

ASPECTOS ANALÍTICOS DE LA BIFURCACIÓN ZIP

Analytical aspects of the zip bifurcation

Carlos Mario Escobar Callejas^{1*}, José Rodrigo González Granada², Óscar Fernández S³.

Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira, Pereira, Colombia

ccescobar@utp.edu.co

jorodryy@utp.edu.co

oscarf@utp.edu.co

Resumen— En el presente artículo de investigación se estudian aspectos analíticos relacionados con el comportamiento dinámico y asintótico de la componente real de los valores propios de la linealización del sistema a lo largo de un conjunto continuo de equilibrios L_K en un modelo del tipo predador presa generado a partir de un campo tridimensional no lineal diferenciable que presenta el fenómeno de la bifurcación zip. Estas relaciones analíticas son interesantes, ya que ellas permiten realizar una nueva prueba de la existencia de la bifurcación zip dada por el Profesor Miklós Farkas en [5] la cual puede extenderse al análisis de la componente imaginaria de los valores propios de la linealización del sistema a lo largo de L_K para tratar la bifurcación en sistemas dinámicos no suaves.

Palabras clave— Atractividad, bifurcación zip, respuesta funcional, sistema dinámico no suave.

Abstract—This research paper examines analytical aspects related to the dynamic and asymptotic behavior of the real component of the eigenvalues of the linearization of the system along a continuum of equilibria L_k in a Type predator prey system generated from a differential nonlinear three-dimensional field which exhibits phenomenon of zip bifurcation. These analytical relationships are interesting, since they allow a new proof of the existence of the zip bifurcation, given by Professor Miklos Farkas in [5] which can be extended to the analysis of the imaginary component of the eigenvalues of the linearization system along L_K to treat bifurcation zip in non-smooth dynamic systems.

Key Word — Attractiveness, zip bifurcation functional response, non-smooth dynamic systems

I. INTRODUCCIÓN

Farkas [5] ha introducido el concepto de bifurcación zip en un sistema suave (campo diferenciable) de EDO tridimensional del tipo predador-presa el cual modela la competición de dos predadores con respuesta funcional tipo Holling II por una presa que se regenera, para denotar el

siguiente fenómeno. "A bajos valores de la capacidad de carga k del ecosistema con respecto a la presa, una línea de equilibrios L_k es un atractor del sistema, ella representa coexistencia estable de las tres especies. Si k es incrementado los equilibrios de L_k son continuamente desestabilizados, empezando por aquellos, que representan la dominancia del k -estratega sobre el r -estratega. Arriba de cierto valor de k , el sistema no tiene más equilibrios estables que representen coexistencia; sin embargo, un ciclo límite permanece representando la oscilación de coexistencia del r -estratega y la presa". Posteriormente Farkas, E. Saéz and Szantó [7] han generalizado el fenómeno de bifurcación zip a un sistema suave EDO cuatro dimensional con respuesta funcional generalizada tipo Holling III, Kiss [13] ha generalizado la bifurcación zip en un sistema predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Ivle. Ferreira y Olivera [8] han tratado la ocurrencia de la bifurcación zip en un sistema suave predador-presa $(n+1)$ -dimensional con respuesta funcional tipo Holling II y en [9] han mostrado la ocurrencia de la bifurcación zip en sistemas predador-presa que presentan reacción difusión.

Recientemente Escobar [4] siguiendo ideas semejantes a las dadas por Leine, Van de Campen, Van de Vrande [15] el cual ha demostrado la existencia de una contrapartida no suave en sistemas suaves por tramos continuos para las bifurcaciones uniparamétricas de estado estacionario más conocidas, como la bifurcación silla-nodo, la transcítica, Hopf y de Yu. A Kuznetsov*, S. Rinaldi and A. Gragnani [14] para la clase más simple de sistema de Filippov llamados sistemas planares genéricos para los cuales se deriva un catálogo completo de bifurcaciones deslizantes locales y globales de codimensión 1; se demuestra la existencia del fenómeno de bifurcación zip y se deriva un catálogo completo de bifurcaciones zip no-suaves de codimensión 1 en sistemas no suaves (continuos por tramos). Para realizar la extensión propuesta de la bifurcación zip en sistemas no suaves es necesario un completo análisis del comportamiento de la componente real como de la componente imaginaria de los valores propios asociados a la linealización de los subsistemas que componen el sistema no suave a lo largo de su conjunto de equilibrios L_k , ya que la estabilidad de los punto de equilibrio L_k en sistemas no suaves es determinada tanto por

la componente real como por la componente imaginaria de los valores propios, véase Freire, Ponce, Rodriguez y Torres [10]; Camlibel [2]; Oliviar y Angulo [16]; Carmona, Freire, Ponce y Torres [3].

