

# Identificación robusta aplicada a un sistema de control de un puente grúa

Robust identification applied to gantry crane control system.

Carlos D. Zuluaga<sup>1\*</sup>, Eduardo Giraldo<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Joven Investigador, Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia  
cardazu@utp.edu.co

<sup>2</sup>Profesor Asistente, Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia  
egiraldos@utp.edu.co

**Resumen**— En este estudio se presenta una metodología para realizar la identificación robusta de un sistema de control de un puente grúa. El modelado robusto fue realizado por medio de tres filtros de Kalman secuenciales, en donde dos de ellos corresponden al filtro de Kalman dual para estimar los parámetros y estados del sistema, y el tercer filtro es el filtro de Kalman de estadística robusta. Los resultados obtenidos muestran que el filtro de Kalman de estadística robusta presenta respuestas más suaves para la posición y la velocidad del puente grúa, en comparación con estrategias de identificación estándar.

**Palabras clave**— Control por realimentación de estado, Filtro de Kalman, Identificación de sistemas, Puente grúa.

**Abstract**— This study presents a methodology to perform the robust identification of a gantry crane control system. The robust modeling was performed by three sequential Kalman filters, where two of them are the dual Kalman filter for estimating the parameter and state system, and third filter is the robust statistic Kalman filter. The obtained results show that the robust statistic Kalman filter presents responses smoother for the position and the velocity of the gantry crane, compared with the standard identification strategies.

**Key Word** —State feedback control, Kalman filter, System identification, Gantry crane.

## I. INTRODUCCIÓN

La identificación de sistemas es un tema que aún sigue en investigación en diferentes áreas de la ingeniería. Los enfoques de identificación se pueden resumir en tres diferentes grupos: los que se basan en el error de predicción, los que usan la teoría de correlación y los que utilizan subespacios para estimar el modelo en espacio de estados [1]. Todas estas perspectivas son diferentes, pero usan la misma información, es decir, los mismos datos disponibles. El primer enfoque, el cual usa el error de predicción, tiene como ventaja con respecto a los otros dos, que se puede aplicar tanto en estructuras lineales como no

lineales [1]. El problema base de la ingeniería de control es tratar de determinar una acción en la entrada de tal forma que la salida tenga una respuesta deseada. Esto se logra a través de un controlador, el cual asume conocer la dinámica del sistema a ser controlado. Esta suposición hace que los estudios de identificación de sistemas tengan una importancia considerable ya que si no se cuenta con una etapa de estimación conveniente, el problema básico del control no se puede lograr de manera autónoma.

Todos los enfoques que realizan la identificación, utilizan un elemento en común, “datos”, es decir este tema de investigación obtiene respuestas adecuadas si los datos son confiables y apropiados, en otros términos, no existen características singulares presentes en las observaciones, por ejemplo datos espurios. La detección de estos datos ha sido extensamente explorada en varias ramas de la ingeniería, entregando técnicas especiales para abordar este tema.

Dentro de las técnicas de identificación se encuentra el filtro de Kalman estándar (sKF), el cual es un algoritmo eficiente para estimar los estados de un modelo de espacio de estados de un sistema dinámico lineal. Sin embargo y como se ha reportado en la literatura, el rendimiento de esta técnica se ve deteriorado por estos datos anómalos [2]. En trabajos previos han tratado de realizar un sKF que sea robusto ante datos anómalos, a través de la sensibilidad del criterio del error cuadrático medio a estos datos [3]. Una clase de estudios consideran distribuciones no Gaussianas para las variables aleatorias [4], ya que las distribuciones Gaussianas multivariadas son susceptibles a datos espurios. Por ejemplo [5] usa una distribución *Student-t*. Sin embargo, la estimación resultante de los parámetros puede ser compleja para sistemas con perturbaciones transitorias. Otras metodologías han intentado modelar el ruido del estado y medida con distribuciones no Gaussianas [6]. Desafortunadamente estos estudios son difíciles de implementar y no proporcionan una buena estimación del vector de estado. Además estos estudios solo se han aplicados a series temporales, modelos de espacio de estados o autorregresivos de primer orden, pero no a sistemas de un orden mayor como lo es el caso

del puente grúa, el cual puede ser modelado por un modelo de espacio de estado de orden cuatro, una entrada y dos salidas [7].

Este estudio presenta la aplicación de tres filtros secuenciales, uno de ellos corresponde al filtro de Kalman de estadística robusta (rsKF) propuesto en [8], los otros dos filtros componen el filtro de Kalman dual (DKF) (ver capítulo 5 de [9]). El DKF son dos filtros de Kalman que operan secuencialmente para realizar la estimación de los estados y las matrices de un modelo de espacio de estado de un sistema dinámico lineal. Es decir, el enfoque secuencial usa cada dato individual tan pronto como esté disponible, y así se puede actualizar tanto la estimación del modelo como la señal que se quiere determinar. Esta característica hace los algoritmos sean atractivos para aplicaciones *online* [9]. Por otra parte, el rsKF es una variación del filtro de Kalman, el cual desarrolla una ponderación de los datos de entrada basada en la estimación por máxima verosimilitud argumentada en la teoría de estimación-M [10]. Esta variación usa el enfoque de mínimos cuadrados calculando ponderaciones que dependen de funciones empleadas en estadística robusta.

Los resultados experimentales obtenidos por las técnicas mencionadas anteriormente fueron aplicadas para un ejemplo de prueba que se realizó a manera de simulación, los datos sintéticos fueron generados manualmente con el fin de comprobar la eficiencia del método propuesto; por otra parte, se aplica esta metodología para el control de un puente grúa.

El artículo se encuentra organizado de la siguiente manera, en la sección II se describe el modelado de sistemas dinámicos incluyendo los ruidos en el proceso y en la medida. En la sección III se describe el modelo matemático para el sistema puente grúa. En la sección IV se describe el algoritmo de control de regulación por realimentación de estado. En la sección V se describen los algoritmos de estimación clásicos y robustos a datos espurios y en la sección VI se describen métodos de evaluación para este tipo de datos. Finalmente en la sección VII se presenta la evaluación de los esquemas de identificación para el control del sistema puente grúa en presencia de datos espurios.

## II. SISTEMAS DINÁMICOS

Hasta ahora se ha hablado de sistemas y sus variables, pero no se han definido, por lo tanto, se dará una explicación breve de este término y sus variables. Un sistema es un objeto en el cual interactúan diferentes tipos de variables con el fin de obtener una señal observable, la cual se llama *salida*. Es común encontrar en los sistemas, elementos que de activación los cuales reciben el nombre de *entradas*. Por lo tanto la salida es una actividad conjunta del sistema como producto de una activación. Además estos sistemas

pueden ser afectados por entradas desconocidas alterando el comportamiento deseado de la salida; a estas variables se les llaman *perturbaciones*. La Fig. 1 muestra un diagrama en donde se observa un sistema dinámico y sus variables.

