos verticales en la membrana $w = f(x, y)$ debe satisfacer la ecuación diferencial:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{q}{R} \quad (24)$$

la función de deflexión debe ser nula en el contorno de la membrana, por tanto:

$$\frac{dw}{dS} = 0 \quad (25)$$

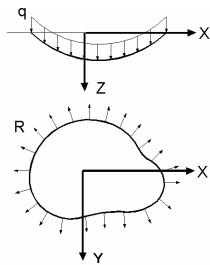


Figura 3. Membrana sometida a una carga superficial vertical (q) y otra de tensión distribuida sobre el contorno (R).

Si se comparan los dos fenómenos, analizados hasta ahora, a la luz de las ecuaciones diferenciales y las condiciones de contorno que los gobiernan, es claro que estos dos son análogos; lo que podría entenderse como que el análisis de deformación de una membrana aportará información en la determinación de los estados tensionales presentes en una barra con sección transversal definida por el contorno de la membrana y sometida a un par de torsión.

Al aplicar la condición (25) al interior de la membrana, se pueden definir diferentes contornos, cada uno contenido dentro de un plano paralelo al plano original de la membrana, dichos contornos son denominados curvas de nivel (ver Figura 4). Extrapolando este resultado al caso de la barra sometida a torsión, se ve que estas curvas de nivel coinciden con las curvas para las cuales se cumple la condición (20):

$$\frac{d\phi}{dS} = \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dS} + \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dS} = \tau_{zx} \frac{dy}{dS} - \tau_{yz} \frac{dx}{dS} = 0 \quad (26)$$

Esta expresión implica que la tensión resultante es tangente al contorno S (ver Figura 4); adicionalmente se puede decir la magnitud de este esfuerzo esta dada por:

$$\tau = -\frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dN} - \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dN} = -\frac{d\phi}{dN} \quad (27)$$

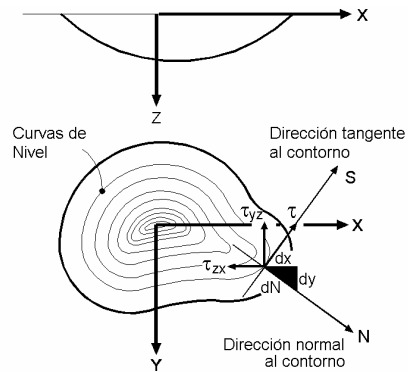


Figura 4. Relación entre las curvas de nivel en la membrana deformada y la dirección de los esfuerzos tangenciales en la barra sometida a torsión.

El esfuerzo cortante τ se obtiene entonces derivando la función de tensiones ϕ en la dirección normal a la curva de nivel, esta dirección llevada a la geometría tridimensional de la membrana deformada, indica la dirección en la que se presenta la máxima pendiente en el punto evaluado.

Frecuentemente en la determinación de datos cuantitativos del estado tensional, es adecuado eliminar la influencia de la “presión”¹ q y la tensión R que se aplica sobre la membrana. Una forma de tratar este problema es analizar simultáneamente una membrana circular, caso para el cual el problema de la torsión está totalmente definido, junto con una membrana de un contorno cualquiera (sección transversal a estudiar) con iguales condiciones de tensión y “presión”^[2], de esta forma asumiendo que las soluciones a las ecuaciones diferenciales (19) y (24) tienen la forma (28) y (29), respectivamente, se pueden plantear diferentes relaciones.

$$\phi = 2G\theta f(x, y) \quad (28) \quad w = \frac{q}{R} g(x, y) \quad (29)$$

Si las variables con superíndices ^o se refieren a las relacionadas con el contorno circular, a partir de (28) y (29) se puede decir:

$$\frac{2G\theta f(x, y)}{2G\theta f^o(x, y)} = \frac{\frac{q}{R} g(x, y)}{\frac{q}{R} g^o(x, y)} \quad (30)$$

expresión que claramente resulta independiente de G, θ , q y S; así mismo resulta útil escribir:

¹ Se quiere emplear el término “presión”, aunque en realidad la carga q debe ser vertical y no perpendicular a la superficie de la membrana en cualquier etapa de deformación.

$$\frac{\tau}{\tau^\circ} = \frac{\alpha}{\alpha^\circ} \quad (31) \quad ; \quad \frac{\tau}{\alpha} = \frac{2M_t x}{\pi c^4 \alpha^\circ} \quad (32)$$

donde:

τ : valor del esfuerzo cortante en un punto P de la sección no circular en la barra sometida a torsión.