En el presente artículo de investigación, inicialmente sólo tratamos la caracterización analítica de las componentes reales de los valores propios de la linealización de un sistema suave (campo diferenciable) de EDO tres-dimensional del tipo predador-presa con respuesta funcional satisfaciendo las condiciones denominadas de Butler-Farkas [5, 6] para luego realizar una prueba de la existencia de la bifurcación zip en sistemas suaves distinta de la presentada por Farkas en [6] la cual tiene la utilidad de poderse aplicar al análisis de las condiciones de existencia de la bifurcación zip en sistemas no suaves. Aclaramos que el análisis de las componentes imaginarias de los valores propios de la linealización del sistema suave (campo diferenciable) y su posterior aplicación a la demostración de la existencia de la bifurcación zip en sistemas no suaves, será tema a desarrollar en artículos siguientes dado su extensión y complejidad.

II. ANÁLISIS DINÁMICO DE LA COMPONENTE REAL

En el presente artículo se considera el análisis de bifurcación zip en un sistema suave (campo diferenciable) EDO tres-dimensional del tipo predador-presa del tipo:

$$\begin{aligned} \dot{s} &= \gamma s g(s, k) - \sum_{i=1}^2 p(s, a_i) x_i \\ \dot{x}_i &= p(s, a_i) x_i - d_i x_i, \\ p(\lambda, a_i) &= d_i, i = 1, 2. \end{aligned} \tag{2.1}$$

En este modelo se nota el punto encima de la letra como diferenciación con respecto al tiempo.

Aquí x_i y s son el tamaño de la población de los predadores i y el de la presa que se regenera, respectivamente; $\gamma > 0$ es la tasa de crecimiento intrínseca de la presa, $k > 0$ es la capacidad de carga del medio con respecto a la presa; $d_i > 0$ y $a_i > 0$ son la tasa de muerte y el parámetro de escala en la respuesta funcional del predador i ($i = 1, 2$), respectivamente. En este modelo la constante λ se introduce teniendo el siguiente significado: x_i se incrementa si y sólo si $s > \lambda$, según sea x_i positivo, llegando a ser cero en $s = \lambda$, véase Wilken [17]. Se presume además que en el modelo se ha demostrado que la tasa de desarrollo de la presa γg y la respuesta funcional del depredador p son funciones arbitrarias que satisfacen ciertas condiciones naturales denominadas de Butler-Farkas, véase [1,6]:

La función g satisface las condiciones:

$$\begin{aligned} g &\in C^2((0, \infty) \times (0, \infty), R), g \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R), \\ g(0, k) &= 1, \partial_s g(s, k) < 0 < \partial_{sk}^2 g(s, k), \partial_k g(s, k) > 0, k > 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma g(s, k) = \gamma, \quad s \geq 0. \tag{2.3}$$

A la función g se le impone condiciones de uniformidad en $[\delta, s_0]$ para cualquier, $0 < \delta < s_0$, y la integral posiblemente

impropia $\int_0^{s_0} \partial_s g(s, k) ds$ debe ser uniformemente convergente en $[k_0, \infty)$, para cualquier valor $k_0 > 0$. Por último se tiene la condición siguiente sobre g :

$$(k - s)g(s, k) > 0, \quad s \geq 0, k > 0, s \neq k. \tag{2.4}$$

La función que representa la respuesta funcional del predador i , $p(s, a_i)$ con a_i constante, ($i = 1, 2$) satisface las siguientes condiciones:

$$p \in C^1((0, \infty) \times (0, \infty), R), p \in C^0([0, \infty) \times (0, \infty), R),$$

$$p(0, a_i) = 0, \quad p(s, a_i) > 0, \quad s > 0, a_i > 0, \tag{2.5}$$

$$p_s(s, a) < \frac{p(s, a)}{s}, \quad s > 0, a > 0 \tag{2.6}$$

$$p_a(s, a) < 0, \quad s > 0, a > 0. \tag{2.7}$$

Las condiciones de (2.2) a (2.7) son condiciones suficientes para la existencia de la bifurcación zip en el modelo considerado, véase Farkas [6].

A. Planteamiento del sistema

Se considera el sistema de ecuaciones diferenciales tridimensional (2.1) que describe la competición de dos depredadores con idéntica respuesta funcional p por una presa singular que se regenera, bajo el supuesto de que existe una cantidad de presa común a ambos predadores, bajo la cual sus tasas de nacimiento y muerte llegan a ser iguales, es decir, existen un parámetro umbral, y un parámetro de escala a tales que $\lambda_i = \lambda$ y $p(\lambda, a_i) = d_i = d$. Tal es el caso de la competición de especies similares o también, de la competición intraespecífica entre la misma especie depredadora. En lo que sigue se considera el sistema (2.1) satisface las condiciones de Butler-Farkas [1,6].