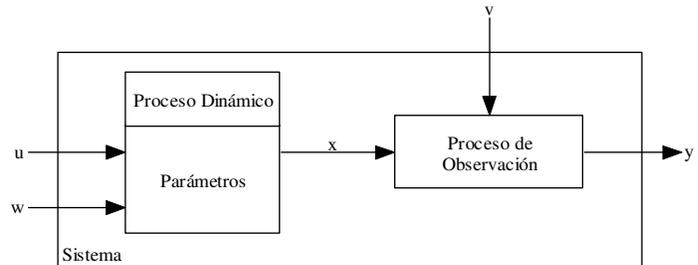


Figura 1. Elementos de un sistema dinámico.

En la Tabla 1 se establecen las variables que hacen parte del sistema dinámico, con sus respectivas dimensiones. Estos sistemas son a menudo estudiados como un concepto general, pero tienen un papel importante en las investigaciones modernas, como las encontradas en: procesos físicos, químicos, económicos, etc.; por lo tanto, un sistema dinámico puede ser visto como la evolución en el tiempo de algún sistema físico, por ejemplo, el movimiento de algunos planetas en consecuencia de sus fuerzas gravitacionales [11]. Esta evolución está implícitamente ligada a una relación con los estados del sistema, dicha relación puede ser una ecuación diferencial, en diferencias u otra escala de tiempo. Para el presente estudio, se utilizarán sistemas dinámicos descritos por una ecuación en diferencias o comúnmente llamados sistemas dinámicos discretos.

Variable	Familia de variables	Dimensión
<b>y</b>	Salidas	$q \times 1$
<b>u</b>	Entradas	$p \times 1$
<b>x</b>	Estados	$n \times 1$
<b>w</b>	Ruidos en el proceso	$n \times 1$
<b>v</b>	Ruidos en la medida	$q \times 1$

Tabla 1: Variables de un sistema dinámico.

Los sistemas dinámicos discretos pueden ser representados a través de un modelo matemático en espacio de estados [9]. Una formulación en espacio de estados de un sistema dinámico es mostrada por la Ec. (1),

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{w}_k \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k + \mathbf{v}_k \end{aligned} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de transición de estados y es donde está consignada toda la dinámica del sistema,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de relación de entradas y estados,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{q \times n}$  es la matriz de salida,  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q \times p}$  es la matriz que relaciona las

entradas con las salidas. Se asume que  $\mathbf{w}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  son ruidos gaussianos de media cero que no están correlacionados, es decir  $\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q})$ ,  $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R})$ , donde  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{q \times q}$ .  $\mathbf{Q}$  y  $\mathbf{R}$  son matrices de covarianza diagonales para el ruido de estado y observación, respectivamente.

La Ec. (1) representa el modelo matemático que debe ser estimado, es decir, las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  deben ser calculadas teniendo solamente disponibles las observaciones en la salida y las lecturas de los valores de la entrada, a esto se le puede adicionar la predicción de los estados. Por lo tanto, hasta ahora se tienen dos problemas, el primero es la estimación de todas las matrices anteriores y el segundo es obtener un estimado de los estados que minimice un funcional de costo.

### III. PUENTE GRÚA

Como un ejemplo de un sistema dinámico y en el contexto de los problemas estándares en área de sistemas control, el puente grúa es una de las aplicaciones en donde se han invertido muchos esfuerzos por tratar de establecer metodologías adecuadas para realizar esquemas de control, reduciendo las señales de control y mejorando la calidad de la señal o respuesta del sistema. En la Fig. 2 se ilustra el puente grúa y las variables que intervienen en el sistema,

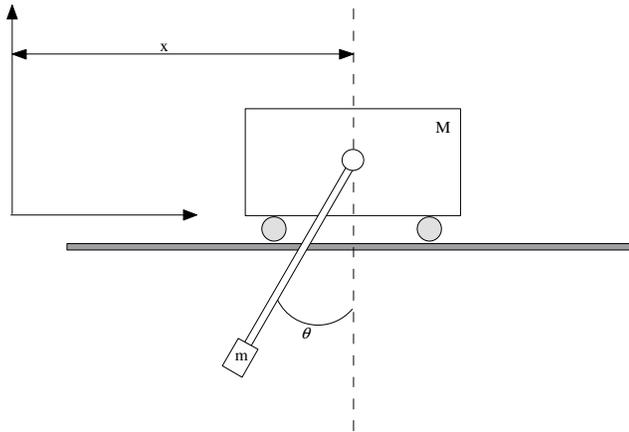


Figura 2. Diagrama del puente grúa.

El modelo del puente grúa puede ser establecido por un conjunto de ecuaciones diferenciales, obtenidas aplicando las leyes físicas que rigen los diferentes componentes. Por medio de la segunda ley de Newton y un diagrama de cuerpo libre se puede llegar a las siguientes ecuaciones diferenciales,

$$U - f_c \dot{x} = (M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 \sin \theta) \quad (2)$$

$$J\ddot{\theta} + f_p \dot{\theta} - ml \cos \theta (\ddot{x} - l\ddot{\theta} \cos \theta + \dot{\theta}^2 l \sin \theta) + l \sin \theta [mg + ml(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta)] = 0 \quad (3)$$

donde  $J$  es el momento de inercia,  $f_p$  es el coeficiente de fricción de rotación,  $M$  es la masa del carro,  $m$  es la masa

de la carga,  $l$  es la distancia del eje de rotación al centro de masa,  $U$  es la fuerza de control,  $f_c$  es el coeficiente de fricción del carro,  $\theta$  es el ángulo de péndulo,  $x$  es la posición del carro y  $g$  es la gravedad. Para efectos de controlar el ángulo y la posición del carro, el sistema se puede linealizar alrededor de un punto de operación, es decir, el péndulo no oscilará para ángulos mayores a  $15^\circ$ , de lo anterior se tiene,  $\sin \theta \approx \theta$  y  $\cos \theta \approx 1$ . Realizando estas hipótesis, se llega al siguiente sistema linealizado [7],

$$\ddot{x} = \frac{1}{M+m}U - \frac{f_c}{M+m}\dot{x} + \frac{ml}{M+m}\ddot{\theta} \quad (4)$$

$$\ddot{\theta} = \frac{ml}{J+ml^2}\ddot{x} - \frac{mlg}{J+ml^2}\theta - \frac{f_p}{J+ml^2}\dot{\theta} \quad (5)$$

De las Ecs. (4) y (5) se puede llegar a un modelo de espacio de estados en donde los estados  $\mathbf{x}$  son la posición del carro, el ángulo del péndulo, la velocidad del carro y la velocidad angular, es decir,  $\mathbf{x} = [x \ \theta \ \dot{x} \ \dot{\theta}]^T$ .

