

Variantes de la Aplicación de la Viga Conjugada, en el Cálculo de Momentos de Empotramiento

Variations of the Application of the Conjugate Beam in the Calculation of Moments of Fitting.

Alfonso Campos Vázquez, Alejandro Escamilla Navarro, Antonio González López
 UPIITA del Instituto Politécnico Nacional, México
 ing_campos@hotmail.com

Resumen— El método de la viga conjugada, para cálculo de deformaciones y momentos de empotramiento en flexión, ha sido abandonado por varios autores de los libros de Mecánica de Materiales más populares en América; no obstante partiendo de la ecuación general de la elástica para flexión se puede fundamentar su uso. Planteado de forma adecuada, la viga conjugada resulta un método rápido y sencillo, una vez comprendido los conceptos fundamentales de fuerza cortante y momento Flexionante.

Palabras clave— Viga conjugada, momento de empotramiento.

Abstract— The conjugate beam method for calculation of deformations and fixed-end moments in flexion, has been abandoned by several authors of books for Mechanics of Materials more popular in America however based on the general equation of the elastic flexural can support its use. With de correct approach, the conjugate beam is an easy and quick method, once understood the basic concepts of shear and bending moment.

Key Word — Conjugate beam, fixed-end moment.

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, las investigaciones de resistencia de materiales están ligados a la utilización de computadoras, con programas en su mayoría basados en teoría de elementos finitos; o bien, en la solución de modelos matemáticos complejos de teoría de la elasticidad. Sin embargo, para el caso de flexión, la comprensión de la teoría de resistencia de materiales, puede lograrse entendiendo técnicas semigráficas, como es el método de la viga conjugada. Este método para cálculo de deformaciones y momentos de empotramiento ha sido abandonado por la gran mayoría de autores en el continente americano; por lo que deseo presentar una técnica para la obtención de momentos de empotramiento rápida, utilizando diagramas de momentos parciales y

aplicación de ecuaciones de equilibrio de una forma ingeniosa.

Tanto en el artículo original[1], como en los libros clásicos[2,3,4] y los actuales [5,6] que tratan el tema de viga conjugada, demuestran sus fundamentos solo mediante analogías de relaciones diferenciales de la flexión simple. Este método es aplicado en algunos libros de análisis de estructuras [7, 8].

El fenómeno de la flexión es descrito mediante la fórmula de la flexión, la cual relaciona el radio de curvatura $1/\rho$, de la línea elástica (curva que adopta el eje longitudinal de una viga deformada), con la relación entre el momento flexionante M (que provoca la deformación de una viga) con su rigidez a la flexión EI . A partir de la fórmula de la flexión se obtienen dos ecuaciones, una para calcular los esfuerzos y otra para calcular deformaciones en flexión pura. Para deformaciones la ecuación, que se utiliza es denominada la ecuación diferencia de la elástica, la que corresponde a la ecuación 8 de este trabajo. Como esta es una ecuación de segundo orden, se puede integrar dos veces para encontrar la función y , que representa la flecha de la curva elástica. Lo antes descrito representa una demostración rigurosa ya que, partiendo de la ecuación diferencial de la elástica de una viga real, se puede establecer la relación entre deformaciones (pendiente y flecha) para cada una de sus secciones transversales, con la fuerza cortante y momento flexionante de una viga ligada a la real, que se denomina viga conjugada. La demostración se reduce a resolver una ecuación diferencial de variables separables (con sus correspondientes valores de frontera). Con el método de la viga conjugada se resuelven dos casos de vigas empotradas, una de sección constante y otra de dos secciones, donde se pretende mostrar la bondades de la viga conjugada. Este método es conveniente para la verificación del diseño por rigidez lateral en ejes con transmisión de potencia facilitando el análisis en ejes con varias secciones transversales; el segundo caso presentado en este trabajo ejemplifica su aplicación.