B. Equilibrios del sistema

Los equilibrios del sistema (2.1) son $Q_1(0, 0, 0)$, $Q_2(k, 0, 0)$, y los puntos del segmento de línea recta L_k en el octante positivo del espacio s, x_1, x_2 :

$$L_k = \left\{ \begin{aligned} (s, x_1, x_2) \in R^3 : p(\lambda, a_1)x_1 + p(\lambda, a_2)x_2 = \lambda g(\lambda, k); \\ s = \lambda, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{aligned} \right\} \tag{2.8}$$

Los puntos que pertenecen a L_k se denotan con (λ, ξ_1, ξ_2) . Los puntos extremos del segmento de línea, es decir, los equilibrios en los planos $x_1 = 0$, y $x_2 = 0$, respectivamente, son:

$$P_1 = (\lambda, 0, \xi_2) = (\lambda, 0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_2)}),$$

$$P_2 = (\lambda, \xi_1, 0) = (\lambda, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, 0). \tag{2.9}$$

Es fácil ver por linealización que Q_1 es inestable, y Q_2 es asintóticamente estable para $k < \lambda$, e inestable para $k > \lambda$. Se conoce de Hse [12] que la desigualdad $k > \lambda$ es una condición necesaria para la supervivencia de cada predador. Por la condición (2.4), si k es menor que λ entonces L_k es vacío, y si $k = \lambda$, entonces L_k consta sólo del origen Q_1 . Por lo tanto nos limitaremos al estudio de la estabilidad de los puntos sobre el segmento de línea recta L_k . La matriz Jacobiana que representa la linealización del sistema (2.1) en un punto arbitrario (λ, ξ_1, ξ_2) de L_k es:

$$J = \begin{pmatrix} \gamma g(\lambda, k) + \gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k) - \xi_1 \partial_s p(\lambda, a_1) & d_1 & d_2 \\ -\xi_2 \partial_s p(\lambda, a_2) & 0 & 0 \\ \xi_1 \partial_s p(\lambda, a_1) & 0 & 0 \\ \xi_2 \partial_s p(\lambda, a_2) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.10}$$

El polinomio característico de $J = J(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ está dado por:

$$Det[J - \mu I_3] = \mu(\mu^2 + \xi_1 \partial_s p(\lambda, a_1) + \xi_2 \partial_s p(\lambda, a_2) - \gamma g(\lambda, k) - \gamma \lambda g_s(\lambda, k))\mu + \xi_1 p(\lambda, a_1) \partial_s p(\lambda, a_1) + \xi_2 p(\lambda, a_2) \partial_s p(\lambda, a_2) \tag{2.11}$$

despejando ξ_2 en (2.8) se tiene

$$\xi_2 = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k) - p(\lambda, a_1) \xi_1}{p(\lambda, a_2)} \tag{2.12}$$

Teniendo en cuenta (2.12) en el polinomio característico (2.11). Los valores propios de $J = J(\lambda, \xi_1, \xi_2)$, vienen dados por

$$\mu_0 = 0$$

$$\mu_1 = a(\xi_1, k) + b(\xi_1, k)i$$

$$\mu_2 = a(\xi_1, k) - b(\xi_1, k)i$$

$$a(\xi_1, k) = \frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p(\lambda, a_1)}{2 p(\lambda, a_2)} \xi_1 + \frac{\gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2))}{2 p(\lambda, a_2)}$$

Así que $\mu_0 = 0$ es siempre un valor propio y μ_1, μ_2 son valores propios complejos (no reales) conjugados cuando $b(\xi_1, k) \neq 0$ o reales del mismo signo cuando $b(\xi_1, k) = 0$.

Por conveniencia en la descripción de la dinámica de los valores propios introducimos la siguiente notación

$$m = \frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p(\lambda, a_1)}{2 p(\lambda, a_2)} \tag{2.13}$$

$$c(k, a) = \frac{\gamma \lambda \partial_s g(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2))}{2 p(\lambda, a_2)} \tag{2.14}$$

La variable $c(k, a)$ nos será útil para expresar algunas simetrías de la parte real de los valores propios de la linealización del sistema en los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k respectivamente, y m tiene el siguiente significado: si $m > 0$, el modelo es real, pero si $m < 0$, el modelo es artificial de acuerdo con las definiciones dadas en [6]. De las expresiones de (2.13)-(2.14) se puede escribir

$$a(\xi_1, k) = m \xi_1 + c(k, a_2) \tag{2.15}$$

A continuación se establecen los puntos de bifurcación del sistema (2.1) con respecto al segmento de equilibrios L_k . La condición que establece los puntos de bifurcación en el sistema (2.1) es aquella en la cual el segmento de equilibrios L_k cambian su tipo de estabilidad y esto ocurre en nuestro caso cuando $a(\xi_1, k) = 0$, en los extremos de L_k .

A continuación se establece una propiedad de simetría algebraica de los puntos extremos del segmento de equilibrios L_k .