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & k_1 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_4 & k_5 & k_6 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_7 \\ k_8 \end{bmatrix} U \quad (6)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} U \quad (7)$$

Donde las constantes  $k_1, \dots, k_8$  dependen de cada parámetro de las Ecs. (4) y (5), y en el Anexo A se muestran los parámetros usados para modelar el puente grúa.

### IV. REGULACIÓN POR REALIMENTACIÓN DE VARIABLES DE ESTADO

En esta sección se presenta el problema de regulación por realimentación de variables de estado. Considere un sistema de espacio de estados descrito por la Ec. (1), tal que sea controlable y alcanzable, dos requerimientos introducidos por R. E. Kalman [12]. La controlabilidad es definida como: la posibilidad de encontrar una secuencia de control tal que el origen pueda ser alcanzado desde cualquier estado inicial en un tiempo finito [13], y la alcanzabilidad puede ser definida como: la posibilidad de encontrar una secuencia de control tal que un estado arbitrario pueda ser alcanzado desde cualquier estado inicial en un tiempo finito [13]. Por lo tanto se considera que la matriz  $\mathbf{A}$  del modelo expresado por la Ec. (1) tiene un polinomio característico dado por

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n \quad (8)$$

Si el sistema es alcanzable, puede ser transformado a una forma canónica alcanzable mediante el cambio en variables de estado a través de la transformación  $\mathbf{z} = \mathbf{T}\mathbf{x}$ , donde la ecuación de estado mostrado en la Ec. (1) es transformada como [13]

$$\mathbf{z}_k = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{z}_{k-1} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}_k \quad (9)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{TAT}^{-1}, \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B} \quad (10)$$

Los coeficientes del polinomio característico que determina los polos en lazo cerrado aparecen explícitamente en esta representación. También es fácil ver como se modifica el polinomio característico para la realimentación de variables de estado [13]

$$\mathbf{u}_k = -\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{z}_k \quad (11)$$

$$= [(p_1 - a_1) \quad (p_2 - a_2) \quad \dots \quad (p_n - a_n)]\mathbf{z}_k$$

con las Ecs. (10) y (11) en (9) se obtiene el sistema en lazo cerrado, cuyo polinomio característico es [13],

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A} + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{L}}| = z^n + p_1z^{n-1} + \dots + p_n \quad (12)$$

Para encontrar la solución al problema de regulación, simplemente se debe expresar en las coordenadas originales así,

$$\mathbf{u}_k = -\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{z}_k = -\tilde{\mathbf{L}}\mathbf{T}\mathbf{x}_k = \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{x}_k \quad (13)$$

en la Ec. (13) solo queda por calcular la matriz de transformación  $\mathbf{T}$ . Una manera de determinar  $\mathbf{T}$  es basándose en la propiedad de matrices alcanzables [13]. Sea  $\mathbf{W}_C$  la matriz alcanzable del sistema expresado por (1); es decir

$$\mathbf{W}_C = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \dots \quad \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] \quad (14)$$

y sea  $\tilde{\mathbf{W}}_C$  la matriz alcanzable del sistema (9). Las matrices están relacionadas así:  $\tilde{\mathbf{W}}_C = \mathbf{T}\mathbf{W}_C$  [13]. Por lo tanto,

$$\mathbf{T} = \tilde{\mathbf{W}}_C\mathbf{W}_C^{-1} \quad (14)$$

Resumiendo la solución al problema de diseño es dada por una realimentación lineal del estado con la ganancia:

$$\mathbf{L} = [(p_1 - a_1) \quad \dots \quad (p_n - a_n)]\tilde{\mathbf{W}}_C\mathbf{W}_C^{-1} \quad (15)$$

El cálculo de esta ganancia  $\mathbf{L}$  hace que el error debido a perturbaciones se reduzca lo suficientemente rápido hasta alcanzar el punto de operación.

## V. FILTRO DE KALMAN

Como se ha mencionado, los estados son una de las variables más importantes de un sistema dinámico, ya que con ellos se puede representar el comportamiento del sistema. Sin embargo, en ambientes prácticos no se tiene acceso a los estados como se muestra en la Fig. 2, por esta razón, se debe tener en cuenta la estimación de estado dentro del proceso de estimación de parámetros. Una de las

formas para realizar esta etapa es a través del filtro de Kalman, donde el objetivo formal desde el punto de vista probabilístico se puede ver como, obtener el mejor estimado actual que sea el más probable dado el modelo y las observaciones  $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$ , lo anterior se puede ver en la siguiente expresión [14],

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmax}\{p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_1^k, \boldsymbol{\theta})\} \quad (16)$$

donde  $\boldsymbol{\theta}$  son los parámetros de la función de distribución. La densidad de probabilidad conjunta mostrada por (16), a ser maximizada puede ser rescrita como,

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_1^k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^k|\boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^k|\boldsymbol{\theta})} \quad (17)$$

$$= \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^N|\boldsymbol{\theta})}$$

De (17), se puede notar que  $p(\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})$  y  $p(\mathbf{y}_1^N|\boldsymbol{\theta})$  son funcionales independientes de  $\mathbf{x}_k$ , por lo tanto, el estimado puede ser obtenido al maximizar solamente el término  $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})$ . Este puede ser expandido aplicando la regla del producto de la teoría fundamental de probabilidad, así

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k|\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) \quad (18)$$

como  $\boldsymbol{\omega}_k$  y  $\mathbf{v}_k$  son ruidos gaussianos de media cero, las expresiones mostradas en (18), se pueden evaluar como

$$p(\mathbf{y}_k|\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k|\mathbf{C}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}) \quad (19)$$

$$p(\mathbf{x}_k|\mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k|\mathbf{x}_k^-, \mathbf{P}_k^-) \quad (20)$$

donde  $\mathbf{x}_k^-$  y  $\mathbf{P}_k^-$ , son la media y la matriz de covarianza de  $\mathbf{x}_k$  dado las observaciones  $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$ . Si se toma el logaritmo negativo de (19) y (20) en (18), se puede llegar al siguiente funcional [14],

$$J(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k) \quad (21)$$

$$+ \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-)^T(\mathbf{P}_k^-)^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-)$$

Por lo tanto el estimado  $\hat{\mathbf{x}}_k$  puede ser obtenido minimizando (21). De esta manera se toma la derivada del funcional con respecto a  $\mathbf{x}_k$  e igualando a cero y resolviendo se tiene

