

Regularización de problemas dinámicos inversos en la generación EEG mediante estimación dual basada en el filtro de Kalman

Dual estimation based on Kalman filtering for dynamical inverse problems regularization in EEG generation.

Carlos D. Zuluaga¹, Cesar G. Castellanos², Eduardo Giraldo³.

Ingeniería Eléctrica, Universidad Nacional de Colombia- sede Manizales y Universidad Tecnología de Pereira, Colombia
cardazu@utp.edu.co
cgcastellanos@unal.edu.co
egiraldos@utp.edu.co

Resumen— Este estudio presenta la aplicación de dos filtros de Kalman secuenciales para realizar la regularización de problemas inversos dinámicos como lo es la reconstrucción de las distribuciones de corriente en la actividad neuronal en el cerebro, a partir de señales de electroencefalografía. El filtro de Kalman es un algoritmo eficiente para reconstruir de manera óptima las densidades de corriente bajo ciertas hipótesis de operación, estas son: la relación entre estados consecutivos; estados y observaciones, son ambas distribuciones Gaussianas. La metodología propuesta obtiene resultados coherentes con el estado del arte, cuando se incrementa el número de fuentes; sin embargo se necesita un cambio en la estructura de estimación, ya que se puede incurrir en un alto costo computacional.

Palabras clave— electroencefalografía, filtro de Kalman, modelo de espacio de estado, problemas inversos dinámicos, regularización.

Abstract— This study presents the applications of two sequential Kalman filters to perform dynamic inverse problems regularization as the reconstruction of current distributions in neural activity in the brain, from electroencephalography signals. Kalman filter is an efficient algorithm for reconstructing of optimal way the current densities under some operation hypothesis, these are: the relationship between consecutive state; among a state and an observations, are both given by Gaussian distributions. The proposed methodology obtains consistent results with the state-of-the-art, when sources numbers rise; however, it needs a change in the estimation structure, since it can incur high computational cost.

Keywords —electroencephalography, Kalman filter, state-space models, dynamical inverse problems, regularization

I. INTRODUCCIÓN

En la actualidad, hay un interés considerable en conocer cómo trabaja o se comporta el cerebro humano, por lo tanto se genera o aparece el intento de reconstruir la actividad neuronal de las fuentes o distribuciones de corriente en el cerebro, a partir de señales de electroencefalografía (EEG), lo cual es un problema inverso de tipo dinámico. Uno de los principales inconvenientes para solucionar este problema, es el hecho de contar con poca información de estas fuentes en las observaciones o señales EEG medidas, para reproducir de manera precisa estas fuentes. Por esta razón, estos además de ser problemas inversos, son también problemas mal condicionados, es decir que su solución no será única, ya que el conjunto de observaciones disponibles generan una infinita cantidad de soluciones, por este motivo estos problema dinámicos inversos son atractivos por ingenieros, matemáticos y físicos.

Dentro del análisis de estos problemas inversos mal condicionados, algunos métodos han sido propuestos con el fin de encontrar una solución a estos problemas, dentro de las técnicas que analizan el problema de estimar las distribuciones de corriente a partir de la actividad neuronal del cerebro, se tienen: mínimos cuadrados [1], el cual reconstruye la solución a partir de mínimos cuadrados recursivos penalizados, usando un modelo AR(2) para simular la actividad neuronal de las fuentes, en donde los parámetros de este modelo fueron estimados por un algoritmo de optimización y el criterio de información bayesiana Akaike; otro método el cual realiza la tarea de estimar estas distribuciones de corrientes es el filtro de Kalman [2], pero en este caso usa un enfoque de máxima verosimilitud para estimar los parámetros del modelo AR(2). Este estudio se enfocará en la

¹ IJoven Investigador, Programa de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira,

² Profesor Titular, Departamento de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y Computación, Universidad Nacional de Colombia, Manizales.