II. CONTENIDO

A. Nomenclatura

- q' - carga de la viga real (viga dada)
- V - fuerza cortante viga real
- M - Momento flexionante viga real
- $q'C$ carga de la viga conjugada
- VC - fuerza cortante viga conjugada
- MC - Momento flexionante viga conjugada
- θ - pendiente de cualquier sección en la viga real
- ψ - flecha de cualquier sección en la viga real
- E - módulo de elasticidad, viga real
- I_z - momento de inercia, respecto al eje neutro de la viga real
- R - reacción de viga real
- RC - reacción de viga conjugada

B. Viga Conjugada. Definición

Dada una viga recta sometida a flexión simple, se llama viga conjugada de esta, a otra viga de la misma longitud sometida a una “carga ficticia” distribuida, cuya forma es similar a la del diagrama de momentos de la viga dada dividida entre la rigidez a la flexión de la viga dada, es decir M/EI_z ; que deberá estar en equilibrio. La viga dada se le denominará, viga real. La carga de la viga conjugada no es propiamente una carga con unidades de fuerza, se podría denominar carga elástica ya que está ligada a la respuesta elástica de la viga. Del análisis dimensional de unidades de M/EI_z , se obtiene la unidad del tipo $1/L$ ($1/m$), entonces la carga de la viga conjugada queda definida como:

$$q'C = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (1)$$

Esto es, la carga de la viga conjugada es igual a la función del momento flexionante de la viga real dividido entre la rigidez a la flexión.

1. Relaciones Viga real - Viga Conjugada

Las relaciones entre la carga, fuerza cortante y momento flexionante de una viga recta sometida a flexión simple, como la mostrada en la figura 1, son[9]:

$$q' = - \frac{dV(x)}{dx} \quad (2)$$

$$V = \frac{dM(x)}{dx} \quad (3)$$

$$q' = \frac{d^2M(x)}{dx^2} \quad (4)$$

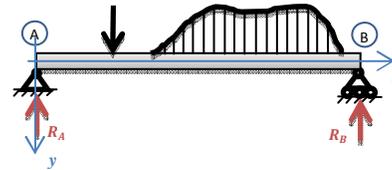


Figura 1. Viga real sometida a flexión simple. El diagrama de momentos flexionantes de la viga real (figura 1), se muestra en la figura 2.

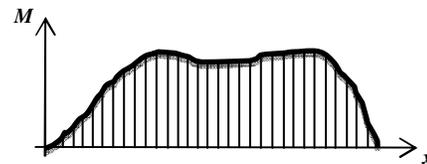


Figura 2. Diagrama de momentos flexionantes.

Como se estableció, la viga conjugada tiene la misma longitud que la viga real y su “carga” tiene la forma del diagrama de momentos de la viga real dividido entre la rigidez a la flexión M/EI_z (fig. 3).

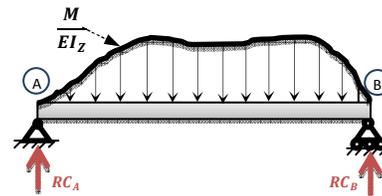


Figura 3. Representación de una Viga Conjugada.

La “carga” aplicada a la viga conjugada, produce en ella fuerzas cortantes y momentos flexiones, denominados cortante y flexionante conjugados. La viga conjugada, también debe estar en equilibrio, ya sea por reacciones en sus apoyos, o solo por la “carga” aplicada a la conjugada. Al igual que la viga real, la viga conjugada mantiene las relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flexionante de conjugada:

$$q'C = - \frac{dVC(x)}{dx} \quad (5)$$

$$VC(x) = \frac{dMC(x)}{dx} \quad (6)$$

$$q' C = \frac{d^2 MC(x)}{dx^2} \quad (7)$$

C. Deformaciones por Viga Conjugada

El método de la viga conjugada está basado en la semejanza entre tres las cantidades básicas, carga, fuerza cortante y momento flexionante ecuaciones 5, 6 y 7, con las de la viga real, ecuaciones 2, 3 y 4.

Partiendo de la ecuación diferencial de la elástica[9]:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z} \quad (8)$$

Y tomando en cuenta la ecuación 1 y la ecuación 7, queda:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = q' C = \frac{d^2 MC(x)}{dx^2} \quad (9)$$

O bien

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d^2 MC(x)}{dx^2} \quad (9')$$

Si se integra la ecuación 9', respecto la variable x , se reduce un orden de derivación, más una constante de integración:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d MC(x)}{dx} + C_1 \quad (10)$$