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k^-) \quad (22)$$

Para (13) se tiene que,

$$\mathbf{K}_k = [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{C}^T(\mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}]^{-1}\mathbf{C}^T(\mathbf{R})^{-1} \quad (23)$$

La expresión descrita por (23) se le denomina la ganancia de Kalman, se puede notar que el cálculo de esta ganancia necesita

de la inversión de una matriz de dimensión  $n \times n$ , lo cual resultaría tener un costo computacional alto cuando se tiene un vector de estado de dimensión considerable. Para ello, se utiliza el lema de inversión de una matriz [14], el cual permite redefinir  $\mathbf{K}_k$  de forma tal que se tenga una inversión que solo dependa de la dimensión del vector de observaciones. Aplicando lo dicho, se llega a (24)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \quad (24)$$

Un resumen de como se utiliza el sKF para la estimación de estado es mostrado como sigue,

### I. Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_0$ y $\mathbf{P}_0$

Para  $k = 1, 2, \dots$

### II. Propagación

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_k^- &= \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} \\ \mathbf{P}_k^- &= \mathbf{P}_{k-1} + \mathbf{Q} \end{aligned}$$

### III. Actualización

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1} \\ \hat{\mathbf{x}}_k &= \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \\ \mathbf{P}_k &= \mathbf{P}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \end{aligned}$$

## A. ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS BASADA EN EL FILTRO DE KALMAN.

Suponiendo que se tiene un modelo descrito por la Ec. (1), donde solo se tiene acceso a la señal de entrada  $\mathbf{u}_k$  y salida  $\mathbf{y}_k$ , adicionalmente se tiene información de los estados del sistema, con lo anterior planteado, se reescribe el sistema tomando una estructura matricial así [1]:

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{k+1} \\ \mathbf{y}_k \end{bmatrix}, \mathbf{\Theta}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k & \mathbf{B}_k \\ \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Phi}_k &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix}, \mathbf{V}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_k \\ \mathbf{v}_k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (25)$$

Frente lo plasmado en (25) el sistema mostrado en (1) puede ser descrito por (26),

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{\Theta}_k \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{V}_k \quad (26)$$

Para llevar a cabo la estimación de los parámetros  $\mathbf{\Theta}$  se necesita tener conocimiento de los estados, para ello se plantea un método de estimación dual mediante una forma secuencial. El enfoque secuencial usa cada dato individual, tan pronto como esté disponible, así se puede actualizar tanto la estimación del modelo como la señal que se quiere determinar. Esta característica hace estos algoritmos atractivos para aplicaciones en línea o inclusive fuera de línea [9]. Después de haber hecho este arreglo matricial, el modelo para estimar los parámetros se describe como,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Theta}_k &= \mathbf{\Theta}_{k-1} + \mathbf{r}_k \\ \mathbf{Y}_k &= \mathbf{\Theta}_k \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{V}_k \end{aligned} \quad (27)$$

Donde  $\mathbf{r}_k$  es el ruido en los parámetros, que para este estudio se asumirá ser Gaussiano, con media cero y matriz de covarianza diagonal  $\mathbf{Q}_\theta$ .

Como se ha mencionado en secciones anteriores el sKF sirve para obtener estimados de los estados de un modelo de espacio de estados de sistemas dinámicos lineales, estos estimados son óptimos siempre y cuando se asuman que los ruidos de las ecuaciones del proceso y medida sean Gaussianos. Otro elemento importante para realizar la inferencia de estados son los parámetros del sistema, es decir, también se esta asumiendo que se conocen las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$  del modelo de la Ec. (7). Sin embargo, en ambientes prácticos esta hipótesis no es válida, por lo tanto se presenta la aplicación del filtro de Kalman para estimar estos parámetros.

Si se parte del sistema planteado por la Ec. (19), se puede llegar al siguiente funcional,

$$\begin{aligned} J(\mathbf{\Theta}_k) &= \frac{1}{2} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{\Theta}_k \mathbf{\Phi}_k)^T (\mathbf{R}_\theta)^{-1} (\mathbf{Y}_k - \mathbf{\Theta}_k \mathbf{\Phi}_k) \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{\Theta}_k - \hat{\mathbf{\Theta}}_k^-)^T (\mathbf{\Sigma}_k^-)^{-1} (\mathbf{\Theta}_k - \hat{\mathbf{\Theta}}_k^-) \end{aligned} \quad (28)$$

donde  $\mathbf{R}_\theta$  es la matriz de covarianza diagonal constante del ruido en las observaciones y estados, y su valor puede ser  $\mathbf{R}_\theta = 0.5\mathbf{I}$ ;  $\mathbf{Q}_\theta$  es la matriz de covarianza diagonal constante del ruido en los parámetros;  $\hat{\mathbf{\Theta}}_k^-$  y  $\mathbf{\Sigma}_k^-$  son la media y la matriz de covarianza de los parámetros dado las observaciones y los estados. Por consiguiente, un resumen de como se puede realizar la estimación de parámetros aplicando el filtro de Kalman es mostrado como sigue,

### I. Inicializar $\hat{\mathbf{\Theta}}_0$ y $\mathbf{\Sigma}_0$

Para  $k = 1, 2, \dots$

### II. Propagación

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{\Theta}}_k^- &= \hat{\mathbf{\Theta}}_{k-1} \\ \mathbf{\Sigma}_k^- &= \mathbf{\Sigma}_{k-1} + \mathbf{Q}_\theta \end{aligned}$$

### III. Actualización

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{\Phi}_k (\mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{\Sigma}_k^- \mathbf{\Phi}_k + \mathbf{R}_\theta)^{-1} \\ \hat{\mathbf{\Theta}}_k &= \hat{\mathbf{\Theta}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{Y}_k - \mathbf{\Phi}_k^T \hat{\mathbf{\Theta}}_k^-) \\ \mathbf{\Sigma}_k &= \mathbf{\Sigma}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{\Phi}_k^T \mathbf{\Sigma}_k^- \end{aligned}$$

Como se pudo observar en este resumen, para estimar los parámetros se necesita el comportamiento de los estados, por lo tanto se empleó el filtro de Kalman Dual (DKF) en donde se utilizan dos filtros de Kalman secuenciales para estimar los parámetros y los estados dentro de un mismo enfoque.