³ Profesor Asistente, Programa de Ingeniería Eléctrica, Universidad Tecnológica de Pereira,

metodología basada en la estimación clásica Bayesiana como lo es el empleo del filtro de Kalman; para este trabajo se adoptó el uso de la estimación dual, la cual requiere de un enfoque secuencial, donde este usa cada dato individual, tan pronto como esté disponible, así se puede actualizar tanto como la estimación del modelo como los estados ocultos del sistema [3].

II. REGULARIZACIÓN Y PROBLEMAS INVERSOS

Por medio de la física, los principios de la teoría de los problemas inversos fueron descubiertos en la Unión Soviética con los trabajos realizados por M. G. Krein en el campo de vibraciones [4]. A partir de esto se han incrementado las investigaciones acerca de los problemas inversos y sus aplicaciones. Dentro de estas investigaciones se han planteado métodos los cuales solucionan estos problemas mal condicionados, de los que se pueden destacar los métodos basados en la regularización, los cuales uno de los más importantes fue el realizado por Andrey Tychonoff en [5]. La presentación de la aplicación de la regularización para resolver un problema inverso se puede empezar definiendo un sistema de la siguiente forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\mathbf{x}, \quad (1)$$

donde \mathbf{b} son los datos observados o los datos disponibles, \mathbf{x} son las variables de interés (donde $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$) y $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de observación, que relaciona las mediciones con las variables de utilidad.

Para (1) se puede plantear un funcional de tal forma que se puedan obtener las variables de interés, así

$$\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2, \quad (2)$$

donde se pretende minimizar el funcional $\phi(\mathbf{x})$ de (2) con respecto a \mathbf{x} . Se puede demostrar que el resultado de la minimización está dado por lo siguiente expresión [6]

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{C}^T \mathbf{C})^{-1} \mathbf{C}^T \mathbf{b} \quad (3)$$

La solución obtenida por (3), es la minimización realizada en el sentido de mínimos cuadrados, además es una expresión que usualmente entrega pobres resultados con respecto a la solución deseada, esto se debe a que los datos disponibles están contaminados por ruidos, asimismo, si se cuenta con un sistema matricial de dimensión considerable, se puede tener un cálculo costoso de la solución; para estos inconvenientes se debe agregar detalles adicionales para que la reconstrucción de las variables tengan una mayor precisión comparadas con la solución deseada. Una forma de realizar el incremento de esta precisión es introducir factores en el funcional mostrado en (2), agregando un conocimiento a priori acerca de la solución deseada y mejorando su solución, como se muestra en (4)

$$\phi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{b}\|^2 + \lambda^2 \|\mathbf{L}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|^2 \quad (4)$$

donde \mathbf{x}_0 equivale a ese conocimiento a priori, el cual tiene como objetivo garantizar que la solución sea la más deseada posible; λ es llamado comúnmente el parámetro de regularización, lo que busca es normalizar el efecto de la restricción hecha por $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$, además controla el efecto de la incertidumbre presente en el problema mal condicionado. También se incorpora un operador lineal \mathbf{L} , en donde este pretende relacionar información para que $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|^2$ sea de norma mínima, igualmente los parámetros de este operador puede tener una interpretación física, de acuerdo con el problema tratado.

A. PROBLEMA DIRECTO

La relación entre las señales EEG y la densidad o distribución de corrientes en la actividad neuronal puede ser modelada como,

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{M}\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_k, \quad (5)$$

donde \mathbf{M} es la matriz de campo, \mathbf{x}_k es el vector de densidad de corrientes en k , \mathbf{y}_k es la señal medida por los electrodos y $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ representa la características no modeladas.

Para simular la actividad neuronal en las fuentes, se utilizó el modelo de propagación lineal de primer orden descrito por (6):

$$\mathbf{x}_k = (a\mathbf{I} + b\mathbf{L}_x)\mathbf{x}_k + \boldsymbol{\eta}_k, \quad (6)$$

donde \mathbf{L}_x es la matriz de relación de cada fuente con las fuentes vecinas y su estructura se puede observar en la Fig. 1; a y b definen la velocidad de propagación temporal y espacial, respectivamente. El vector $\boldsymbol{\eta}_k$ modela estímulos externos y está dado por (7):