Proposición 1: Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}$ las

componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k , entonces se tiene la siguiente propiedad de simetría

$$a(\xi_{10}, k) = c(k, a_2), \tag{2.16}$$

$$a(\xi_{11}, k) = c(k, a_1), \tag{2.17}$$

Prueba: Que $a(\xi_{10}, k) = c(k, a_2)$ se sigue inmediatamente de (2.15). También de (2.15) se tiene

$$\begin{aligned} a(\xi_{11}, k) &= m \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{2p(\lambda, a_1)} + c(k, a_1) \\ &= \frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p(\lambda, a_1)}{2p(\lambda, a_2)} \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \\ &+ \frac{\gamma \lambda \partial_{s,g}(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)} \end{aligned}$$

Observe que el lado derecho de la última igualdad se escribe como:

$$\begin{aligned} &\frac{p(\lambda, a_1) \partial_s p(\lambda, a_2) - p(\lambda, a_2) \partial_s p(\lambda, a_1)}{2p(\lambda, a_2)} \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)} \\ &+ \frac{\gamma g(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)} + \frac{\gamma \lambda \partial_{s,g}(\lambda, k)}{2} \\ &= \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{2p(\lambda, a_1)} (p(\lambda, a_1) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_1)) + \frac{\gamma \lambda \partial_{s,g}(\lambda, k)}{2} \\ &= c(k, a_1) \end{aligned}$$

de lo cual se concluye (2.17) y se termina la prueba. \square

Lema 2: Considere $\xi_{10} = 0$ y $\xi_{11} = \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}$ las

componentes de ξ_1 del extremo superior e inferior respectivamente del segmento de equilibrios L_k ; entonces $a(\xi_1, k)$ es creciente con respecto al parámetro k . Además

para cada $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, existe un único

$\bar{k}(\xi_1) \in (\lambda, \infty)$ tal que $a(\xi_1, k(\xi_1)) = 0$.

Prueba: Note que

$$\partial_k a(\xi_1, k) = \frac{\gamma \lambda \partial_{s,g}^2(\lambda, k)}{2} + \frac{\gamma \partial_{k,g}(\lambda, k)(p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2))}{2p(\lambda, a_2)} > 0, \quad (2.18)$$

de las condiciones (2.2), (2.5) y (2.6). Para demostrar la segunda parte del lema, nosotros probamos la existencia y unicidad de $\bar{k}(\xi_1)$ tal que $a(\xi_1, \bar{k}(\xi_1)) = 0$, en cada

extremo del intervalo $[0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, después mostramos el

mismo resultado en cada punto interior del intervalo. De la expresión (2.15), la condición (2.2) y (2.4) se tiene

$$\begin{aligned} a(\xi_{10}, k) &= c(k, a_2) \\ a(0, \lambda) &= \frac{\gamma \lambda \partial_{s,g}(\lambda, k)}{2} < 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

También por (2.2), (2.3) y (2.5), (2.6) se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a(\xi_{10}, k) = \gamma \frac{p(\lambda, a_2) - \lambda \partial_s p(\lambda, a_2)}{2p(\lambda, a_2)} > 0$$

por lo tanto de (2.18), (2.19) y (2.20) se tiene que existe un único $\bar{k}(\xi_{10})$ tal que $a(\xi_{10}, k(\xi_{10})) = 0$. Además de la simetría dada en (2.17) se tiene que existe único $\bar{k}(\xi_{11})$ tal que

$a(\xi_{11}, k(\xi_{11})) = 0$. Para probar que por cada $\xi_{11} \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$,

existe $\bar{k}(\xi_1)$ único tal que $a(\xi_1, k(\xi_1)) = 0$, se observa que de (2.15) se obtiene

$$\partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) = m$$

Si $m = 0$, $a(\xi_1, \bar{k}(\xi_1))$ es una función constante de ξ_1 . De la primera parte del Lema 2, $a(\xi_{10}, \bar{k}(\xi_{10})) = 0$, así que por cada

$\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$ se tiene que $a(\xi_{10}, \bar{k}(\xi_{10})) = 0$. La unicidad

de \bar{k} se sigue del hecho que $a(\xi_1, k)$ se incrementa con k . En

otro caso, $m > 0$, $a(\xi_1, k)$ se incrementa con ξ_1 y para cada

$\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$ y $k > 0$, se tiene

$a(\xi_{10}, k) < a(\xi_1, k) < a(\xi_{11}, k)$. Considere a k_0 tal que $a(\xi_{11}(k_0), k_0) < 0$, entonces $a(\xi_1, k_0) < 0$, para cada

$\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$. Similarmente, si se toma k_1 tal que

$a(\xi_{10}, k_1) > 0$, entonces $a(\xi_1, k_1) > 0$, luego $a(\xi_1, k)$ cambia de

signo, la unicidad se sigue del hecho que $a(\xi_1, k)$ se incrementa con k . La prueba en el caso $m < 0$, es análoga. \square

Por conveniencia introducimos la siguiente definición.