**B. FILTRO DE KALMAN DE ESTADÍSTICA ROBUSTA-rsKF**

En aplicaciones prácticas el tratamiento de datos espurios puede ser modelado por el sistema mostrado en la Ec. (1), pero existe otra forma de realizar este procedimiento para evitar estos datos anormales; la otra alternativa es basada en la teoría de estimación-M [10] y el enfoque de los mínimos cuadrados, el cual usa una hipótesis adicional, asume que la varianza en el ruido de medida será contaminada por estos datos anómalos en una pequeña proporción [15], es decir,

$$\mathbf{w}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{Q}), \mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{R}) \text{ contaminado} - \varepsilon \quad (29)$$

La contaminación  $\varepsilon$  en la Ec. (29) indica que la distribución normal, adoptada por el sKF, es contaminada una pequeña fracción  $\varepsilon$  (e.g.,  $\varepsilon = 0,05$ ) de una distribución simétrica con colas pesada (*heavy tails*), la cual es la fuente de los datos espurios en  $\{\mathbf{y}_k\}$ .

A partir de varios métodos propuestos en la literatura, la metodología de la estimación-M para la modificación del filtro de Kalman robusto busca dar resultados, los cuales son numéricamente aceptables (ver [15]). En el caso de la estimación-M, la solución de mínimos cuadrados para el sistema de la Ec. (1) es [8]

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \underset{\mathbf{x}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \sum_{i=1}^n (p_{ik} - a_{ik}\mathbf{x}(k))^2 + \sum_{j=1}^q \rho_j (s_{jk} - b_{jk}\mathbf{x}_k)^2 \right\} \quad (30)$$

Donde  $n$  es la dimensión de los estados y  $q$  es la dimensión de la salida del sistema, además  $\mathbf{p}_k = (\mathbf{P}_k^-)^{-1/2} \hat{\mathbf{x}}_k^-$ ,  $\mathbf{s}_k = (\mathbf{R})^{-1/2} \mathbf{y}_k$ ,  $\mathbf{a}_k = (\mathbf{P}_k^-)^{-1/2}$ ,  $\mathbf{b}_k = (\mathbf{R})^{-1/2} \mathbf{C}$  (e.g.,  $p_{ik}$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{p}_k$  y  $a_{ik}$  es la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{a}_k$ ). Además  $\rho_j$  son funciones de perdida con derivadas  $\psi_j$  (llamadas funciones-psi) usadas estadística robusta. Por ejemplo, la función-psi de Huber está dada por [8]

$$\psi_H(z) = \begin{cases} z & \text{for } |z| \leq c \\ c \operatorname{sgn}(z) & \text{for } |z| > c \end{cases} \quad (31)$$

es a menudo usada, ya que esta función da estimados robustos de las ubicaciones, los cuales son óptimos en el sentido min-max, es decir, teniendo mínima varianza sobre la distribución contaminada mínima favorable. La selección recomendada de  $c$  en la Ec. (31) es por ejemplo  $c = 1.645$  para cuando se tiene una contaminación del 5% de los datos [8].

Derivando la Ec. (30) e igualando a cero se tiene

$$\sum_{i=1}^n a_{ik}^T (p_{ik} - a_{ik}\hat{\mathbf{x}}_k) + \sum_{j=1}^q \omega_{jk} b_{jk} (s_{jk} - b_{jk}\hat{\mathbf{x}}_k) = 0 \quad (32)$$

Donde en la Ec. (32) las ponderaciones  $\omega_{jk}$  están definidas por

$$\omega_{jk} = \frac{\psi(s_{jk} - b_{jk}\hat{\mathbf{x}}_k)}{s_{jk} - b_{jk}\hat{\mathbf{x}}_k} \quad (33)$$

Con la ayuda de las Ec. (32), (33) y un poco de álgebra se llega a que la ganancia de Kalman dada por la Ec. (24) toma la siguiente forma

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R}^{1/2} \mathbf{W}_k \mathbf{R}^{1/2})^{-1} \quad (34)$$

Donde  $\mathbf{W}_k = \operatorname{diag}\{\omega_{1k}, \dots, \omega_{qk}\}$ . Esta ecuación representa la ponderación de la señal de entrada para el tratamiento de datos espurios.

**VI. TEST PARA DATOS ESPURIOS**

La anterior sección ha explicado de manera básica la metodología para el tratamiento de datos espurios. Antes de empezar a aplicar este método, es necesario contar con herramientas para mostrar realmente que los datos si tengan estos datos anormales, por lo tanto esta sección expondrá de manera sencilla algunos test para datos espurios.

Los test para datos anómalos son procedimientos formales para detectar datos espurios, los cuales se encuentran por fuera de la distribución o el patrón de datos, estas pruebas son útiles para dar una hipótesis básica, donde estos datos pueden ser generados por errores técnicos. Sin embargo, estos recursos no dan la ubicación exacta de esos malos registros, pero son herramientas apropiadas para proporcionar información acerca de los datos. En la literatura, existen varios test para datos espurios, como los son: el test de Grubbs, de Dixon, de Rangos, de Tietjen-Moore, test de momentos estadísticos; para el caso de tener pruebas o test que se basan en valores críticos arrojados por medio de una función de probabilidad; por otro lado, se puede encontrar test basados en gráficos de datos, como por ejemplo: Histogramas de distribución normal, gráficos de percentiles y cuartiles, para mayor detalle ver [16]. Este estudio se centrará en describir dos test, los cuales son: el test de Grubbs y el histograma.

**A. TEST DE GRUBBS**

Uno de los test más conocidos y usados es el test de Grubbs [17], es también visto como un test de normalidad para otros tipos de alternativas. Este test ha sido usado en varias aplicaciones tales como: análisis biomédico [18], reconocimiento de patrones en datos químicos [19], sistemas autónomos [20], reconstrucción de imágenes [21] entre otras. El test de Grubbs usa y compara datos normalizados con respecto a la media y la desviación estándar, este calcula una desviación normalizada a partir de la media muestral [22],

$$y_{nd} = \frac{|y - \langle y \rangle|}{\langle (y - \langle y \rangle)^2 \rangle^{1/2}} \quad (35)$$

donde  $\langle \cdot \rangle$  es el operador valor esperado,  $y$  es el conjunto de datos, y la hipótesis para rechazar datos espurios es

$$y_{nd} > \frac{N}{\sqrt{N}} \sqrt{\frac{t^2}{N-2+t^2}} \quad (36)$$

donde  $N$  es el total de muestras,  $t$  es el valor crítico basado en la función de distribución acumulativa inversa *Student-t* con  $N - 2$  grados de libertad; la correspondiente probabilidad es  $\alpha/2N$  y  $\alpha$  es el nivel significativo, el valor usado comúnmente es 5%.

### B. HISTOGRAMA

El histograma es utilizada con el objetivo de mostrar algunas características de los datos como: la distribución de los datos, la media, la forma de la distribución de los datos u otra propiedad de los datos. El histograma proporciona un sentido de los patrones o detalles que no son disponibles en los test estadísticos numéricos. A pesar de que esta representación gráfica de los datos no son generalmente procedimientos para rechazar datos espurios por medio de una hipótesis ó no cuenta con la capacidad de compensar el efecto negativo en los datos causado por los datos anómalos [23].