$$\boldsymbol{\eta}_k = 10 + \alpha \sin(2\pi\omega k) \quad (7)$$

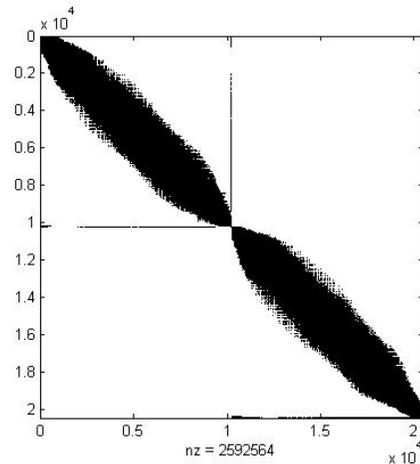


Fig. 1. Estructura de la matriz de relación de fuentes \mathbf{L}_x .

Por lo tanto el problema directo consiste en obtener las observaciones \mathbf{y}_k a partir de las densidades de corriente \mathbf{x}_k .

B. PROBLEMA INVERSO

Ya definidos los anteriores términos, se define el problema inverso como la estimación de la densidad de corriente \mathbf{x}_k dadas las observaciones, es decir se tratará de resolver el problema $\mathbf{y}_k = \mathbf{M}\mathbf{x}_k$, donde el tamaño de la matriz \mathbf{M} donde su tamaño depende del número de fuentes n y los electrodos de medida m ; El modelo expuesto en [7] pertenece a un modelo realista, que fue calculado por medio de modelos de elementos de frontera, discretizando el espacio del cerebro en tres tamaños $n = \{5124, 8196, 20484\}$ vértices y tomando $m = 32$ electrodos para la medición en la superficie del cerebro, en la Fig. 2 y 3 se pueden observar la distribución de fuentes y electrodos para el caso de $n = 20484$ y $m = 32$.

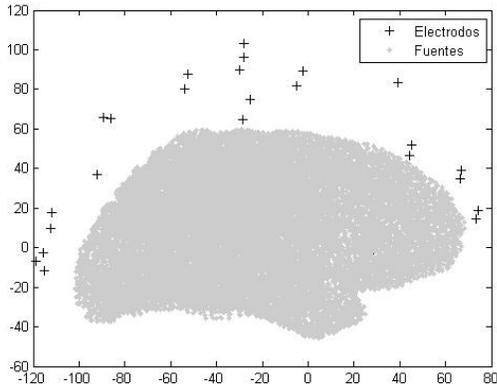


Fig. 2. Posiciones de las fuentes y electrodos, vista lateral.

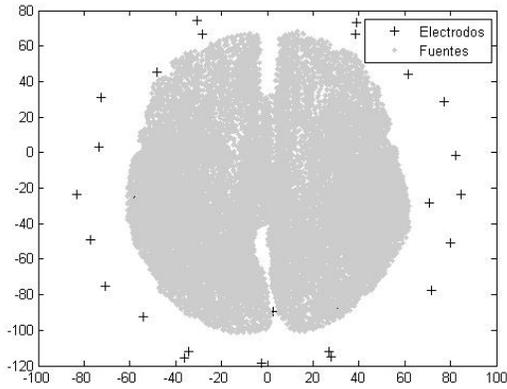


Fig. 3. Posiciones de las fuentes y electrodos, vista superior.

Por esta razón se tiene un problema inverso dado que el sistema $\mathbf{y}_k = \mathbf{M}\mathbf{x}_k$ no tiene única solución y es de tipo dinámico porque las densidades de corriente van cambiando en el tiempo como se muestra en la Ec. (6).