Definición 3: Se denota por k_{a1} y k_{a2} a los puntos de bifurcación del sistema suave (2.1), con respecto a la parte real de los valores propios a lo largo del segmento de equilibrios L_k , los cuales satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} a(\xi_{10}, k_{a2}) &= 0, \\ a(\xi_{11}(k_{a1}), k_{a1}) &= 0. \end{aligned}$$

Se entiende ξ_{11} como $\xi_{11}(k_1)$ en caso de omisión de la variable k .

Claramente la Definición 3, tiene sentido por el Lema 2.

A continuación se establece una relación de orden entre los valores de bifurcación k_{a2} y k_{a1} del sistema suave (2.1) de acuerdo a si el modelo es natural, artificial o degenerado.

Proposición 4: Los puntos de bifurcación k_{a2} y k_{a1} del sistema suave (2.1), satisfacen la siguiente relación

$$\begin{aligned} k_{a2} &< k_{a1} & \text{si } m < 0, \\ k_{a2} &= k_{a1} & \text{si } m = 0, \\ k_{a1} &> k_{a2} & \text{si } m > 0. \end{aligned}$$

Prueba: De (2.15) se tiene que

$$\begin{aligned} \partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) &= m, \\ \text{como } a(\xi_{10}, k_{a2}) &= 0, \text{ luego} \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$a(\xi_{11}, k_{a_2}) = \begin{cases} < 0 & \text{si } m < 0, \\ 0 & \text{si } m = 0, \\ > 0 & \text{si } m > 0. \end{cases}$$

Como $\partial_k a(\xi_1, k) > 0$, $\xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}]$, entonces si

$$a(\xi_1, k_{a_2}) = 0, \text{ implica que } \begin{cases} k_{a_2} < k_{a_1} & \text{si } m < 0, \\ k_{a_2} = k_{a_1} & \text{si } m = 0, \\ k_{a_2} > k_{a_1} & \text{si } m > 0, \end{cases}$$

con lo cual se termina la prueba \square .

A continuación se muestra la ocurrencia de la bifurcación zip para el sistema suave (2.1) la cual depende de la evolución de la componente real de los valores propios conjugados μ_1 y μ_2 de $J = J(\lambda, \xi_1, \xi_2)$. Los valores propios conjugados μ_1 y μ_2 de $J = J(\lambda, \xi_1, \xi_2)$ tienen parte real negativa, si y únicamente si $a(\xi_1, k) < 0$, es decir

$$m\xi_1 + c(k, a_2) < 0, \tag{2.21}$$

Se considera el segmento de línea recta L_{ak} siguiente

$$L_{ak} = \left\{ \begin{aligned} & (s, \xi_1, a(\xi_1, k)) : a(\xi_1, k) = m\xi_1 + c(k, a_2); \\ & s = \lambda, \xi_1 \in [0, \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}] \end{aligned} \right\}. \tag{2.22}$$

Fijando k , se puede determinar el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k)) \in L_k$ en que la linealización del sistema suave (2.1) tiene valores propios con componente real cero, es decir $a(\xi_1, k) = 0$. Dicho punto se obtiene resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} m\xi_1 + c(k, a_2) &= 0, \\ p(\lambda, a_1)\xi_1 + p(\lambda, a_2)\xi_2 &= \gamma \lambda g(\lambda, k), \text{ con } \xi_1, \xi_2 > 0, \end{aligned}$$

(véase 2.22) y viene dado, después de algunas simplificaciones, por

$$\hat{\xi}_1(k) = -\frac{c(k, a_2)}{m}, \tag{2.23}$$

$$\hat{\xi}_2(k) = \frac{c(k, a_1)p(\lambda, a_1)}{mp(\lambda, a_2)}. \tag{2.24}$$

Como una preparación al teorema siguiente, se comentan algunas propiedades de las funciones $\hat{\xi}_1(k)$ y $\hat{\xi}_2(k)$. De las expresiones (2.16) y (2.17), claramente se concluye que el denominador de $\hat{\xi}_1(k)$ y $\hat{\xi}_2(k)$ es positivo, negativo o cero si el modelo es natural, artificial, o degenerado respectivamente. Igualmente se puede señalar que las funciones $\hat{\xi}_1(k)$ y $\hat{\xi}_2(k)$ son estrictamente creciente y estrictamente decreciente respectivamente, si se considera que el modelo es natural; y estrictamente decreciente y estrictamente creciente respectivamente, si considera que el modelo es artificial y además presentan variación de signo

en el intervalo (λ, ∞) como una consecuencia del Lema 2 y la Definición 3.