El método más común para identificar datos espurios es mirar que valores de los datos están por fuera de un cierto número de desviaciones estándar alrededor de la media, por esta razón, se analizarán los datos para dos desviaciones estándar, si hay datos por fuera de las dos desviaciones, por tanto hay datos espurios.

### C. VALIDACIÓN

Con el fin de ilustrar la influencia de los datos espurios presentes en la estimación, el error residual ( $E_{res}$ ) será calculada. Esta medida pueden ser obtenida como

$$E_{res} = \frac{1}{N} \|y_{clean} - y_{est}\|^2, \quad (37)$$

donde  $y_{clean}$  es la señal de salida del sistema limpia, sin datos espurios y la  $y_{est}$  es la señal estimada por los métodos (sKF y rsKF).

## VII. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Para mostrar la aplicabilidad del método, primero se evaluó el rsKF y sKF sobre un conjunto de datos sintéticos que corresponden a una función coseno ruidosa, para observar como es el tratamiento de datos espurios; luego se utilizó el

DKF y rsKF para la etapa de identificación de un esquema de control adaptativo de un puente grúa. Las aplicaciones y los métodos se desarrollaron sobre Matlab R2009a.

### A. DATOS SINTÉTICOS A PARTIR DE UN SISTEMA DESCONOCIDO

Varios datos fueron creados para exhibir no linealidades, en donde  $B = 0$ ,  $D = 0$ , además  $A$ ,  $C$ ,  $Q$ ,  $R$  y los estados son desconocidos. Para esta etapa se le agregó a la señal de salida un ruido blanco Gaussiano con varianza  $\sigma^2 = 0.01$ . Los datos son introducidos de manera aleatoria con una cantidad total al 5% de todos los datos, en donde fueron ubicados de manera aleatoria en las observaciones. En la Fig. 3 se muestra una función coseno ruidosa con datos espurios, sobre 1000 muestras.

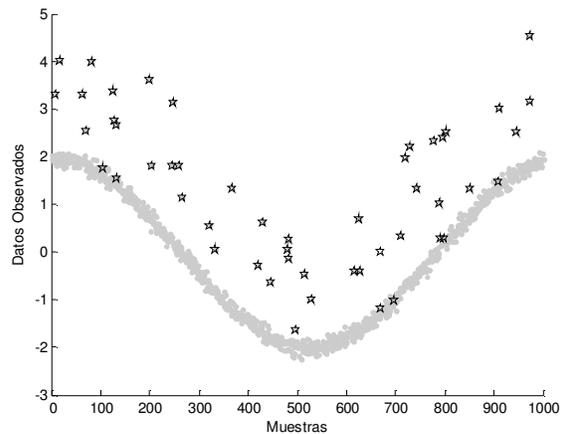


Figura 3. Datos observados y espurios para una función coseno ruidosa. Los puntos grises son las observaciones y las estrellas son los datos espurios agregados a las observaciones.

La Fig. 3 presenta los datos observados y espurios para una función coseno ruidosa; en esta figura es claro que existen datos anómalos en el conjunto de datos, pero en ambientes prácticos los datos espurios se confunden con el conjunto de datos, de modo que es mejor aplicar un test para asegurar de manera cuantitativa que hay datos anormales en las observaciones. Por lo tanto, el test de Grubbs es aplicado a los datos de la función coseno. La tabla 2 muestra la aplicación del test para los datos de la función coseno cuando se tiene el 5% de datos espurios del conjunto de datos.

Media	Desviación estándar	V. C.	# rechazos	# de datos espurios
-0.0945	1.388	4.04	10	50

Tabla 2. Aplicación de test de Grubbs para la función coseno ruidosa.

De la Tabla 2 que no todos los datos corruptos son rechazados, esto se debe a que el valor crítico (V. C) para 1000 muestras es 4.04, el cual es un valor grande, por lo tanto el test solo pudo detectar 10 de los 50 datos anómalos, pero con la ayuda de este test, los datos generados a partir de la función coseno tiene datos

espurios, y existe una medida cuantitativa de la cantidad de estos datos. Asimismo el histograma es presentado en la Fig. 4, para los datos mostrados en la Fig. 3.

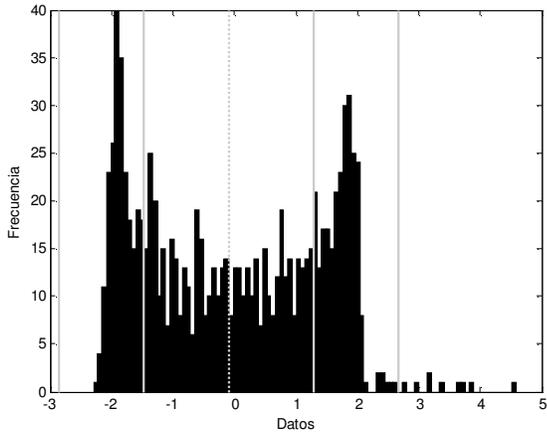


Figura 4. Histograma para la función coseno ruidosa. Las barras negras corresponden a la frecuencia de los datos; la línea punteada es la media de las observaciones y las líneas continuas grises son las dos desviaciones estándar.

En la Fig. 4, es bastante claro que hay datos espurios por fuera de las dos desviaciones estándar, por esta razón existen datos anómalos en el conjunto de datos, pero este test gráfico no expresa cuantos de esos datos se encuentran en las observaciones, ya que la propiedad del histograma es dar información si hay o no datos anormales. Por tanto los métodos de estimación pueden ser aplicados a los datos, la Fig. 5 presenta la respuesta de sKF y rsKF ante el problema de tratamiento de datos espurios en ambientes no lineales.

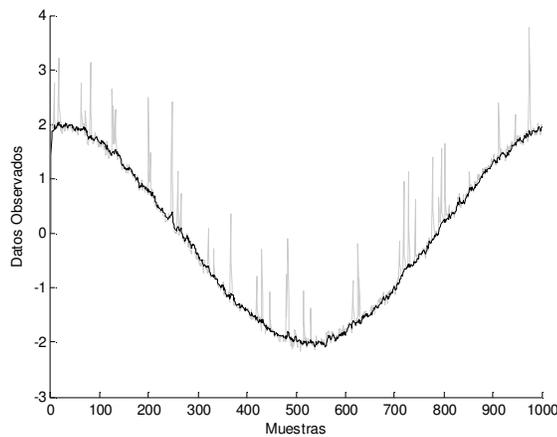


Figura 5. Datos estimados por el sKF y rsKF para una función coseno ruidosa. La línea negra corresponde a la señal estimada por el rsKF y la línea gris es la respuesta del sKF.