III. FILTRO DE KALMAN

Dentro de las aplicaciones que abarcan la regularización, existen métodos empleados para la solución o el tratamiento de problemas dinámicos lineales inversos,

donde se pueden abordar utilizando un enfoque Bayesiano, el sistema dinámico lineal puede ser presentado de la siguiente forma en espacio de estados, así

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_k &= \mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1} + \boldsymbol{\omega}_k, \\ \mathbf{y}_k &= \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k,\end{aligned}\quad (8)$$

donde $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$ son las observaciones sobre N instantes de tiempo, $\{\mathbf{x}_k\}_{k=1}^N$ son los estados del sistema, los cuales definen la dinámica del sistema (donde $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ y $\mathbf{y}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$); $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de propagación de estados, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ es la matriz de observación o de medida, $\boldsymbol{\omega}_k \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el ruido de estado en el instante k y $\mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ es el ruido de observación en el instante k . Se asume que $\boldsymbol{\omega}_k$ y \mathbf{v}_k son ruidos gaussianos de media cero que no están correlacionados, es decir $\boldsymbol{\omega}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{Q})$, $\mathbf{v}_k \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, donde $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. \mathbf{Q} y \mathbf{R} son ambas matrices de covarianza diagonales para el ruido de estado y de observación, respectivamente.

La ecuación (8) también se puede presentar en términos probabilísticos, el vector de observaciones y de estados pueden ser descritos por las siguientes funciones de probabilidad condicional,

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k &\sim \mathcal{N}(\mathbf{C}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}), \\ \mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1} &\sim \mathcal{N}(\mathbf{A}\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{Q}),\end{aligned}\quad (9)$$

donde el objetivo formal para los modelos expresados por (5) y (9) se puede ver cómo, obtener el mejor estimado actual, que sea el más probable dado el modelo y las observaciones $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$, lo anterior se puede ver en la siguiente expresión [8],

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \operatorname{argmax}\{p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1^k, \boldsymbol{\theta})\}, \quad (10)$$

donde $\boldsymbol{\theta}$ son los parámetros del modelo probabilístico descrito por (9). La densidad de probabilidad conjunta mostrada por (10), a ser maximizada puede ser rescrita como,

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1^k, \boldsymbol{\theta}) = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^k | \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^k | \boldsymbol{\theta})} = \frac{p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{y}_1^{k-1} | \boldsymbol{\theta})}{p(\mathbf{y}_1^k | \boldsymbol{\theta})}. \quad (11)$$

De (11), se puede notar que $p(\mathbf{y}_1^{k-1} | \boldsymbol{\theta})$ y $p(\mathbf{y}_1^k | \boldsymbol{\theta})$ son funcionales independientes de \mathbf{x}_k , por lo tanto, el estimado puede ser obtenido al maximizar solamente el término $p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta})$. Este puede ser expandido aplicando la regla del producto de la teoría fundamental de probabilidad, así

$$p(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}), \quad (12)$$

como $\boldsymbol{\omega}_k$ y \mathbf{v}_k son ambos ruidos gaussianos de media cero, por consiguiente, las expresiones mostradas en (12), se pueden evaluar como

$$p(\mathbf{y}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{y}_k | \mathbf{C}\mathbf{x}_k, \mathbf{R}), \quad (13)$$

$$p(\mathbf{x}_k | \mathbf{y}_1^{k-1}, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_k^-, \mathbf{P}_k^-), \quad (14)$$

donde \mathbf{x}_k^- y \mathbf{P}_k^- , son la media y la matriz de covarianza de \mathbf{x}_k dado las observaciones $\{\mathbf{y}_k\}_{k=1}^N$. Si se toma el logaritmo

negativo de (13) y (14) en (12), se puede llegar al siguiente funcional [8],

$$J(\mathbf{x}_k) = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k)^T(\mathbf{R})^{-1}(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-)^T(\mathbf{P}_k^-)^{-1}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^-) \quad (15)$$

Por lo tanto el estimado $\hat{\mathbf{x}}_k$ puede ser obtenido minimizando (15). De esta manera se toma la derivada del funcional con respecto a \mathbf{x}_k e igualando a cero, resolviendo se tiene

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\mathbf{x}_k^-). \quad (16)$$