α : máxima pendiente en el punto P sobre la membrana deformada de contorno no circular.

τ° : valor del esfuerzo cortante en un punto Q de la sección circular sometida a torsión.

α° : máxima pendiente en el punto Q sobre la membrana deformada de contorno circular.

c : radio de la sección circular.

x : distancia radial del punto Q al eje de la sección circular.

M_t : Momento torsor aplicado a la sección circular.

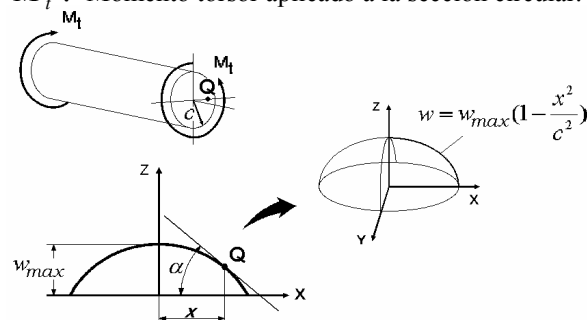


Figura 5. Membrana circular deformada.

Si se evalúa (32) en un punto P cualquiera, el valor de τ y α son únicos y constantes, como también lo debe ser la magnitud del momento torsor (M_t) y el radio c , se puede concluir que para la membrana deformada de contorno circular:

$$\frac{x}{\alpha^\circ} = Constante \quad (33)$$

Manipulando la expresión (33) y observando que para el contorno circular, $w = w_{max}$ en $x = 0$ y que $w = 0$ en $x = c$, es posible obtener la forma del perfil de la membrana circular deformada.

$$\frac{x}{Constante} = \frac{dw}{dx} \quad (34)$$

$$w = w_{max} \left(1 - \frac{x^2}{c^2}\right) \quad (35)$$

Es posible plantear expresiones adicionales que permitirán el cálculo de las tensiones tangenciales en secciones no circulares:

$$\tau = -\frac{M_t}{2V} \frac{\partial w}{\partial N} \quad (36)$$

sin embargo, el cálculo de la derivada de la función w en la dirección normal a la curva de nivel resulta más complejo que trabajar con las componentes de la siguiente forma:

$$\tau_{zx} = -\frac{M_t}{2V} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (37) \quad ; \quad \tau_{zy} = -\frac{M_t}{2V} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (38)$$

3. MODELO EXPERIMENTAL EMPLEADO

El dispositivo empleado consta de un par de anillos concéntricos entre los cuales se sujeta la membrana empleada (lámina de látex con espesor medio de 0.31 mm), posteriormente, esté se monta éste sobre una base metálica hasta lograr una deformación en la membrana; la uniformidad de dicha deformación se controla de dos formas:

- sobre la membrana de látex se trazan cuadrículas, las cuales sirven de referencia; al momento de montarla sobre los anillos, los trazos deben guardar la proporción (aunque el montaje en los anillos no debe generar una deformación considerable) y las líneas deben conservar la ortogonalidad.
- desplazando verticalmente los anillos de montaje hasta una profundidad establecida.

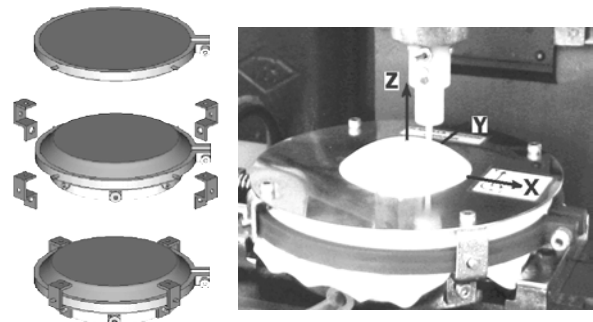


Figura 6. Dispositivo utilizado para el medir la deformación de la membrana

Tensada la membrana, se ubica y asegura sobre la cara superior de la base metálica una plantilla que tiene perforado el contorno que se desea estudiar. La base metálica se ubica sobre la mesa posicionadora de una fresadora CNC (DENFORD STARMILL PC), la cual permite ubicar el origen del sistema coordinado y capturar las coordenadas de cualquier punto sobre la membrana. En el husillo de la fresa se acopló un palpador, el cual se encargara de hacer contacto con la membrana; sin embargo, para hacer más simple la tarea de reconocimiento de dicho contacto, se diseño y construyó un dispositivo indicador, este sensor consta de un circuito normalmente abierto, que es cerrado cuando la punta del palpador hace contacto con la membrana, con lo cual se enciende un led de color rojo que da aviso del evento. La sensibilidad del dispositivo, entendida como el desplazamiento permisible de la punta para cerrar el circuito, se gradúa acercando o alejando los contactos eléctricos mediante una rosca fina.