La Fig. 5 muestra como el sKF es sensible a estos datos, mientras que el rsKF corrige este efecto de una manera apropiada. Es interesante saber que el uso de la teoría de

estimación-M da buen soporte para el tratamiento de estos datos anormales, es decir, a partir de la Fig. 5, el rsKF es robusto a los datos espurios en las observaciones. Además, este método usa ponderaciones a partir de un enfoque de máxima verosimilitud, por lo tanto, el rsKF es adecuado para analizar datos espurios en sistemas no lineales.

Para esta aplicación, un estado fue usado ( $n = 1$ ), una salida fue observada ( $q = 1$ ) para los dos filtros; las matrices **A**, **C**, **Q** y **R** para el rsKF y sKF fueron asumidas como  $\mathbf{A} = \mathbf{C} = \mathbf{I}$  y  $\mathbf{Q} = \mathbf{R} = 10^{-4}\mathbf{I}$  [22].

En la Tabla 3 están consignadas la medidas expuesta en IV para el 5% de datos espurios de las todas observaciones para la función coseno ruidosa mostrada en la Fig. 3. En esta tabla el rsKF tiene el menor error residual en comparación con el sKF con 1.24%, este valor muestra la buena correspondencia entre  $y_{clean}$ .

KF	$E_{res}$
sKF	$0.1782 \pm 0.0284$
rsKF	$0.0124 \pm 4.88 \times 10^{-4}$

Tabla 3. Resultados obtenidos a partir de la aplicación de los KF's a la predicción de una función coseno ruidosa para 5% de datos espurios en las observaciones.

### B. RESULTADOS PARA LA IDENTIFICACIÓN ROBUSTA EN EL CONTROL DE UN PUENTE GRÚA

Los resultados anteriores se basaron en un modelo con datos sintéticos, obteniendo buenas propiedades para el caso de tratamiento de datos espurios. Ahora con el propósito de observar como es el comportamiento del algoritmo de identificación propuesto en el control de un puente grúa, se aplicó el esquema de control adaptativo que se muestra en la Fig. 6.

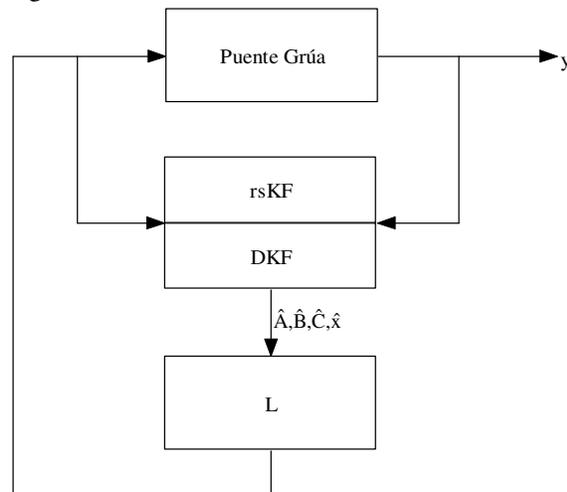


Figura 6. Diagrama de bloques del esquema adaptativo, utilizando el rsKF y el DKF como etapa de identificación.

La Fig. 6 muestra como fue la implementación del control adaptativo para el puente grúa, en donde se obtienen los estimados de las matrices **A**, **B** y **C**, que se necesitan para el cálculo del vector de realimentación de estado **L**. Para esta aplicación se utilizó el modelo expuesto en la sección II con los parámetros que se muestran en el anexo A. Además los ruidos del proceso y medida fueron asumidos Gaussianos, con media cero y  $\sigma^2 = 0.01$ ; también se le agregó a la señal de salida un ruido con SNR (relación señal a ruido) de 20 dB.

Con el fin de realizar el control local del puente grúa, se tomó como condición inicial  $\mathbf{x}_0 = [0.2 \ 0 \ 0 \ 0]^T$  y un tiempo de muestreo de 0.05s. Como primera prueba se aplicó solamente el DKF como etapa de identificación en donde la respuesta obtenida se muestra en la Fig. 7.

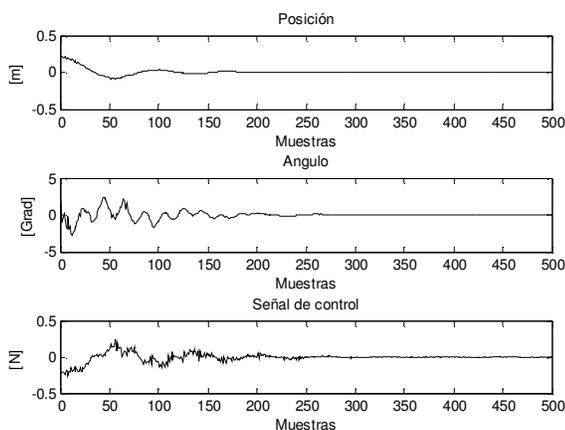


Figura 7. Comportamiento del puente grúa, utilizando el DKF como etapa de identificación. La primera subgráfica corresponde a la posición del puente grúa; la segunda subfigura es la respuesta del ángulo del puente grúa y finalmente en la tercera subfigura es la señal de control del sistema.

Se muestra de la Fig. 7 que la posición se ve un poco afectada por el ruido agregado a la señal de salida, además se tiene un valor en la señal de control alterado por estas características indeseables en el sistema, también se puede observar que el esquema de control actúa de manera adecuada llevando las variables de posición del carro y el ángulo del péndulo a su punto de operación en aproximadamente 15s. Luego de haber obtenido estas respuestas teniendo el DKF para estimar estados y parámetros, se aplicó el enfoque propuesto utilizando el rsKF y el DKF como etapa de identificación. Por lo tanto, en la Fig. 8 se muestra el comportamiento del control adaptativo utilizando la combinación de estas dos técnicas.

De la Fig. 8 se nota que la señal de control es un poco más suave y de menos valor, en comparación de la presentada en la Fig. 7, potencialmente cabe resaltar que el ángulo no se ve afectado por el ruido presente en el sistema,

igualmente se tiene el mismo comportamiento para la posición del carro. También se debe destacar que el esquema de control lleva las variables alrededor de 15s a su punto de operación.