Para (16) se tiene que,

$$\mathbf{K}_k = [(\mathbf{P}_k^-)^{-1} + \mathbf{C}^T(\mathbf{R})^{-1}\mathbf{C}]\mathbf{C}^T(\mathbf{R})^{-1}, \quad (17)$$

la expresión descrita por (17) se le denomina la ganancia de Kalman, se puede notar que el cálculo de esta ganancia necesita de la inversión de una matriz de dimensión $n \times n$, lo cual resultaría tener un costo computacional alto cuando se tiene un vector de estado de dimensión considerable. Para ello, se utiliza el lema de inversión de una matriz [8], el cual permite redefinir \mathbf{K}_k de forma tal que se tenga una inversión que solo dependa de la dimensión del vector de observaciones. Aplicando lo dicho, se llega a (18)

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}. \quad (18)$$

El filtro de Kalman para estimar los estados $\hat{\mathbf{x}}_k$ se puede resumir como se muestra en (19) a (23)

Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_0$ y \mathbf{P}_0

Para $k = 1, \dots, N$, realizar propagación,

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{A}^T + \mathbf{Q}. \quad (20)$$

Después de haber aplicado (19) y (20), se procede actualizar los estados y la matriz de covarianza, así

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T (\mathbf{C} \mathbf{P}_k^- \mathbf{C}^T + \mathbf{R})^{-1}, \quad (21)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k(\mathbf{y}_k - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (22)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_k^- + \mathbf{K}_k \mathbf{C} \mathbf{P}_k^-. \quad (23)$$

El anterior algoritmo entrega el mejor estimado de \mathbf{x}_k , si los ruidos ($\boldsymbol{\omega}_k$ y \mathbf{v}_k) y los estados \mathbf{x}_k se distribuyen de forma gaussiana. Como se definió antes la matriz \mathbf{R} es diagonal, es decir, $\mathbf{R} = \sigma^2 \mathbf{I}$, donde σ^2 se puede relacionar como un término de regularización dado por $\lambda^2 = 1/\sigma^2$. También de lo anterior se puede observar que la matriz de covarianza \mathbf{P}_k^{-1} corresponde a un operador lineal, el cual mejora la estimación, esta relación se puede ver como $\mathbf{P}_k^{-1} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$.

A. ESTIMACIÓN DUAL BASADA EN EL FILTRO DE KALMAN

Suponiendo que se tiene un modelo descrito por (8), donde solo se tiene acceso a la señal de salida \mathbf{y}_k , adicionalmente se tiene información de los estados del sistema, con lo anterior planteado, se reescribe el sistema tomando una estructura matricial así [9]:

$$\mathbf{Y}_k = [\mathbf{x}_{k+1}], \boldsymbol{\Theta}_k = [\mathbf{A}_k], \boldsymbol{\Phi}_k = [\mathbf{x}_k], \mathbf{V}_k = [\boldsymbol{\omega}_k], \quad (24)$$

Frente lo plasmado en (24) el sistema mostrado en (8) puede ser descrito por (25),

$$\mathbf{Y}_k = \boldsymbol{\Theta}_k \boldsymbol{\Phi}_k + \mathbf{V}_k. \quad (25)$$

Para llevar a cabo la estimación de los parámetros $\boldsymbol{\Theta}$ se necesita tener conocimiento de los estados, para ello se plantea un método de estimación dual mediante una forma secuencial. El enfoque secuencial usa cada dato individual, tan pronto como esté disponible, así se puede actualizar tanto la estimación del modelo como la señal que se quiere determinar. Esta característica hace estos algoritmos atractivos para aplicaciones *on-line* o inclusive *off-line* [3]. Después de haber hecho este arreglo matricial, el modelo para estimar los parámetros se describe como,

$$\boldsymbol{\Theta}_k = \boldsymbol{\Theta}_{k-1} + \mathbf{r}_k, \quad \mathbf{Y}_k = \boldsymbol{\Theta}_k \boldsymbol{\Phi}_k + \mathbf{V}_k, \quad (26)$$

donde \mathbf{r}_k es el ruido en los parámetros, que para este estudio se asumirá ser Gaussiano, con media cero y matriz de covarianza diagonal \mathbf{Q}_θ . Si se parte del sistema planteado por la Ec. (26), se puede llegar al siguiente funcional,