Finalmente, se aplica aire comprimido a una presión regulable por medio de dos válvulas, la primera (del sistema de refrigeración de la fresadora) regula la presión hasta 10 psi, la segunda es una válvula empleada para la regulación de la presión en las instalaciones de gas domiciliario, y es la encargada de fijar la presión entre 20 y 40 mmHg. La magnitud de la presión aplicada a la membrana es medida usando un manómetro con de capacidad máxima de 300 mmHg y resolución de 2 mmHg.

4. RESULTADOS OBTENIDOS Y PROCESAMIENTO DE DATOS

El primer paso para el empleo de la analogía es determinar la geometría de la membrana deformada, lo cual se realiza tomando las coordenadas tridimensionales de un conjunto apropiado y suficiente de puntos sobre la misma. Si embargo, antes de esto se hizo necesario determinar la magnitud de la presión a la que debía estar sometida la membrana, para asegurar que el comportamiento del látex se acerque a un comportamiento lineal elástico, caso para el cual fueron deducidas las expresiones (24) y (25). Empleando la plantilla con el contorno circular, se aplicaron diferentes presiones a la membrana y se midieron los valores de los desplazamientos de la membrana en puntos ubicados sobre el eje x del sistema, así se pudo trazar el perfil de la membrana; estos perfiles se compararon con la función descrita por la ecuación (35), obteniéndose las siguientes gráficas:

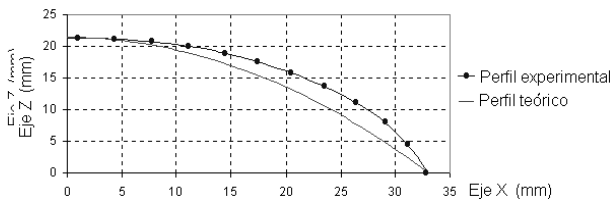


Figura 7. Perfil de deformación para membrana de contorno circular, sometida a una presión de 40 mmHg.

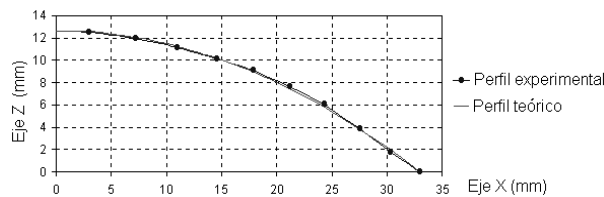


Figura 8. Perfil de deformación para membrana de contorno circular, sometida a una presión de 20 mmHg.

Como puede observarse con presiones superiores a 20 mmHg el comportamiento del látex no corresponde al de un material elástico lineal y la membrana no se deforma según las ecuaciones deducidas, es de esperarse que corresponda a un comportamiento hiperelástico. En conclusión este valor de presión (20 mmHg) fue aceptado como presión de trabajo para todas las prácticas realizadas.

Una vez leídos los valores de las coordenadas de la membrana deformada, para cada caso se construyó una matriz de deflexiones (los espacios de la matriz correspondientes a datos que estaban por fuera del contorno de la membrana se llenaron con ceros) y mediante Matlab se realizó una interpolación de superficie para aumentar el número de datos al interior del contorno. Así mismo se construyó una malla tridimensional con los datos y se trazaron las curvas de nivel. Posteriormente y empleando la matriz ampliada se realizó una integración numérica, empleando la regla de Simpson para dominio bidimensional, y se pudo establecer el volumen alojado bajo la membrana deformada.

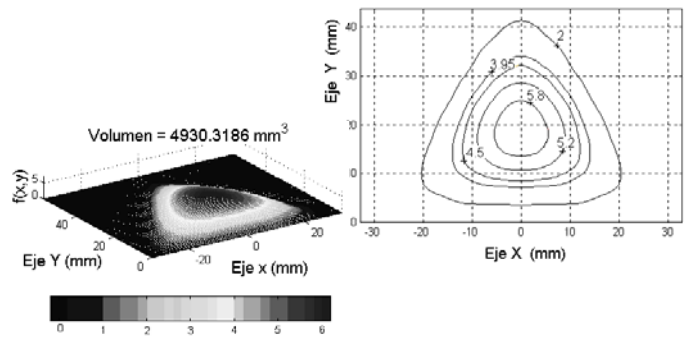


Figura 9. Curvas de nivel trazadas para el caso de una membrana con perfil de triángulo equilátero de 66 mm de lado.