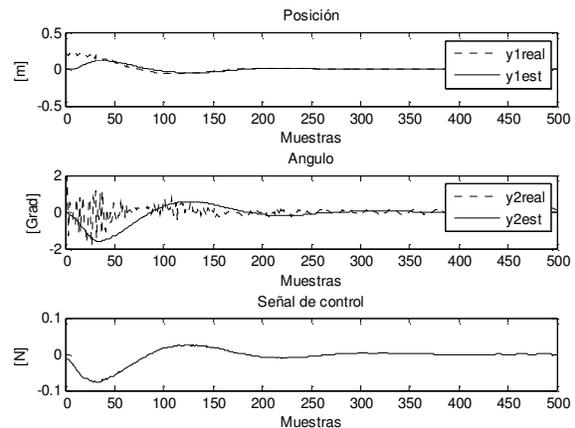


Figura 8. Comportamiento de la estructura adaptativa utilizando el rsKF y el DKF. La primera subfigura corresponde a la posición del puente grúa; la segunda subfigura es la respuesta del ángulo del puente grúa y finalmente en la tercera subfigura es la señal de control del sistema. Las líneas punteadas son la señal real del sistema y las líneas sólidas son la respuesta del método propuesto.

## VIII. CONCLUSIONES

En este estudio se desarrolló una metodología robusta para la identificación de sistemas dinámicos; como aplicaciones se presentaron un sistema desconocido con comportamientos no lineales y ruidosos, además de estas características se agrega al problema el tener datos singulares como los son los datos espurios ya que el filtro de Kalman estándar es sensible a estos datos. Se mostró la utilidad del filtro de Kalman de estadística robusta para tratar este inconveniente, arrojando errores relativos menores a los obtenidos por el filtro de Kalman estándar.

Frente al problema de regulación del puente grúa, se logró establecer, que con la metodología propuesta se obtiene un menor esfuerzo en la señal de control (ver Fig. 8) y también se debe destacar que las variables, como la posición del carro y el ángulo del péndulo, no se vieron afectados por las perturbaciones presentes en el sistema.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló en el marco del proyecto de investigación: "Identificación de parámetros de sistemas multivariables basado en el filtro de Kalman y filtro de partículas dando robustez a outliers" en el programa de jóvenes investigadores "Virginia Gutiérrez de Pineda" y fue financiado por medio de Colciencias y la Universidad Tecnológica de Pereira.

## ANEXO A.

## PARÁMETROS DEL PUENTE GRÚA

Parámetro	Valor
Límites del riel	$\pm 0.5$ [m]
Gravedad	$9.8 \left[ \frac{m}{s^2} \right]$
Dist. Del eje de rotación al centro de masa	0.3434 [m]
Masa del carro	619.25 [g]
Masa de la tapa	90.55 [g]
Masa de los posicionadores	134.05 [g]
Masa del carro total	0.84385 [Kg]
Masa de la carga	0.013 [Kg]
Magnitud de la fuerza de control	17 [N]
Momento de inercia	$10^{-5}$ [Kg · m <sup>2</sup> ]
Coefficiente de fricción de rotación	$9.3 \times 10^{-6} \left[ \frac{Kg \cdot m^2}{rad \cdot s} \right]$
Coefficiente de fricción del carro	$0.67 \left[ \frac{N \cdot s}{m} \right]$

## REFERENCIAS

- [1] L. Ljung, *System identification: Theory for the user*, Prentice Hall, 1999.
- [2] J-A Ting, E. Theodorou, S. Schaal, "A Kalman filter for robust outlier detection", *Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ International Conf.*, pp. 1514 -1519.
- [3] J. W. Tukey, "A survey of sampling from contaminated distribution," *in Contributions to Probability and Statistics*, I. Olkin, Ed. Stanford, CA: Stanford Univ. Press, 1960.
- [4] Sorenson H.W. and Alspach D.L., "Recursive bayesian estimation using gaussian sums", *Automatica*, 7(4): 465 – 479, 1971.
- [5] R. J. Meinhold and N. D Singpurwalla, "Robustification of Kalman Filter Models", *Journal of the American Statistical Association*, 84(406): 479-486, 1989.
- [6] C Masreliez, "Approximate non-Gaussian filtering with linear state and observation relations", *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 20(1): 107 – 110, 1975.
- [7] C. D. Zuluaga, "Desarrollo de una metodología para la identificación de sistema multivariables acoplados basada en el filtro de Kalman en presencia de datos espurios", Master's Thesis, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia, 2012.
- [8] Cipra T. and Romera R., "Kalman filter with outliers and missing observations", *TEST: An Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research*, 6(2): 379-395, 1997.
- [9] S. Haykin, *Kalman Filtering and Neural Networks*, Wiley-Interscience, 2001.
- [10] P. J. Huber, "Robust estimation of a location parameter", *Annals of Mathematical Statistics*, 35(1): 73-101, 1964.
- [11] G. Teschl, *Ordinary differential equations and Dynamical Systems*, American Mathematical Society, vol. 1XX, 2004.
- [12] R. Kalman, "On the general theory of control systems", *Automatic Control, IRE Transactions on*, 4(3): 110, 1959.
- [13] D Giralgo and E. Giraldo, *Teoría de control digital*, 1st ed., 2012.
- [14] A. Nelson, "Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by dual Kalman filtering methods", Ph.D. dissertation, 2000.
- [15] T. Cipra and R. Romera, "Robust Kalman Filter and its Application in Time Series Analysis", *Kybernetika*, 27(6): 481-494, 1991.
- [16] H. Thode, *Testing for Normality*. New York: Marcel Dekker, 2002.
- [17] F. E. Grubbs, "Sample criteria for testing outlying observations", *The Annals of Mathematical Statistics*, 21(1): 27-58, 1950.
- [18] J. D. Hofer and J. R. Murphy, "Structured use of the median in the analytical measurement process", *Journal of Pharmaceutical and Biomedical Analysis*, 23(4): 671-686, 2000.
- [19] M. Vaal, J. T. van der Wal, J. Hoekstra, and J. Hermens, "Variation in the sensitivity of aquatic species in relation to the classification of environmental pollutants", *Chemosphere*, 35(6): 1311-1327, 1997.
- [20] S. Yilmaz, H. Kayir, B. Kaleci, and O. Parlaktuna, "Mobile robot localization via outlier rejection in sonar range sensor data", *Electrical and Electronics Engineering (ELECO), 2011 7th International Conference*, pp. II-434-II-438, 2011.
- [21] G. Gerganov, K. Mitev, C. Schmidlein, H. Kang, A. Kirov, and I. Kawrakow, "Detecting visual differences in reconstructed images using a region-based test for outliers," *in Nuclear Science Symposium Conference (NSS/MIC), 2010 IEEE*, pp. 2346-2351, 2010.
- [22] F. E. Grubbs, "Procedures for detecting outlying observations in samples," *Technometrics*, pp. 1–21, 1969.
- [23] R. Pearson, "Exploring process data," *Journal of Process Control*, 11(2): 179-194, 2001.