Proposición 5. Si el sistema suave (2.1), es natural y satisface las condiciones de Butler-Farkas, entonces existen k_{a_2}, k_{a_1} únicos, con $\lambda < k_{a_2} < k_{a_1} < \infty$, tal que para todo $k \in (\lambda, k_{a_2})$, todos los puntos del segmento L_k son estables en el sentido de Lyapunov, y L_k es un atractor del sistema en el sentido que existe una vecindad del segmento de equilibrios para el cual las soluciones con condición inicial en esta vecindad tiende a un punto del segmento L_k cuando t tiende a infinito.

Para $k \in (k_{a_2}, k_{a_1})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k)) \in L_k$, divide L_k en dos partes (una de las cuales puede ser vacía), donde $\hat{\xi}_1(k)$ y $\hat{\xi}_2(k)$ son dados por (2.23), y (2.24), respectivamente. Los puntos de L_k a la izquierda de este punto son inestables, los puntos a la derecha son estables en el sentido de Lyapunov, y es un atractor del sistema. Para $k \in (k_{a_1}, \infty)$, el sistema no tiene puntos de equilibrios estables en el octante positivo del espacio cerrado s, x_1, x_2 .

Prueba: Por hipótesis nuestro modelo es natural. Así, como $\hat{\xi}_1(k)$ es continua, estrictamente creciente y presenta cambio de signo en el intervalo (λ, ∞) , existe un único k , en el cual $\hat{\xi}_1(k) = 0$, luego de (2.23) se tiene $c(\bar{k}, a_2) = 0$,

con lo cual $\bar{k} = k_{a_2}$ de acuerdo con la Proposición 1 y Lema 2. Sin embargo de (2.24) se deduce que la línea L_k intercepta el eje ξ_2 en un punto de coordenada positivo en $\bar{k} = k_{a_2} > \lambda$, es decir $\hat{\xi}_2(k_{a_2}) > 0$. Similarmente por las Proposiciones 1 y 4, existe un $k_{a_1} > k_{a_2}$ en la cual $\hat{\xi}_2(k_{a_1}) = 0$. En conclusión, para $k \in (\lambda, k_{a_2})$, el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k))$, donde la parte real de los valores propios de la linealización del sistema suave (2.1) se anula, se localiza en el segundo cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 . con $s = \lambda$, fijo, ver las Figuras 1 y 2. Además como

$$\partial_{\xi_1} a(\xi_1, k) = m < 0, \tag{2.25}$$

$$\text{entonces } a(\xi_1, k) < 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}. \tag{2.26}$$

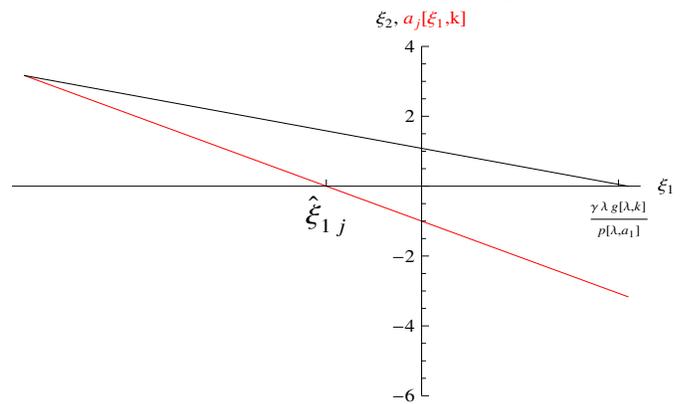


Figura1. Gráfica del segmento de línea L_k y el segmento de línea L_{ak} para la condición $k < k_{a2}$.

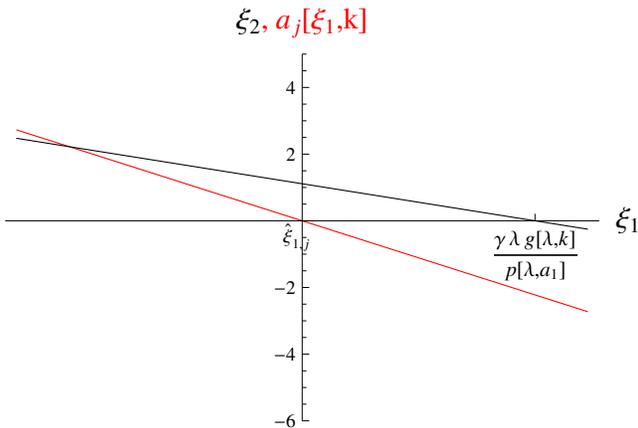


Figura2. Gráfica del segmento de línea L_k y del segmento de línea L_{ak} para la condición $k = k_{a2}$.

Sin embargo, (2.26) implica que en los puntos de L_k el sistema linealizado tienen dos valores propios con parte real negativa, y tienen una variedad estable bidimensional por un teorema dado en Harman [11]. Para $k \in (k_{a1}, \infty)$, el punto de intersección $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k)) \in L_k$, con valor propio con componente real cero se localiza en el cuarto cuadrante del plano ξ_1, ξ_2 , con $s = \lambda$, fijo, ver las Figuras 3, y 4.