Para emplear las expresiones (37) y (38), se hizo necesario calcular las derivadas de la función W en las direcciones x y y . Ubicados en el punto en estudio (punto Q de la Figura 10), se tomaron datos sobre la fila o la columna de la matriz, según fuera el caso, construyendo así perfiles como los mostrados en la Figura 11; conocidas estas coordenadas, se ajustaron a una función (para lo cual se empleó el software CurveExpert 1.3) y se calculó la derivada de forma analítica; sin embargo, empleando el método de las diferencias finitas se hubiera podido aproximar a la derivada directamente a partir de las coordenadas.

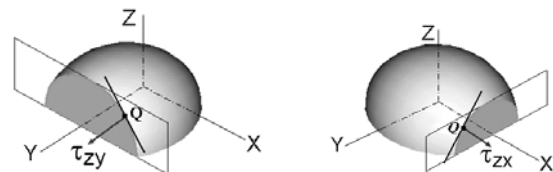


Figura 10. Ejemplos de los perfiles encontrados para el cálculo de las derivadas parciales de la función W con respecto a x y y respectivamente.

Las siguientes gráficas ilustran los resultados obtenidos experimentalmente para los diferentes contornos y en cada caso se compara con el modelo resultante de la solución analítica de la ecuación diferencial de la torsión^[1].

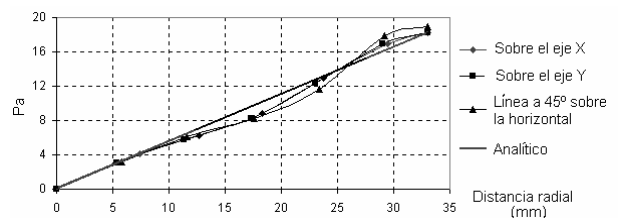


Figura 11. Perfil de esfuerzo cortante trazado sobre diferentes direcciones radiales de una barra de contorno circular, de 33 mm de radio, sometida a un par torsor de 1 N.m.

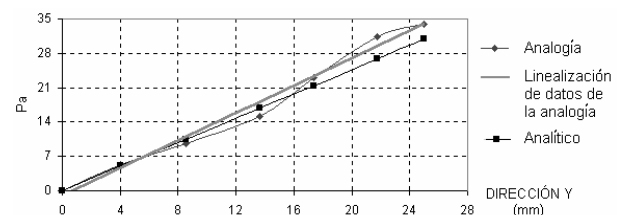


Figura 12. Perfil de esfuerzo cortante trazado sobre el semieje mayor de la sección elíptica ($\frac{x^2}{25^2} + \frac{y^2}{25^2} = 1$) de una barra sometida a un par torsor de 1 N.m.

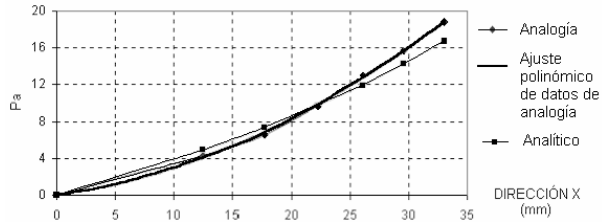


Figura 13. Perfil de esfuerzo cortante trazado sobre el semieje principal de una sección cuadrada, de 66 mm de lado, de una barra sometida a un par torsor de 1 N.m .

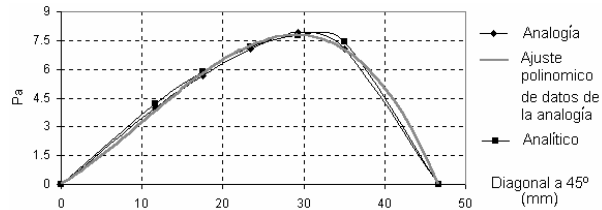


Figura 14. Perfil de esfuerzo cortante trazado sobre la diagonal principal de una sección cuadrada, de 66 mm de lado, de una barra sometida a un par torsor de 1 N.m .