Para el caso de flexión simple $dy/dx \approx \theta$ [7], y de la ecuación 6, sustituyendo se obtiene lo siguiente:

$$\theta = VC(x) + C_1 \quad (11)$$

Si se vuelve a integrar ahora la ecuación 10, se obtiene:

$$y = MC(x) + C_1 x + C_2 \quad (12)$$

Falta por determinar los valores de las constantes de integración, las cuales se obtienen a partir de los valores de frontera, valores de y para una x conocidos, que son las variables de la derivada en la ecuación 8. En la figura 3 se puede observar que en los apoyos A y B, el valor de la flecha debe ser cero (no se permite movimiento vertical), cuyos valores de x son cero y l respectivamente; además como los apoyos son articulaciones y no hay voladizos, el momento en ambos es cero, es decir, $MC = 0$. Esto es en $x = 0$, $y = 0$, sustituyendo en la ecuación 12:

$$0 = 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 \quad \text{de donde} \quad C_2 = 0$$

Con la otra condición de frontera $x = l$, $y = 0$ y de la viga conjugada $MC=0$, se obtiene de la ecuación 12:

$$0 = 0 + C_1 l + 0 \quad \text{de donde} \quad C_1 = 0$$

Sustituyendo el valor de las constantes, en las ecuaciones 11 y 12, Además no se acostumbra escribir los términos de cortante y flexionante como función de x , por tanto se elimina (x):

$$\boxed{\theta = VC(x)} \quad (13) \quad \boxed{y = MC(x)} \quad (14)$$

Estas dos últimas expresiones, constituyen los teoremas de la viga conjugada:

1.- El valor de la pendiente, θ , de cualquier sección de una viga real, es igual al valor de la fuerza cortante de su viga conjugada para esa misma sección.

2.- El valor de la flecha, y , de cualquier sección de una viga real, es igual al valor del momento flexionante de su viga conjugada para esa misma sección.

1. Condiciones de apoyos para la Viga Conjugada

Los apoyos de la viga conjugada, mostrada en la figura 3, se eligieron arbitrariamente iguales a los de la viga real. Para el caso de una viga real simplemente apoyada sin voladizos, que es caso analizado, las condiciones de deformación en los apoyos coinciden con las condiciones de frontera utilizadas. Sin embargo, no siempre sucede así.

Si uno de los apoyos de una viga real fuese un empotramiento rígido, entonces, en el empotramiento la viga no sufre deformación alguna, ni gira ni se desplaza. Entonces de acuerdo con los teoremas de viga conjugada $\theta = VC = 0$ y $y = MC = 0$. Para que la viga conjugada sea congruente con las deformaciones sufridas por la viga real, la conjugada deberá tener condiciones tales que su fuerza cortante y momentos flexionante sean cero; esta situación se encuentra en el extremo libre de una voladizo.

Si la sección en la que se desea determinar deformaciones es el extremo libre de una viga real cargada, tanto la flecha como la pendiente muy probablemente serían diferente de cero, por tanto, la viga conjugada debe tener valores de cortante y flexionante, esto es $\theta = VC(x) \neq 0$; $y = MC(x) \neq 0$. En un empotramiento, seguramente, siempre se tendrá una fuerza y un momento reacción, que son los valores de la fuerza cortante y momento flexionantes en esa sección, por tanto, en viga conjugada la sección libre de una viga real corresponde a un empotramiento.

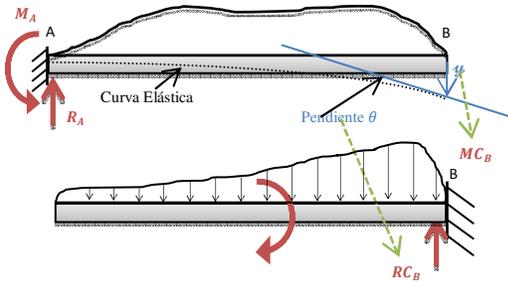


Figura 4. Relación entre apoyos de viga real y conjugada.

D. Momentos de empotramiento, viga doblemente empotrada

Normalmente, en el método de viga conjugada se hace uso de los diagramas de momentos por partes, esto es, si la función momento cuenta con varios términos, se dibuja un diagrama de momentos para cada término (que corresponde a cada carga sobre la viga real), sin embargo, es más conveniente considerar, el diagrama carga-reacción, para cada carga aplicada sobre la viga real.

Se analizará la viga hiperestática, doblemente empotrada, con carga concentrada *P* y valores de *a*, *b* y *l*, conocidos. Esta viga tiene un grado hiperestático de dos, cuatro reacciones y solo dos ecuaciones de equilibrio aplicables.