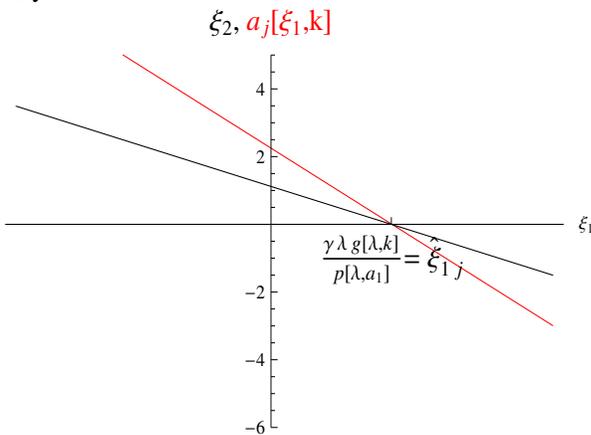


Figura3. Gráfica del segmento de línea L_k y del segmento de línea L_{ak} para la condición $k = k_{a1}$.

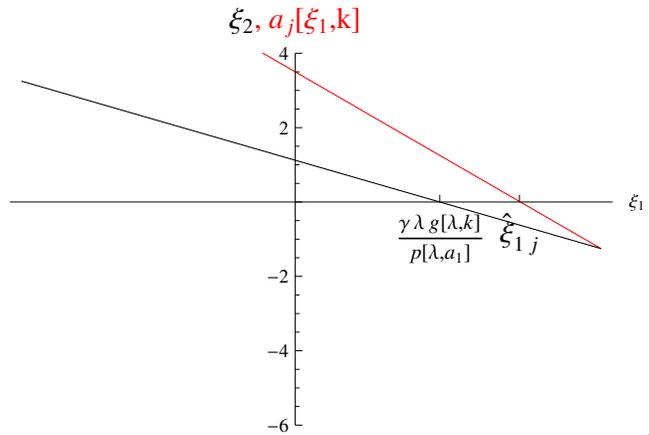


Figura4. Gráfica del segmento de línea L_k y del segmento de línea L_{ak} para la condición $k > k_{a1}$.

Por la condición (2.25) se tiene

$$a(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \quad (2.27)$$

sin embargo, (2.27) implica que en los puntos de L_k el subsistema linealizado tienen dos valores propios con parte real positiva, y tiene una variedad inestable bidimensional por un teorema dado en Harman [11].

Si $k \in (k_{a2}, k_{a1})$, el punto de intersección $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k))$, divide a L_k en dos partes; en la parte izquierda la condición (2.28) es válida y se tiene

$$a(\xi_1, k) > 0, \text{ si } 0 \leq \xi_1 \leq \hat{\xi}_1, \quad (2.28)$$

esto significa que los puntos en esta parte de L_k son inestables; por otro lado, en la parte derecha la condición (2.22) es válida y se tiene

$$a(\xi_1, k) < 0, \text{ si } \hat{\xi}_1 \leq \xi_1 \leq \frac{\gamma \lambda g(\lambda, k)}{p(\lambda, a_1)}, \quad (2.29)$$

es decir en cada punto en esta parte de L_k los puntos son estables, ver Figura 5.

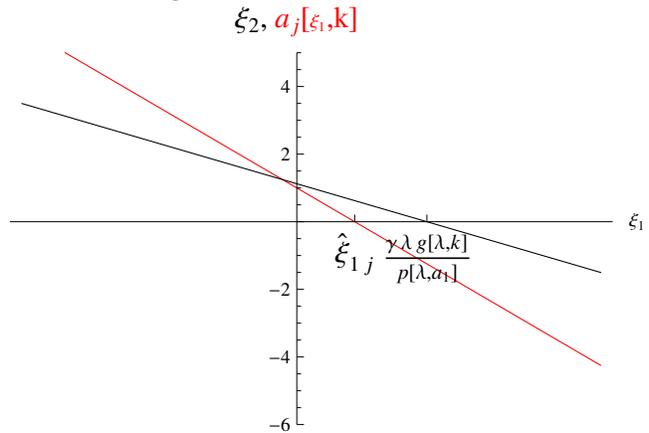


Figura5. Gráfica del segmento de línea L_k y el segmento de línea L_{ak} para la condición $k_{a2} < k < k_{a1}$.