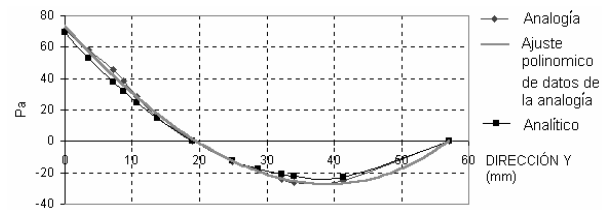


Figura 15. Perfil de esfuerzo cortante trazado sobre la altura de una sección triangular equilátera, de 66 mm de lado, de una barra sometida a un par torsor de 1 N.m .

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Los gráficos de las curvas de nivel, además de permitir visualizar las direcciones de las tensiones tangenciales sobre la sección transversal, permiten ubicar los puntos donde estos esfuerzos son mayores. Se aprecia que en las zonas donde las líneas de nivel se encuentran más juntas se pueden ubicar las mayores pendientes y por tanto las magnitudes más grandes del esfuerzo.

Aunque los procedimientos matemáticos incorporados no son complejos, sería posible reemplazarlos por rutinas de modelamiento gráfico realizadas en algún software de CAD, donde un sólido se construya a partir de la malla generada con las coordenadas ubicadas por el dispositivo; el corte de este sólido con planos horizontales permitiría determinar las curvas de nivel, así mismo el corte con planos verticales generaría los perfiles requeridos para el cálculo de las tensiones.

Haciendo algunas pequeñas modificaciones a la membrana utilizada se podría estudiar el caso de la torsión para barras huecas con secciones transversales cerradas.

Los errores alcanzados en los valores de las tensiones, para las diferentes secciones analizadas, no superan en la mayoría de los casos el 10%; las fuentes de error están relacionadas con:

- La heterogeneidad en el espesor y propiedades elásticas sobre toda la superficie de la membrana.
- Tensión no uniforme aplicada sobre el contorno de la membrana, pues los mecanismos empleados para el control

de dicha tensión fueron de tipo cualitativo y no cuantitativo.

- Las componentes horizontales de presión no incluidas en el análisis con el que se obtuvo la ecuación diferencial de la membrana y que generan deformación adicional en la misma.
- El espesor relativamente grande de la membrana utilizada (0.3 mm). El empleo de una membrana de látex facilita la toma de datos y la medición de las presiones aplicadas, la utilización de membranas más delgadas, por ejemplo el empleo de películas de jabón^[1], genera problemas al momento del contacto de estas con el sensor, además, se requieren sistemas más exactos para la aplicación y medición de las pequeñas presiones manejadas.
- La falta de exactitud y precisión en la medida de los desplazamientos de la membrana. Aunque la mesa posicionadora permite ubicar los puntos con una resolución de 0.005 mm, el elemento empleado como sensor no maneja esta exactitud, adicionalmente se encontraron problemas para garantizar la repetitividad de las mediciones realizadas.
- Los métodos de aproximación numérica empleados en el procesamiento de los datos: interpolación en la matriz de deflexiones, integración con la regla de Simpson y el ajuste de los perfiles que conforman la membrana deformada para el cálculo de las derivadas.
- Problemas dimensionales y geométricos de los contornos perforados en las plantillas empleadas para la práctica, además de los debidos a la ubicación del sistema coordinado de la plantilla respecto al sistema coordinado de la mesa posicionadora (alineación de ejes y coincidencia de orígenes).

6. BIBLIOGRAFÍA

- [1] TIMOSHENKO, Stephen. Teoría de la elasticidad. Ediciones URMO, segunda edición. Bilbao, 1968. Pág. 294-336.
- [2] FEODOSIEV, V.I. Resistencia de Materiales. Editorial MIR, tercera edición. Moscú, 1985.
- [3] DEN HARTOG, J.P. Advanced Strenght of Materials. Editorial DOVER. 1987.
- [4] HIBBELER, R.C. Mecánica de Materiales. Editorial Prentice Hall, tercera edición. México, 1997.
- [5] BEER, Ferdinand. Mecánica de Materiales. Editorial Mc. Graw Hill, tercera edición, 2001.
- [6] UGURAL, Ansel C. Advanced Strenght and Applied Elasticity. Editorial Prentice Hall, tercera edición. 1994.
- [7] DOGHRI, Issam. Mechanics of Deformable Solids. Editorial Springer Verlag, primera edición. 2000.
- [8] STIOPIN, P.A. Resistencia de Materiales. Editorial MIR, cuarta edición. Moscú, 1985.
- [9] MOTT, Robert L. Resistencia de Materiales Aplicada. Editorial Prentice Hall, tercera edición. México, 1996.