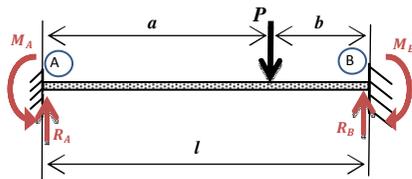


Figura 5. Viga hiperestática. Momentos y reacciones por determinar.

Para su solución, se aplica el principio de superposición de causas y efectos, por un lado se considera solo la carga concentrada y sus reacciones, por otro lado los momentos de empotramiento y sus reacciones.

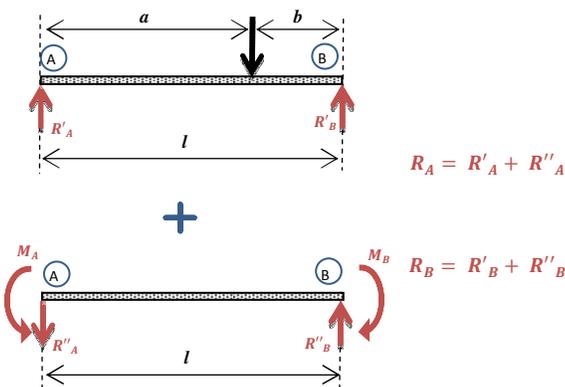


Figura 6. Diagrama de cuerpo libre de la descomposición de la hiperestática en dos vigas “isostáticas”.

Si consideramos que $a > b$, entonces $R_B > R_A$, considérese también $M_B > M_A$, los diagramas de momentos flexionantes de las vigas isostáticas, son:

Se respeta la misma convención de signos de flexión simple de una viga real, para los momentos flexionantes y fuerzas cortantes de una viga conjugada.

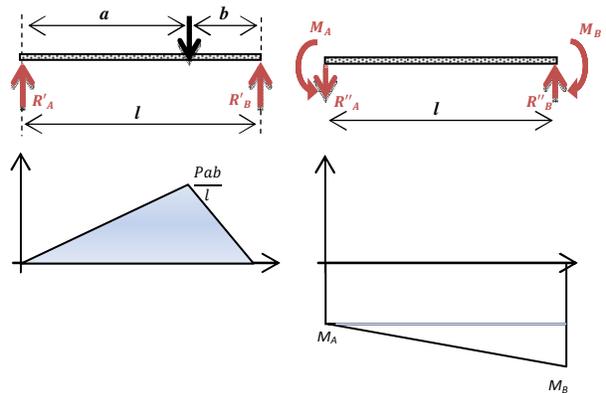


Figura 7. Vigas “isostáticas” y sus respectivos diagramas de momentos flexionantes.

La viga conjugada para la viga real de la figura 5, es una viga sin apoyos (en viga real los apoyos A y B son empotramientos), entonces la viga conjugada no tiene apoyo, por tanto el equilibrio de la viga conjugada es debida a las cargas de conjugada únicamente.

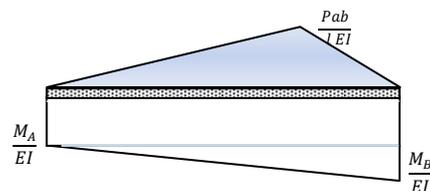


Figura 8. Viga conjugada correspondiente a la viga real de la figura 5.

Las cargas de la viga conjugada planteadas, tienen formas geométricas simples, un triángulo y un trapecio. El trapecio se puede descomponer a su vez, en dos triángulos. La determinación del centroide de los tres triángulos es simple, así como la resultante de las cargas distribuidas que es el área de cada triángulo. Las tres resultantes deben mantener en equilibrio la viga conjugada, aplicando las ecuaciones de equilibrio al sistema de cargas resultantes, dará el valor de los momentos de empotramiento, de una manera directa sin necesidad de hacer simultáneas las ecuaciones de equilibrio, si se utiliza suma de momentos con respecto al centroide de los triángulos inferiores de la figura 9.

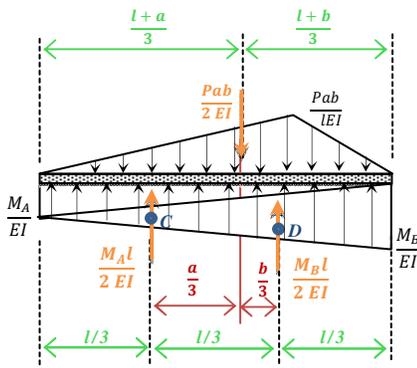


Figura 9. Viga conjugada con resultantes de cargas y distancia entre centroides, ejemplo 1.