La prueba de la atractividad del lado derecho del segmento de equilibrios coincide paso a paso con la prueba dada por Farkas [5]. Dado que $g(\cdot, \cdot)$ es una función no decreciente y $\hat{\xi}_2(k)$ es una función monótona decreciente, si k es incrementado de k_{a2} a k_{a1} , entonces el punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k))$, se mueve constantemente a lo largo de L_k del extremo del lado izquierdo, es decir $\hat{\xi}_1(k_{a2}) = 0$, al extremo del lado derecho o sea $\hat{\xi}_2(k_{a1}) = 0$; además el segmento L_k sufre un desplazamiento paralelo hacia arriba. En este proceso los puntos que se quedan detrás del punto $(\lambda, \hat{\xi}_1(k), \hat{\xi}_2(k))$, pierden su estabilidad. Farkas llamó a este fenómeno bifurcación zip. \square

III. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el presente artículo de investigación se ha demostrado la existencia de la bifurcación zip en un modelo del tipo predador presa generado a partir de un campo tridimensional mediante el análisis del comportamiento dinámico y asintótico de la componente real de los valores propios de la linealización del sistema a lo largo de L_k . Este enfoque analítico es interesante, ya que nos permite extender dicho análisis al comportamiento dinámico y asintótico de la componente imaginaria de los valores propios de la linealización del sistema a lo largo de L_k el cual es condición necesaria para el estudio de la estabilidad y atractividad de L_k en el fenómeno de la bifurcación zip en sistemas no suaves, véase Küpper [18].

AGRADECIMIENTOS

Agradecimientos a los Profesores Miklós Farkas, Gerard Olivar y Jocirei Días por su gran amabilidad y pertinente orientación en esta investigación.

REFERENCIAS

Referencias de publicaciones periódicas:

- [1] BUTLER G. J. "Competitive predator-prey systems and coexistence". In population Biology Proceedings, Edmonton: Lecture Notes in Biomathematics. 52: 210- 299. Berlin: Springer-Verlag, 1983.
- [2] CAMLIBEL M. K, HEEMELS W. P. M. H, SCHUMACHER J. M. Stability and controllabilidad of planar bimodal complementarity systems. In Proceedings IEEE Conference on Decision and Control, 2003.

- [3] CARMONA V, FREIRE E, PONCE E, TORRES F. Bifurcation of invariant cones in Piecewise Linear Homogeneous System. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 15, No. 8: 2469--2484. 2005.
- [4] ESCOBAR M. C. Contribucion al estudio de los sistemas no-suaves (bifurcación zip. Tesis Doctoral Universidad Nacional, 2013.
- [5] FARKAS M. " Zip bifurcation in a competition model", Nonlinear analysis". Vol 8. p. 1295-1309. TMA 1984.
- [6] FARKAS M. "A zip bifurcation arising in population dynamics", In 10th Int. Conf. On, Nonlinear Oscillations, Varna 1984. 150-155. Sofia: Bugarian Academy of Science., 1985.
- [7] FARKAS M, SÁEZ SZÁNTÓ. Velcro Bifurcation in Competition Models with Generalized Holling Functional Response. Miskolc Mathematical Notes, Vol 6, N.2, 2005, pp.165-178.
- [8] FERREIA J. D., OLIVEIRA L. A. "Hopf and zip bifurcation in an (n+1)-competitive system". Matematicas: Enseñanza Universitaria. 2007.
- [9] FERREIA J. D, OLIVEIRA L. A. Zip bifurcation in a competitive system with diffusion. Differential Equations and Dynamical Systems. Vol. 17, Nos. 1 & 2, pp. 37--53, January & April 2009.
- [10] FREIRE E, PONCE E, RODRIGUES F, TORRES F. Bifurcation sets of continuous Piecewise Linear systems with two zones. International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 8, No. 11: 2073-2097. 1998.
- [11] HARTMAN P. Ordinary Differential Equations. New York: Wiley, 1964.
- [12] HSU S. B, Hubbell S. P, Waltman P. Competing predators, SIAM J. appl. Math. 35: 617-625. 1978a.
- [13] KISS K, KOVACS SANDO. "Qualitative behavior of n-dimensional ratio-dependent predator-prey systems". Applied Mathematics and Computation 199 535-546. 2008.
- [14] KUZNETSOV YU A, RINALDI S, GRAG-NANI A. One-parameter bifurcation in planar Filippov systems. International Journal of Bifurcation and Chaos 13, 2157-2188. 2003.

- [15] LEINE RI, VAN DE CAMPEN DH, VAN DE VRANDE BI. Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. *Nonlinear Dynam*; 23:105-64. 2000.
- [16] OLIVAR G, ÁNGULO F, DI BERNARDO M. Like transitions in nonsmooth dynamical systems. *Proceedings IEEE ISCAS*, vol. 4, pp. 693-696. ISBN 0-7803-8251-X.2004.
- [17] WILKEN D. R. Some remarks on a competing predators problem, *SIAM J. appl. Math.* 42: 895-902.1982.
- [18] ZOU Y, KÜPPER T, BEYN W.J. Generalized Hopf Bifurcation for Planar Filippov Systems Continuous at the Origin. *J. Nonlinear Sci. Vol.* 16: pp. 159--177 (2006).