$$J(\boldsymbol{\Theta}_k) = \frac{1}{2}(\mathbf{Y}_k - \boldsymbol{\Theta}_k \boldsymbol{\Phi}_k)^T(\mathbf{R}_\theta)^{-1}(\mathbf{Y}_k - \boldsymbol{\Theta}_k \boldsymbol{\Phi}_k) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Theta}_k - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_k^-)^T(\mathbf{P}_{\theta k}^-)^{-1}(\boldsymbol{\Theta}_k - \hat{\boldsymbol{\Theta}}_k^-), \quad (27)$$

donde \mathbf{R}_θ es la matriz de covarianza diagonal constante del ruido en las observaciones y estados; \mathbf{Q}_θ es la matriz de covarianza diagonal del ruido en los parámetros; $\hat{\boldsymbol{\Theta}}_k^-$ y $\mathbf{P}_{\theta k}^-$ son la media y la matriz de covarianza de los parámetros dado las observaciones y los estados.

La estimación dual usando el filtro de Kalman (DKF) para la estimación de estados y parámetros se puede aplicar por medio de (28) a (37),

Inicializar $\hat{\mathbf{x}}_0, \hat{\boldsymbol{\Theta}}_0, \mathbf{P}_{x_0}$ y \mathbf{P}_{θ_0}

Para $k = 1, \dots, N$, realizar propagación,

Parámetros

$$\boldsymbol{\Theta}_k^- = \hat{\boldsymbol{\Theta}}_{k-1}, \quad (28)$$

$$\mathbf{P}_{\theta_k}^- = \mathbf{P}_{\theta_{k-1}} + \mathbf{Q}_{\theta}. \quad (29)$$

Estados

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A}_k \hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad (30)$$

$$\mathbf{P}_{x_k}^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{x_{k-1}} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{Q}_x. \quad (31)$$

Después de haber aplicado (28) a (31), se procede a realizar la etapa de actualización de los estados y los parámetros, así,

Parámetros

$$\mathbf{L}_k = \mathbf{P}_{\theta_k}^- \Phi_k (\Phi_k^T \mathbf{P}_{\theta_k}^- \Phi_k + \mathbf{R}_{\theta})^{-1}, \quad (32)$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \boldsymbol{\theta}_k^- + \mathbf{L}_k (\mathbf{Y}_k - \Phi_k^T \boldsymbol{\theta}_k^-), \quad (33)$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{P}_{\theta_k}^- + \mathbf{L}_k \Phi_k^T \mathbf{P}_{\theta_k}^-. \quad (34)$$

Estados

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{x_k}^- \mathbf{C}_k^T (\mathbf{C}_k \mathbf{P}_{x_k}^- \mathbf{C}_k^T + \mathbf{R}_x)^{-1}, \quad (35)$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{y}_k - \mathbf{C}_k \hat{\mathbf{x}}_k^-), \quad (36)$$

$$\mathbf{P}_{x_k} = \mathbf{P}_{x_k}^- + \mathbf{K}_k \mathbf{C}_k \mathbf{P}_{x_k}^-. \quad (37)$$

IV. VALIDACIÓN

Con el fin de obtener medidas cuantitativas de rendimiento del método propuesto, se emplearon tres métricas, como: error residual, error absoluto, error proyectado y el tiempo de cálculo.

$$E_{res} = \|\mathbf{y} - \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad (38)$$

$$E_{abs} = \|\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad (39)$$

$$E_{proyec} = \|\mathbf{x}_{proy} - \hat{\mathbf{x}}\|^2, \quad (40)$$

donde \mathbf{x}_{proy} son los estados proyectados, esto se debe a que cuando se realiza la solución de los problemas inversos se llega a un resultado que no está dentro del espacio en donde se encuentra la solución, por lo tanto, hay que efectuar una proyección ya sea de la solución a el espacio en donde se encuentra los valores estimados o viceversa, para desarrollar esta operación se adopta la siguiente expresión de proyección [10],

$$\mathbf{x}_{proy} = \sum_{i=1}^r \langle \mathbf{x}_{real}, \mathbf{V}_i \rangle \mathbf{V}_i, \quad (41)$$

donde $r = \text{rango}(\mathbf{C})$ y \mathbf{V}_i son los vectores propios de los datos originales o reales \mathbf{x}_{real} . De esta manera se puede llegar a calcular errores relativos entre los datos recuperados por el método y los proyectados de los valores originales, así se podrá calcular buenas medidas de precisión para realizar una buena comparación.

V. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

Se pretende resolver el problema $\mathbf{M}\mathbf{x}_k = \mathbf{y}_k$, es decir, la determinación de densidades de corrientes en la actividad neuronal del cerebro mediante la estimación dual basado en el filtro de Kalman (DKF), basándose en medidas eléctricas y magnéticas por medio de electrodos en la superficie del cerebro; para ello se generaron 100 muestras a partir de (5) y (6), donde $a = 0.5$, $b = 0.2$, la matriz de relación de fuentes \mathbf{L}_x es representada por la Fig. 1 [10]; se definió $\alpha = 3$ y $\omega = 10\text{Hz}$ [10]; además se tuvo en cuenta una variación en los niveles de ruido (relación señal a ruido (SNR)) en (5), en otras palabras, se realizaron pruebas para un SNR de 5 dB, 10 dB, 15 dB, 20 dB, 25 dB y 30 dB. También se contó con el modelo expuesto en [9], con $n = \{500, 1000, 5000\}$ fuentes o vértices, tomando estas cantidades con el fin de observar los resultados arrojados por el método propuesto, ya que esta técnica estima en cada iteración una matriz de $n \times n$, por esto, se decidió solamente contar con este número de fuentes; y además se tomó $m = 32$ electrodos.

En la Tabla 1 se presenta los resultados de los errores residuales, proyectados y sin normalizar, para el caso de estimar las fuentes \mathbf{x}_k de (41).

Tabla 1. Resultados al aplicar el algoritmo DKF al modelo EEG SNR 5 dB

Orden	Eres	Eproyec	Eabs	T_{ejec} [s]
500	8.9827e-08	0.02178	0.05992	64.0862
1000	6.8241e-08	0.008983	0.03802	523.3205
5000	3.9787e-08	0.0005638	0.006609	63222,2649
SNR 10 dB				
500	2.961e-08	0.01413	0.06956	64.3982
1000	2.1282e-08	0.003205	0.03584	529.4004
5000	1.1441e-08	0.0001841	0.006379	62551,2301
SNR 15 dB				
500	9.2265e-09	0.01021	0.05847	64.2254
1000	6.996e-09	0.001534	0.03026	527.1357
5000	3.8284e-09	7.0296e-05	0.006255	62359,1366
SNR 20 dB				
500	2.4693e-09	0.01309	0.05192	64.9556
1000	2.0754e-09	0.003034	0.02953	529.8904
5000	2.0568e-09	0.0007829	0.004181	62120,8938
SNR 25 dB				
500	1.0368e-09	0.008968	0.05942	64.3655
1000	8.9336e-10	0.0009267	0.03036	524.3486
5000	5.8293e-10	3.7933e-05	0.006319	62155,1466
SNR 30 dB				
500	5.5066e-10	0.0093564	0.059414	64.4646
1000	3.1862e-10	0.00084264	0.030535	531.8389
5000	1.7054e-10	2.2976e-05	0.0062891	62781,6728

Una de las características importantes que se puede notar en la Tabla 1, es que a medida que se incrementa las fuentes (el orden n), disminuyen los errores, además se nota que para el caso de tener un nivel de ruido del 30% la correspondencia de las señales tienen errores relativamente pequeños, es decir los errores residuales también se hacen pequeños a medida que se aumentan las fuentes.