Estableciendo la suma de momentos respecto al punto C

$$\sum MC_c = 0 = \frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{a}{3} - \frac{M_B l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} \quad (15)$$

Despejando M_B , se obtiene directamente su valor

$$M_B = \frac{Pa^2b}{l^2} \quad (16)$$

Se procede de manera similar para calcular M_A :

$$\sum MD_d = 0 = \frac{Pab}{2EI} \cdot \frac{b}{3} - \frac{M_A l}{2EI} \cdot \frac{l}{3} \quad (17)$$

Despejando M_A , se obtiene directamente su valor

$$M_A = \frac{Pab^2}{l^2} \quad (18)$$

El valor de las reacciones se obtiene por superposición, sumando las reacciones de cada viga “isostática”. La viga que contempla los momentos de empotramiento, aparentemente es isostática, ya que tiene dos reacciones desconocidas, sin embargo los valores momentos en A y en B, no son de valor conocido. Pero una vez calculado los valores de los momentos en función de la carga P y las distancias a, b y l, se puede determinar el valor de las reacciones por suma directa, tal como se indica en la figura 6.

En la figura 10 se analiza el caso de una viga doblemente empotrada, formada por dos secciones transversales; se presenta la viga conjugada, con diagramas carga-reacción donde se indican las resultantes y las distancias entre sus centroides. Se secciona en triángulos el trapecio de la parte del diagrama de momentos. Se obtendrán los valores de los momentos de empotramiento, aplicando las ecuaciones de equilibrio $\sum FC$ y $\sum MC_E$, a los diagramas carga-reacción de la viga conjugada se obtienen las siguientes ecuaciones, las cuales nos llevan a los valores de los momentos de empotramiento:

$$\sum FC = 0 = 2 \frac{Pab}{6EI} - \frac{M_A l}{6EI} - 2 \frac{(2M_A + M_B)l}{6EI} - \frac{M_B l}{6EI} \quad (19)$$

$$7M_A + 5M_B = \frac{Pab}{6l} \quad (20)$$

$$\sum MC_E = 0$$

$$0 = \frac{M_A l}{6EI} \cdot \frac{l}{9} + \frac{Pab}{6EI} \cdot \frac{3l}{9} - \frac{(2M_A + M_B)l}{18EI} \cdot \frac{3l}{9} - \frac{M_B l}{6EI} \cdot \frac{5l}{9} \quad (21)$$

$$-M_A + 14M_B = 3 \frac{Pab}{l} \quad (22)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 20 y 22, se obtienen los valores de los momentos de empotramiento:

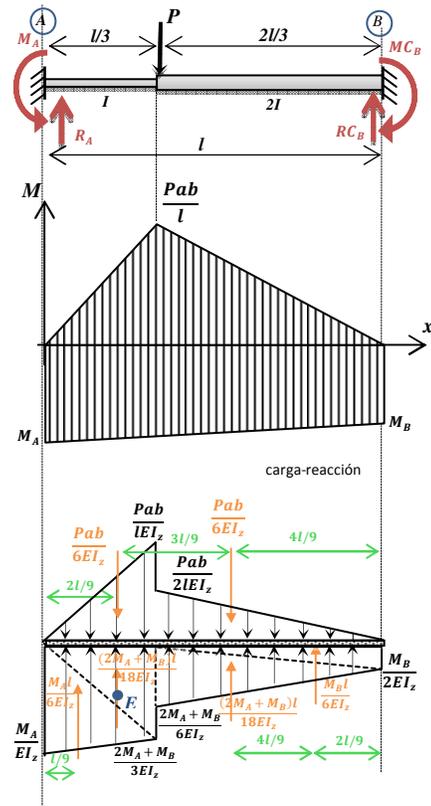


Figura 10. Viga doblemente empotrada de dos secciones transversales y dos opciones de viga conjugada correspondiente, ejemplo 2.

$$M_A = \frac{69Pab}{103l} ; M_B = \frac{27Pab}{103l} \quad (23)$$

En las siguientes tablas se contrastan las fases que se siguen en los métodos de la doble integración y viga conjugada, para la solución de vigas hiperestáticas sección constante y con dos secciones transversales diferentes, que son los casos presentados.

DOBLE INTEGRACIÓN	VIGA CONJUGADA
Ecuación de momentos, funciones de singularidad.	Diagramas de carga para viga conjugada.
Integración de ecuación, determinación de constantes .	Cálculo de áreas y distancias de sus centroides.
Aplicación de valores de frontera para obtener ecuaciones, que junto con las de equilibrio proporcionan los valores de las reacciones.	Aplicación de ecuaciones de equilibrio a la viga conjugada, reacciones directas.

Tabla 1. Comparación entre dos métodos de cálculo de vigas hiperestáticas de sección constante.

DOBLE INTEGRACIÓN	VIGA CONJUGADA
Ecuación de momentos, funciones de singularidad, para cada sección de la viga real.	Diagramas de carga para viga conjugada.
Integración de ecuación, determinación de constantes para cada sección de la viga.	Cálculo de áreas y distancias de sus centroides.
Aplicación de valores de frontera para obtener ecuaciones, que junto con las de equilibrio proporcionan los valores de las reacciones.	Aplicación de ecuaciones de equilibrio a la viga conjugada, reacciones directas.

Tabla 2. Comparación entre dos métodos de cálculo de vigas hiperestáticas con dos secciones.

En especial para el caso de vigas de dos o más secciones la viga conjugada es una mejor opción de cálculo, al reducir sensiblemente las operaciones requeridas para el cálculo de reacciones.

En los dos casos tratados, no fue necesario determinar ninguna deformación, debido a que el objetivo es resolver el problema hiperestático.

III. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Aunque el método de la viga conjugada no es novedoso, e inclusive en desuso, debidamente utilizado es un recurso con varias bondades, no solo para el cálculo de deformaciones o reacciones, sino en el ámbito educativo, de la resistencia de materiales.

Es un medio que ayuda a reforzar varios conceptos del caso de flexión simple, en especial los conceptos de fuerza

cortante y momento flexionante; de como el momento flexionante, esta directamente ligado a la curva elástica de una viga real. Por su metodología la viga conjugada requiere un análisis (descomposición en partes de un conjunto) y de una síntesis (suma de partes).

El tiempo de cálculo de momentos de empotramiento se reduce sensiblemente, con una selección de vigas conjugadas apropiadas, en especial para vigas de dos o más secciones transversales en su claro.

El uso de métodos gráficos permite el entendimiento directo del comportamiento de variables que definen la resistencia o rigidez de un elemento, además de comprender la relación que guardan dichas variables entre si por ejemplo relación carga, fuerza, momento, deformación; lo cual en la gran mayoría de la veces no se logra con la aplicación de una ecuación matemática que al integrarla de manera directa, se realiza por memorización, perdiendo con esto el entendimiento del fenómeno.

Siempre hay algo que explorar e innovar por muy estudiado y ajeo del tema.

REFERENCIAS

Referencias de publicaciones periódicas:

- [1] H. M. Westergaard, "Deflections of Beams by the Conjugate Beam Method," Journal of the Western Society of Engineers, Vol. XXVI, No. 11, pp. 369-396, 1921. Este artículo completo puede consultar en: <http://archive.org/stream/journalw26west#page/369/mode/1up>

Referencias de libros:

- [2] S. Timoshenko, G. MacCullohgh, *Elements of Strength of Materials*, New York: D. Van Nostrand Company, 1947, p. 167.
- [3] F Selly, J Smith, "Resistencia de Materiales", 2th ed., Ed. México: UTEHA, 1967, pp. 212.
- [4] F Singer, A Pytel, "Resistencia de Materiales", 4th ed., Ed. México: HARLA, 1994, pp.418-426.
- [5] Ortiz Berrocal, "Resistencia de Materiales" 3rd ed., Ed. España: McGraw Hil/Interamericana, 2002, pp.378-383.
- [6] R Subramanian, "*Strength of Materials*", India: Oxford University Press, 2010, p. 429-432.
- [7] McCormac J. "Análisis Estructural"
- [8] Norris W. et. al. "Anáñlisis Elemental de Estructuras" 2ª ed. en español, Ed MacGraw Hill de México, 1982.
- [9] Beer, R Johnston, T DeWolf, "Mecánica de Materiales," 4ed. Ed MacGraw Hill/Interamericana Editores, 2006.