Una de las medidas más importantes de esta tabla son los errores proyectados, ya que tiene una relación fuerte entre la solución real y la obtenida por el método; en la Tabla 1 se muestra que el algoritmo arroja una equivalencia notoria con respecto a la solución deseada, es decir, para el peor de los casos el de tener un ruido del 30% (SNR de 5dB) se tienen errores entre el 0,06% y el 2%. Por tanto, se tiene que la reconstrucción de las densidades de corriente a partir de las medidas obtenidas por los electrodos, tienen un buen grado de relación entre las fuentes reales simuladas. Algo adicional que se puede notar de estos resultados es que el tiempo de cálculo incrementa a medida que se eleva el orden del sistema o se aumenta el número de fuentes a estimar, por lo tanto se sugiere otra estructura de estimación de parámetros, ya que este método en cada iteración debe estimar una matriz del tamaño del orden del sistema ($n \times n$).

También de la Tabla 1, se puede observar que para el error absoluto, la cual es una medida de correspondencia entre los estados reales y los estados estimados por la técnica, se obtienen errores menores al 7%, reportando que ante un porcentaje considerable de ruido presente en las señales EEG, el método reconstruye de manera adecuada las densidades de corrientes en la actividad neuronal en el cerebro.

VI. CONCLUSIONES

En el presente estudio se planteó la regularización de problemas dinámicos lineales inversos mediante la estimación dual basado en el filtro de Kalman, el cual arrojó resultados notorios para la reconstrucción de las densidades de corrientes a partir de mediciones de señales EEG, donde se pudo observar que a medida que se incrementa el orden del sistema se obtiene errores menores al 2%, validando la efectividad del método para solucionar estos problemas mal condicionado.

Una de las cosas importantes de la estimación dual es la determinación de los estados y los parámetros dentro de un mismo enfoque, sin embargo, el método realiza la aproximación de todos los componentes de la matriz de transición entre estados, lo cual hace que el algoritmo realice procesos matriciales en un tiempo no muy adecuado, haciendo que la aplicación se deba correr en equipos con buenas características.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se desarrolló en el marco del proyecto de investigación: “Identificación de parámetros de sistemas multivariados basado en el filtro de Kalman y filtro de partículas dando robustez a outliers” en el programa de jóvenes investigadores “Virginia Gutiérrez de Pineda” y fue financiado por medio de Colciencias y la Universidad Tecnológica de Pereira.

VII. REFERENCIAS

- [1] O. Yamashita, A. Galka, T. Ozaki, R. Biscay, and P. Valdes-Sosa, “Recursive penalized least squares solution for dynamical inverse problems of EEG generation”, *Human Brain Mapping*, vol. 21, no. 4, pp. 221–235, 2004.
- [2] A. Galka, O. Yamashita, T. Ozaki, R. Biscay, and P. Valdes-Sosa, “A solution the dynamical inverse problems of EEG generation using spatiotemporal Kalman filtering”, *NeuroImage*, vol. 23, no. 2, pp. 435–453, 2004.
- [3] S. Haykin, *Kalman Filtering and Neural Networks*. Wiley-Interscience. 2001.
- [4] G. Gladwell, “Inverse problems for jacobi systems,” in *Inverse Problem in vibration*, ser. Solid Mechanics and Its Applications. Springer Netherlands, vol. 119, pp. 63–92, 2005.
- [5] A. Tychonoff, “Théorèmes d’unicité pour l’équation de la chaleur”, *Mat. Sb.*, vol. 42, pp. 199–216, 1935.
- [6] R. F. Stengel, *Optimal Control and Estimation*. New York: Dover, 1994.
- [7] V. Litvak, J. Mattout, S. Kiebel, C. Phillips, R. Henson, J. Kilner, G. Barnes, R. Oostenveld, J. Daunizeau, G. Flandin, W. Penny and K. Friston, “EEG and MEG data analysis in SPM8”, *Comput. Intell. Neurosci.*, vol. 2011, no 852961, 2011.
- [8] A. Nelson, “Nonlinear estimation and modeling of noisy time-series by dual Kalman filtering methods”, Ph.D dissertation, 2000.
- [9] L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, 2nd ed. Prentice Hall, 1999.
- [10] L. Martínez, “Regularización de problemas dinámicos inversos”, Master’s thesis, Universidad Nacional, Manizales, 2011.